

Универзитет у Београду
Математички факултет

МАСТЕР РАД

**Стабилност стационарних
кретања крутог тела на површи
и динамика келтског камена**

Студент:

Вељко Панић
Број индекса: 1020/2015

Ментор:

др Срђан Вукмировић

Београд, септембар 2017.

Садржај

Предговор	3
Увод	4
1 Механика крутог тела	5
1.1 Кретање тачке у покретном координатном систему	5
1.1.1 Кретање у инерцијалном координатном систему	5
1.1.2 Кретање једног координатног система у односу на други	5
1.1.3 Веза између кретања у два координатна система	6
1.2 Круто тело	8
1.2.1 Оператор (тензор) инерције	10
1.2.2 Ојлеров случај	15
1.3 Кретање крутог тела по површи	16
2 Стабилност	20
2.1 Теореме Љапунова	23
2.2 Форме m -тог реда	26
2.3 Стабилност решења система диференцијалних једначина	32
2.3.1 Стабилност решења линеарних система	34
2.3.2 Довољни услови стабилности и нестабилности .	38
2.4 Теорема Љапунов–Малкина	39
2.5 Раут–Хурвицова теорема	44
3 Келтски камен	53
4 Додатак	62
Литература	70

Предговор

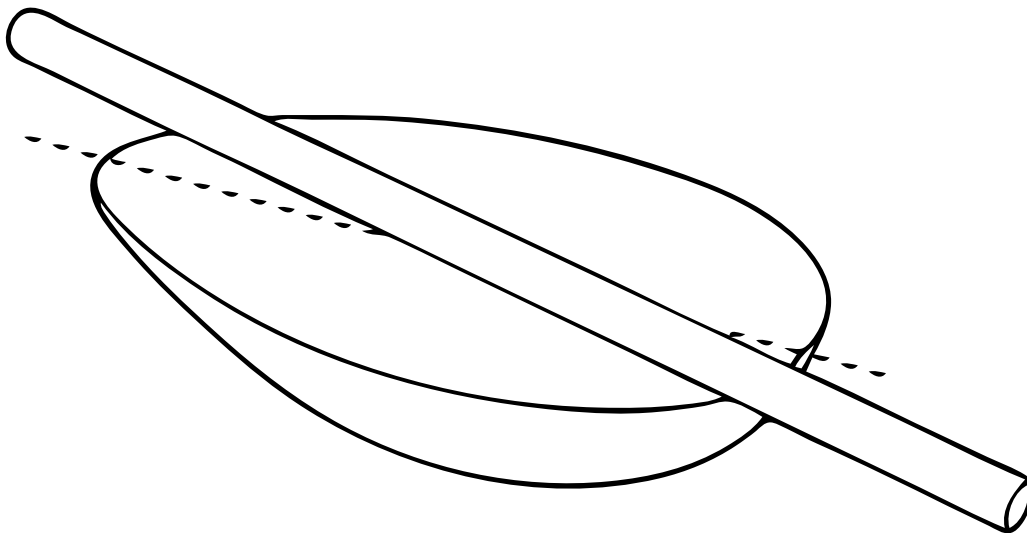
У овом раду је испитана стабилност стационарне ротације келтског камена. Иако је чудно понашање келтског камена уочено давно, још увек није потпуно разјашњено његово кретање. Приказ познатих резултата ове тематике се може наћи у [5]. Срж рада је испитивање стабилности стационарне ротације келтског камена, али су у њему доказане многе теореме које имају широку примену. Неки докази су исписани детаљно, иако су литератури углавном непотпуни.

Рад је подељен у четири главе. У првој глави су уведени појмови као што су круто тело, угаона брзина, кинетички момент и оператор инерције који су неопходни за разумевање проблема. У поглављу 1.3 су изведене једначине кретања крутог тела по равни без клизања. У другој глави је уведен појам стабилности кретања, а доказане су и теореме које се користе у испитивању стабилности кретања келтског камена. У трећој глави је испитана стабилност стационарне ротације келтског камена и добијени су услови стабилности. Четврта глава је додатак у коме се једначине кретања келтског камена преводе у облик погодан за испитивање стабилности.

Аутор се овим путем захваљује ментору, проф. др Срђану Вукмировићу, као и члановима комисије др Бориславу Гајићу и доц. др Тијани Шукиловић на конструктивним критикама и сугестијама. Посебно се захваљује др Бориславу Гајићу који му је предложио тему и много помогао при избору литературе. Такође, аутор се захваљује и породици на пруженој подршци током писања овог рада.

Увод

Необично понашање келтског камена се огледа у природи његове ротације. Наиме, када се келтски камен који се налази на површи заротира око вертикалне осе у једном смеру, ротација ће бити стабилна. Ако се, међутим, заротира у супротном смеру, ротација је нестабилна, а може се догодити да у једном тренутку почне да осцилује око хоризонталне осе, након чега мења смер ротације. Ово се догађа због асиметричне расподеле масе у односу на геометрију келтског камена. Код неких келтских камена је асиметрија таква да су ротације у оба смера нестабилне, а могућа је и промена смера ротације више пута. Примери камења са овом особином су нађени на археолошким налазиштима Келта, одакле име и потиче. Такав предмет се може направити и у кућним условима, на пример, од кашике, тако што јој се одсече дршка, а потом се на остатак стави пластелин у који се утисне оловка под неким углом, да расподела масе не би била симетрична у односу на геометрију кашике.



1 Механика крутог тела

У овој глави ће бити дефинисани основни појмови везани за механику крутог тела, као и специфичности потребне за проблем који се разматра. Више о крутом телу се може наћи у [2].

1.1 Кретање тачке у покретном координатном систему

Најпре се разматра кретање материјалне тачке - тачке којој је додељена маса и закони кретања како у инерцијалном, тако и у неинерцијалном координатном систему. Инерцијални координатни систем ће бити означен малим словом k , а координатни систем који се креће у односу на њега великим словом K . Вектори ће бити означени подебљаним словима: малим словима за координатни систем k , а великим за K , па ако је радијус вектор неке тачке $\mathbf{q}$ у k , онда ће радијус вектор те исте тачке у систему K бити означен са $\mathbf{Q}$.

1.1.1 Кретање у инерцијалном координатном систему

Нека је k инерцијални координатни систем и нека је кретање материјалне тачке масе m одређено радијус вектором $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. Тада је брзина тачке једнака $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t)$, а убрзање $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{q}}(t)$. Како је k инерцијални координатни систем, важиће други Њутнов закон, па ако на материјалну тачку делује сила $\mathbf{f}$, онда је $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$, тј. $\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{f}}{m}$.

1.1.2 Кретање једног координатног система у односу на други

Дефиниција 1. Нека су k и K оријентисани еуклидски простори. Кретање простора K у односу на k је пресликавање D_t , које је глатко по t :

$$D_t : K \rightarrow k,$$

и које чува метрику и оријентацију.

Дефиниција 2. Кретање D_t се зове ротација ако слика координатни почетак простора K у координатни почетак простора k .

Теорема 1. Свако кретање D_t се може јединствено написати као композиција ротације $B_t : K \rightarrow k$ и транслације $C_t : k \rightarrow k$:

$$D_t = C_t B_t,$$

где је $C_t \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{r}(t)$.

Доказ: За $\mathbf{r}(t) = D_t \mathbf{0}$ и $B_t = C_t^{-1} D_t$ је $B_t \mathbf{0} = C_t^{-1} D_t \mathbf{0} = C_t^{-1} \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$, чиме је доказано да се D_t може разложити као композиција транслације и ротације. Како је $D_t = C_t B_t$ и $D_t \mathbf{0} = C_t B_t \mathbf{0} = C_t \mathbf{0}$, онда мора бити $B_t = C_t^{-1} D_t$ и $\mathbf{r}(t) = D_t \mathbf{0}$, чиме је доказана јединственост. $\square$

1.1.3 Веза између кретања у два координатна система

Нека је сада k непокретан координатни систем, а K покретан и нека је $\mathbf{q}(t)$ радијус вектор у k тачке која се креће. Тада је:

$$\mathbf{q}(t) = D_t \mathbf{Q}(t) = B_t \mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t). \quad (1)$$

где је $\mathbf{Q}(t)$ радијус вектор тачке у односу на покретни координатни систем K .

Диференцирањем по времену се добија:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B} \mathbf{Q} + B \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}. \quad (2)$$

Овде $\dot{\mathbf{q}}$ представља апсолутну брзину - брзину у непокретном координатном систему, $\dot{\mathbf{r}}$ је брзина система K у односу на k , $B \dot{\mathbf{Q}}$ је релативна брзина - брзина тачке у односу на покретни систем K гледано из k , а $\dot{B} \mathbf{Q}$ представља преносну брзину услед ротације. Да би боље била објашњена преносна брзина услед ротације, посматра се ротационо кретање система K у односу на k . Нека у систему K тачка мирује, тј. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ и $\dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{0}$. Тада је $\dot{\mathbf{q}} = \dot{B} \mathbf{Q}$, а како је $\mathbf{Q} = B^{-1} \mathbf{q}$, онда је $\dot{\mathbf{q}} = \dot{B} B^{-1} \mathbf{q} = A \mathbf{q}$, где је $A = \dot{B} B^{-1} : k \rightarrow k$ линеаран оператор на k .

Лема 1. Оператор A је антисиметричан: $A^T + A = 0$.

Доказ: Како је $B : K \rightarrow k$ ортогоналан оператор, тада је $B^T = B^{-1}$, па се диференцирањем једнакости $B B^T = E$ по времену добија $\dot{B} B^T + B \dot{B}^T = 0$, $\dot{B} B^T + (\dot{B} B^T)^T = 0$, а како је $B^T = B^{-1}$, онда је $A = \dot{B} B^{-1} = \dot{B} B^T$, дакле $A + A^T = 0$. $\square$

Лема 2. Сваки антисиметричан оператор на 3-димензионалном оријентисаном еуклидском простору је оператор векторског множења фиксним вектором:

$$Aq = \omega \times q, \quad \forall q \in \mathbb{R}^3.$$

Доказ: Антисиметрични оператори из $\mathbb{R}^3$ у $\mathbb{R}^3$ формирају линеаран простор димензије 3, јер је антисиметрична матрица димензија 3×3 одређена са три елемента изнад дијагонале. Оператор множења вектором $\omega \in \mathbb{R}^3$ је линеаран и антисиметричан, а скуп оператора множења вектором ω за све $\omega \in \mathbb{R}^3$ формира линеаран потпростор свих антисиметричних оператора. Како је и потпростор димензије 3, онда је једнак простору антисиметричних оператора. $\square$

Овиме је доказана следећа теорема:

Теорема 2. Ако систем K ротира у односу на k и ако тачке мирују у систему K , онда у сваком тренутку постоји вектор $\omega(t) \in k$ такав да је преносна брзина изражена формулом:

$$\dot{q} = \omega(t) \times q, \quad \forall q \in k.$$

На основу Лема 1 и 2 се добија $\dot{q} = \dot{B}Q = Aq = \omega \times q$. $\square$

Вектор ω се зове вектор тренутне угаоне брзине и на основу претходног је јединствено одређен.

За проблем који ће бити разматран (круто тело) је од значаја случај када је координатни систем K везан за тело које се креће, тј. у односу на K посматрано тело мирује, што значи да је $\dot{Q} = 0$. У том случају је:

$$\dot{q} = \dot{B}Q + \dot{r} = \omega \times (q - r) + \dot{r}. \quad (3)$$

Где је $\dot{B}Q = \omega \times (q - r)$, јер се тело креће, па се ротацијом B вектор Q слика у $q - r$.

1.2 Круто тело

Дефиниција 3. Круто тело је систем материјалних тачака ограничених везама:

$$|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j| = r_{ij} = \text{const},$$

тј. растојање између сваке две од њих је константно.

Дефиниција 4. Центар масе система материјалних тачака (не само крутог тела) је тачка са радијус вектором $\mathbf{q}_c$, тако да важи:

$$\left(\sum_i m_i \right) \mathbf{q}_c = \sum_i m_i \mathbf{q}_i,$$

односно:

$$\mathbf{q}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{q}_i}{\sum_i m_i}.$$

Веза између система k и K је $\mathbf{q}_i = D\mathbf{Q}_i$, а оператор D је ортогоналан, а самим тим и линеаран и има инверз, па је:

$$\begin{aligned} D\mathbf{Q}_c &= \frac{\sum_i m_i D\mathbf{Q}_i}{\sum_i m_i} = D \frac{\sum_i m_i \mathbf{Q}_i}{\sum_i m_i}, \\ \mathbf{Q}_c &= \frac{\sum_i m_i \mathbf{Q}_i}{\sum_i m_i}. \end{aligned}$$

Дакле, дефиниција не зависи од избора координатног система. Ако на тачку i делује спољашња сила $\mathbf{f}_i^s$, а унутрашње силе $\mathbf{f}_{ij}$, где је са $\mathbf{f}_{ij}$ означена сила којом делује тачка j на тачку i , онда убрзање тачке i износи:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \frac{\mathbf{f}_i^s + \sum_j \mathbf{f}_{ij}}{m_i},$$

а убрзање центра масе је:

$$\ddot{\mathbf{q}}_c = \frac{\sum_i m_i \ddot{\mathbf{q}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i (\mathbf{f}_i^s + \sum_j \mathbf{f}_{ij})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \mathbf{f}_i^s + \sum_{i,j} \mathbf{f}_{ij}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \mathbf{f}_i^s}{\sum_i m_i}.$$

Последња једнакост се добија из $\sum_{i,j} \mathbf{f}_{ij} = 0$, јер је $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$. Дакле, на кретање центра масе не утичу унутрашње силе, већ само спољашње. Ако је збир спољашњих сила $\mathbf{0}$, онда се центар масе

креће равномерно праволинијски. Нека је O координатни почетак непокретног система k и нека су $\mathbf{q}_i$ одговарајући радијус вектори материјалних тачака маса m_i у систему k .

Дефиниција 5. Момент количине кретања или кинетички момент у односу на тачку O тачке масе m_i и чији је радијус вектор $\mathbf{q}_i$ је вектор одређен са $\mathbf{m}_i = \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i$. Кинетички момент система тачака у односу на тачку O је збир појединачних кинетичких момената $\mathbf{m} = \sum_i \mathbf{m}_i$.

Закон промене кинетичког момента се добија диференцирањем $\mathbf{m}$ по t :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}} &= \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{m}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i = \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \sum_i \dot{\mathbf{q}}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i \\ &= \sum_i \mathbf{q}_i \times \left(\mathbf{f}_i^s + \sum_j \mathbf{f}_{ij} \right) = \sum_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{f}_i^s + \sum_{i,j} \mathbf{q}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \sum_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{f}_i^s. \end{aligned}$$

Последња једнакост се добија из:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \mathbf{q}_i \times \mathbf{f}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{q}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{q}_j \times \mathbf{f}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{q}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{q}_j \times (-\mathbf{f}_{ij})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \times \mathbf{f}_{ij}. \end{aligned}$$

Што је једнако $\mathbf{0}$, јер сила $\mathbf{f}_{ij}$ делује у правцу праве одређене тачкама i и j , дакле колинеарна је са $\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j$. Величина $\mathbf{n}_i = \mathbf{q}_i \times \mathbf{f}_i^s$ се зове момент силе $\mathbf{f}_i^s$ у односу на тачку O . Збир појединачних момената сила у односу на тачку O даје укупан момент сила у односу на тачку O : $\mathbf{n} = \sum_i \mathbf{n}_i$. Стога је извод по времену кинетичког момента неког система у односу на тачку O једнак укупном моменту сила које делују на тај систем у односу на тачку O . Као што је показано, могу се изоставити унутрашње силе, јер оне дају укупан момент $\mathbf{0}$.

Центар масе ће се кретати равномерно праволинијски ако је збир спољашњих сила које делују на систем материјалних тачака (смт) једнак $\mathbf{0}$. У том случају постоји инерцијални координатни систем k са координатним почетком у центру масе смт-а (смт у

њему неће мировати). Ако је и укупан момент спољашњих сила у односу на центар масе смт-а једнак $\mathbf{0}$, кинетички момент смт-а у односу на центар масе ће бити константан. Ако на систем не делују никакве спољашње силе, механичка енергија система, која је једнака збиру кинетичке и потенцијалне енергије, ће бити константна. У случају крутог тела, где материјалне тачке не могу да се крећу једна у односу на другу, ако на тело не делују спољашње силе, потенцијална енергија ће бити једнака нули, па ће механичка енергија бити једнака кинетичкој.

1.2.1 Оператор (тензор) инерције

Нека је сада круто тело слободно да ротира око координатног почетка O инерцијалног координатног система k и нека је координатни систем K фиксиран за тело, тако да му је координатни почетак у O . Онда ће K ротирати око k , оператор $D = B : K \rightarrow k$ је оператор ротације. Одговарајући вектори ће бити означени истим словима: великим кад се посматрају у K , а малим кад се посматрају у k . Тако је:

- $\mathbf{q} \in k$ радијус вектор тачке у k ,
- $\mathbf{Q} \in K$ радијус вектор тачке у K , $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$,
- $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \in k$ вектор брзине тачке у k ,
- $\mathbf{V} \in K$ исти вектор посматран из K , $\mathbf{v} = B\mathbf{V}$ (није $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{Q}}$),
- $\boldsymbol{\omega} \in k$ вектор угаоне брзине у k ,
- $\boldsymbol{\Omega} \in K$ вектор угаоне брзине посматран из K , $\boldsymbol{\omega} = B\boldsymbol{\Omega}$,
- $\mathbf{m} \in k$ вектор кинетичког момента у k ,
- $\mathbf{M} \in K$ вектор кинетичког момента посматран из K , $\mathbf{m} = B\mathbf{M}$.

Пошто оператор $B : K \rightarrow k$ чува растојање и оријентацију, онда чува и скаларни и векторски производ. Из дефиниције угаоне брзине, за тачку која мирује у K важи:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q},$$

па је и:

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}.$$

Из дефиниције кинетичког момента тачке масе m у односу на O је:

$$\mathbf{m} = \mathbf{q} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{q} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})),$$

па је:

$$\mathbf{M} = m(\mathbf{Q} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q})).$$

Дакле, постоји линеаран оператор $I : K \rightarrow K$, тако да је $I\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}$. Овај оператор зависи од положаја $\mathbf{Q}$ изабране тачке и од њене масе m .

Лема 3. Оператор I је симетричан.

Доказ: Нека су $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ вектори из K . Тада је:

$$\langle I\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = m\langle (\mathbf{Q} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Q})), \mathbf{Y} \rangle = m\langle \mathbf{Y} \times \mathbf{Q}, \mathbf{X} \times \mathbf{Q} \rangle,$$

где се последња једнакост добија из особине мешовитог производа: $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Слично је и

$$\langle \mathbf{X}, I\mathbf{Y} \rangle = \langle I\mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle = m\langle \mathbf{X} \times \mathbf{Q}, \mathbf{Y} \times \mathbf{Q} \rangle = \langle I\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle,$$

дакле, оператор I је симетричан. $\square$

Заменом $\boldsymbol{\Omega}$ уместо $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ се добија $\langle I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle = m\langle \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}, \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \rangle = m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q})^2$, а како је $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} = \mathbf{V}^2$, важи:

$$T = \frac{1}{2}\langle I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega} \rangle,$$

где је са T означена кинетичка енергија. Ако се тело састоји од више тачака $\mathbf{Q}_i$ маса m_i , важиће:

Теорема 3. Кинетички момент $\mathbf{M}$ крутог тела у односу на тачку O зависи линеарно од угаоне брзине $\boldsymbol{\Omega}$, тј. постоји линеаран оператор $I : K \rightarrow K$, $I\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}$. Оператор I је симетричан, а кинетичка енергија тела је квадратна форма по $\boldsymbol{\Omega}$:

$$T = \frac{1}{2}\langle I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega} \rangle.$$

Доказ: Кинетички момент тела је збир кинетичких момената појединачних тачака, па је:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i I_i \boldsymbol{\Omega} = I \boldsymbol{\Omega},$$

где је $I = \sum_i I_i$. Оператор I је симетричан као збир симетричних. Слично се добија и за кинетичку енергију:

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}_i, \boldsymbol{\Omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle I \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle. \quad \square$$

Симетричан оператор I се зове оператор (тензор) инерције тела у односу на тачку O . Како је оператор I симетричан, имаће 3 међусобно управна сопствена вектора. Заиста, свакој сопственој вредности ће одговарати сопствени вектор. Сопствена вредност не може бити комплексан број, јер би за сопствену вредност $a + ib$ постојао сопствени вектор $\mathbf{u} + i\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Тада би било:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) &= (a + ib)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}), \\ I\mathbf{u} + iI\mathbf{v} &= a\mathbf{u} - b\mathbf{v} + i(b\mathbf{u} + a\mathbf{v}), \\ I\mathbf{u} &= a\mathbf{u} - b\mathbf{v}, \\ I\mathbf{v} &= b\mathbf{u} + a\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Међутим, како је оператор I симетричан, онда важи:

$$0 = \langle I\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, I\mathbf{v} \rangle = \langle a\mathbf{u} - b\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, b\mathbf{u} + a\mathbf{v} \rangle = -b(\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2),$$

а како је $\mathbf{u} + i\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, онда мора да буде $b = 0$. Нека су сада I_1 , I_2 и I_3 сопствене вредности, а $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$ одговарајући јединични сопствени вектори. Како је I симетричан оператор, за $j \neq k$ важи:

$$I_j \langle \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k \rangle = \langle I_j \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k \rangle = \langle I \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k \rangle = \langle \mathbf{E}_j, I \mathbf{E}_k \rangle = I_k \langle \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k \rangle.$$

Ако су I_j и I_k различити, онда је $\langle \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k \rangle = 0$, тј. $\mathbf{E}_j$ и $\mathbf{E}_k$ су међусобно управни. Ако је $I_j = I_k$, онда су сви вектори у равни одређеној са $\mathbf{E}_j$ и $\mathbf{E}_k$ сопствени са сопственом вредношћу $I_j = I_k$, па међу њима постоје два међусобно управна. Вектори $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$

чине базу простора K , а у тој бази оператор инерције и кинетичка енергија имају облик:

$$M_i = I_i \Omega_i,$$

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2).$$

Осе одређене векторима $\mathbf{E}_i$ се зову главне осе тела у тачки O .

Теорема 4. Ако круто тело ротира око фиксне тачке O угаоном брзином $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{E}$ ($\Omega = |\mathbf{\Omega}|$) око осе одређене јединичним вектором $\mathbf{E}$, тада је кинетичка енергија

$$T = \frac{1}{2} I_E \Omega^2, \quad \text{где је} \quad I_E = \sum_i m_i r_i^2,$$

а r_i је растојање i -те тачке од осе одређене вектором $\mathbf{E}$.

Доказ: По дефиницији је $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2$, а како је $|\mathbf{v}_i| = \Omega r_i$, онда је $T = \frac{1}{2} (\sum_i m_i r_i^2) \Omega^2$. $\square$

Дефиниција 6. I_E се зове момент инерције тела у односу на осу одређеу вектором $\mathbf{E}$:

$$I_E = \sum_i m_i r_i^2.$$

Из једнакости $T = \frac{1}{2}(I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$ и претходне теореме следи да су сопствене вредности I_i оператора инерције I у ствари моменти инерције тела у односу на главне осе одређене векторима $\mathbf{E}_i$. Нека тело ротира око осе одређене јединичним вектором $\mathbf{E}$ угаоном брзином $\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{I_E}}$. Тада је:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} I_E \Omega^2 = T = \frac{1}{2} \langle I \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega} \rangle = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2).$$

Дакле, вектори $\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{I_E}}$ формирају елипсоид.

Дефиниција 7. Елипсоид $\{\mathbf{\Omega} : \langle I \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega} \rangle = 1\}$ се зове елипсоид инерције тела око тачке O .

Записано у бази одређеној векторима $\mathbf{E}_i$ елипсоид инерције има облик:

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 1,$$

па се главне осе оператора инерције и елипсоида инерције поклапају. Кинетички момент има правац нормале на елипсоид инерције у тачки пресека са осом одређеном вектором угаоне брзине $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{M} = I_1\Omega_1\mathbf{E}_1 + I_2\Omega_2\mathbf{E}_2 + I_3\Omega_3\mathbf{E}_3 = \frac{1}{2}\nabla(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2).$$

Теорема 5. Нека је у неком тренутку кинетички момент тела масе m у односу на његов центар масе једнак $\mathbf{m}_0$. Ако је $\mathbf{r}$ вектор положаја центра масе у односу на тачку O и ако се центар масе креће брзином $\mathbf{v}$ у односу на ту тачку, онда је кинетички момент $\mathbf{m}$ тог тела у односу на тачку O једнак:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + m\mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Доказ: Нека је $\mathbf{r}_i$ вектор положаја i -те тачке у односу на центар масе. Тада је брзина те тачке у односу на O једнака $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, па је:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \sum_i m_i(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i m_i\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \sum_i m_i\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + \sum_i m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{v} + \sum_i m_i\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \sum_i \boldsymbol{\omega} \times m_i\mathbf{r}_i + \left(\sum_i m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{v} + \mathbf{m}_0 \\ &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_i m_i\mathbf{r}_i\right) + \mathbf{0} \times \mathbf{v} + \mathbf{m}_0 \\ &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{0}) + \mathbf{m}_0 \\ &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{m}_0. \end{aligned} \quad \square$$

У доказу претходне теореме је коришћено $\sum_i m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$, што следи из дефиниције центра масе.

1.2.2 Ојлеров случај

Нека круто тело ротира у односу на непокретну тачку O и нека је једина сила која делује на тело реакција везе (сила која тело држи везано за тачку O). Тада је момент силе у односу на тачку O једнак $\mathbf{0}$, јер линија дејства силе пролази кроз O , па је кинетички момент $\mathbf{m}$ тела у односу на тачку O константан. Тада се вектор $\mathbf{M} \in K$ мења тако да је $\mathbf{m} = B_t \mathbf{M}(t) = \text{const.}$

Теорема 6. Вектор $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$ се мења по закону:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (4)$$

Доказ: Посматра се „тачка” $\mathbf{M}(t)$ која се креће у K . Из $\mathbf{m} = B\mathbf{M}$ следи:

$$\dot{\mathbf{m}} = \dot{B}\mathbf{M} + B\dot{\mathbf{M}},$$

где је $\dot{B}\mathbf{M}$ преносна брзина „тачке” $\mathbf{M}$, па је на основу Теореме 2:

$$\dot{\mathbf{m}} = B\dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m} = B(\dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}).$$

Међутим, како је $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$, онда је $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega}$. □

Једначине¹ (4) се зову Ојлерове² једначине, а могу се посматрати као диференцијалне једначине по $\mathbf{M}$ (или по $\boldsymbol{\Omega}$), пошто је $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$. Једначине (4) имају два прва интеграла³:

$$E = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3} \quad \text{и} \quad M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

E је константно из закона одржања енергије, а M^2 је константно, јер је $\mathbf{m}$ константно и важи $\mathbf{m}^2 = \mathbf{M}^2 = M^2$. Дакле, $\mathbf{M}$ је у пресеку сфере и елипсоида. Нека је $I_1 > I_2 > I_3$. Ротације константном угаоном брзином око главних оса одређених векторима $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$ су решења једначина (4).

¹Када се распише по координатама, добије се систем од три диференцијалне једначине

²Leonhard Euler (1707–1783)

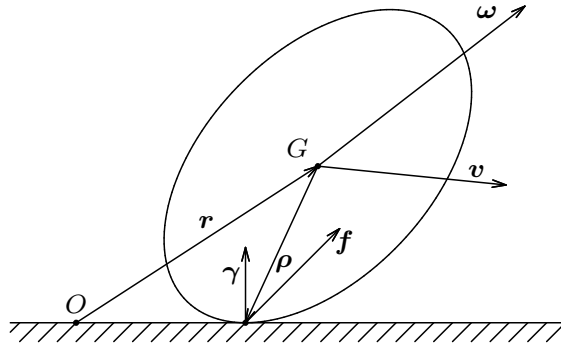
³Први интеграл система диференцијалних једначина $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ дефинисаног на $U \subset \mathbb{R}^n$ је (неконстантна) глатка функција $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ која је константна дуж решења тог система, тј. за свако решење $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ важи $\varphi(\mathbf{x}(t)) = \text{const.}$

Дефиниција 8. Кретање тела при коме му је угаона брзина константна ($\omega = \text{const}$, $\Omega = \text{const}$) се зове стационарна ротација.

Ниједна стационарна ротација као кретање није стабилна, јер ако се промени само интензитет угаоне брзине, ма колико мала да је та промена, после довољно времена ће се угао за који се тело заротирало значајно променити. Међутим, може се посматрати стабилност решења једначина (4), где се уместо кретања тела посматра вектор кинетичког момента $\mathbf{M}$. Одговарајућа стационарна решења су $\mathbf{M} = M_i \mathbf{E}_i$, при чему су за $I_1 > I_2 > I_3$ решења $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{M} = M_3 \mathbf{E}_3$ стабилна, а решење $\mathbf{M} = M_2 \mathbf{E}_2$ је нестабилно. Ово се може видети, јер је за $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{E}_1$ или $\mathbf{M} = M_3 \mathbf{E}_3$ пресек сфере и елипсоида скуп од две тачке, при чему једној од њих одговара кинетички момент $\mathbf{M}$, а другој одговара $-\mathbf{M}$. При малој промени почетних услова, пресек сфере и елипсоида се састоји од две затворене криве блиске тим тачкама, па ће и одговарајући кинетички момент бити близу оног који одговара стационарној ротацији. Када је $\mathbf{M} = M_2 \mathbf{E}_2$ одговарајући пресек сфере и елипсоида се састоји из два круга који се секу у $\mathbf{M}$ и $-\mathbf{M}$. Тада ће се при малој промени почетних услова пресек сфере и елипсоида састојати из две криве блиске тим круговима, али оне неће бити садржане у малој околини тачке којој одговара стационарна ротација, па та стационарна ротација неће бити стабилна. Више о стационарном кретању се може наћи у [4] и [7].

1.3 Кретање крутог тела по површи

Постоје разни модели за кретање крутог тела по површи. Овде се разматра нехолономни модел, када се конвексно тело креће по хоризонталној равни без клизања, тј. брзина тачке на телу која је у контакту са равни има брзину $\mathbf{0}$. Претпоставља се да је



површ крутог тела глатка. Нека је O координатни почетак инерцијалног координатног система k , G центар масе тела и нека је координатни систем K везан за тело тако да му је координатни почетак у центру масе тела G . Нека се центар масе креће брзином $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ и нека тело ротира угаоном брзином $\boldsymbol{\omega}$. Вектор који спаја центар масе тела и тачку на телу које је у контакту са равни је означен са $\boldsymbol{\rho}$. Нека је $\boldsymbol{\gamma}$ јединични вектор управан на раван и усмерен на горе и нека раван делује на тело силом $\mathbf{f}$. На тело делује и гравитациона сила $-mg\boldsymbol{\gamma}$ у центру масе. Нека су

$$\mathbf{V} = B^{-1}\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\Omega} = B^{-1}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{P} = B^{-1}\boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = B^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{F} = B^{-1}\mathbf{f}$$

одговарајући вектори у систему K . Из једнакости (3) и претпоставке да се тело креће по равни без клизања следи:

$$\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0},$$

па је и:

$$\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Ако је при кретању тела одговарајући оператор ротације $B : K \rightarrow k$, онда ће оператор $B^{-1} : k \rightarrow K$ сликати векторе из k у одговарајуће векторе у K . Нека је $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \in k$ вектор у k , а $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t) \in K$ њему одговарајући вектор у K . Тада је $\mathbf{Q} = B^{-1}\mathbf{q}$, па је $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{B}^{-1}\mathbf{q} + B^{-1}\dot{\mathbf{q}}$. Имајући у виду да ако K ротира у односу на k угаоном брзином $\boldsymbol{\omega}$, онда ће k ротирати у односу на K угаоном брзином $-\boldsymbol{\omega}$ гледано из k , тј. угаоном брзином $-\boldsymbol{\Omega}$ гледано из K . На основу Теореме 2 (ако простори k и K замене улоге), важи:

$$\dot{B}^{-1}\mathbf{q} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Сада је:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \times \boldsymbol{\Omega} + B^{-1}\dot{\mathbf{q}}. \quad (6)$$

У инерцијалном систему k важе Њутнови закони, па је:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) &= \mathbf{f} - mg\boldsymbol{\gamma}, \\ \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}) &= \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{f}. \end{aligned}$$

На основу (6), претходне једнакости у K имају облик:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) &= m\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F} - mg\boldsymbol{\Gamma}, \\ \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\Omega}) &= I\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{F}.\end{aligned}\tag{7}$$

Користећи једнакости (5) и (7) добија се:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\Omega}) + m\mathbf{P} \times \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}) \\ &= I\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{F} + m\mathbf{P} \times \frac{d}{dt}(-\mathbf{V}) \\ &= I\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{F} - \mathbf{P} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) \\ &= I\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{F} - \mathbf{P} \times (m\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F} - mg\boldsymbol{\Gamma}) \\ &= I\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} - m\mathbf{P} \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) + mg\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Gamma} \\ &= I\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} + m\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{P} \rangle \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} + mg\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Gamma} \\ &= I\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} + (m\mathbf{P} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P})) \times \boldsymbol{\Omega} + mg\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Gamma}.\end{aligned}$$

Имајући у виду (5), једнакости:

$$m\mathbf{P} \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) = -m\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{P} \rangle \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}$$

и:

$$(m\mathbf{P} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P})) \times \boldsymbol{\Omega} = m\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{P} \rangle \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}$$

се добијају користећи формулу за двоструки векторски производ: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Нека је $\mathbf{M}$ кинетички момент тела у односу на тачку додира тела и равни, гледано из K . Тада је на основу Теореме 5:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{M}_0 + m(-\mathbf{P}) \times \mathbf{V} = I\boldsymbol{\Omega} + m(-\mathbf{P}) \times (\boldsymbol{\Omega} \times (-\mathbf{P})) \\ &= I\boldsymbol{\Omega} + m\mathbf{P} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}).\end{aligned}$$

Сада је:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}} &= \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\Omega}) + m\mathbf{P} \times \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}) + m\dot{\mathbf{P}} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}) \\ &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega} + m\dot{\mathbf{P}} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}) + mg\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Gamma}.\end{aligned}\tag{8}$$

Како је $\dot{\gamma} = \mathbf{0}$, на основу (6) је:

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega. \quad (9)$$

Једначине (8) и (9) су диференцијалне једначине променљивих $\mathbf{M}$ и Γ , где би требало вектор угаоне брзине Ω изразити у функцији од $\mathbf{M}$, а вектор $\mathbf{P}$ који спаја центар масе и додирну тачку тела и равни би требало изразити у функцији од Γ . Тада се добија систем од 6 диференцијалних једначина који има два прва интеграла:

$$E = \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}, \Omega \rangle - mg \langle \mathbf{P}, \Gamma \rangle, \quad \langle \Gamma, \Gamma \rangle = 1.$$

Први је механичка енергија која је константна, јер се тело креће по равни без клизања, па сила трења не врши рад, а други говори да је Γ јединичан вектор. Ако је $F(\mathbf{P}) = 0$ једначина површи тела, онда је веза између Γ и $\mathbf{P}$ дата са:

$$\Gamma = -\frac{\nabla F(\mathbf{P})}{|\nabla F(\mathbf{P})|}.$$

2 Стабилност

За испитивање понашања неког механичког система се користи математички модел тог система. Закони кретања се описују системом диференцијалних једначина, које су само апроксимација закона кретања. Због тога за испитивање стабилности кретања механичког система није довољно само да се испита стабилност кретања модела на коме важе те диференцијалне једначине. Потребно је узети у обзир разлику између модела и система. Ова разлика се испољава у промени диференцијалних једначина. Зато, да би се дао одговор на питање да ли ће механички систем имати стабилно кретање, треба испитати стабилност модела при промени почетних услова и промени диференцијалних једначина. Треба напоменути да те промене могу бити непознате, али ако задовољавају одређене услове, у неким случајевима је могуће одговорити на питање стабилности кретања механичког система. У даљем тексту ће и математички модел бити ословљен као механички систем или само систем.

Нека је кретање механичког система описано системом диференцијалних једначина:

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10)$$

где су $y_i (i = 1, \dots, n)$ неки параметри везани за кретање као што су координате, брзине и генерално, функције ових величина.

Ради једноставнијег записа, величине $y_i (i = 1, \dots, n)$ ће понекад бити писане подебљаним словима $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$. Могу се посматрати као матрице димензије $n \times 1$ и не треба их мешати са векторима из претходне главе. Нека су $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}'$ две такве величине и нека је $|y_i - y'_i|$ растојање између y_i и y'_i . Растојање између $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}'$ се може дефинисати као збир растојања између y_i и y'_i , $(i = 1, \dots, n)$, а биће означено са $\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$. Дакле, $\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \sum_{i=1}^n |y_i - y'_i|$.

Дефиниција 9. Кретање механичког система коме одговара партикуларно решење $y_i = u_i(t)$, $(i = 1, \dots, n)$, тј. $(\mathbf{y} = \mathbf{u}(t))$ је стабилно

по Љапунову⁴ у односу на параметре $y_i (i = 1, \dots, n)$, ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t > t_0)(\text{dist}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{u}(t_0)) < \delta \Rightarrow \text{dist}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) < \varepsilon),$$

где је са t_0 означен почетни тренутак.

Да би се испитала стабилност партикуларног решења $\mathbf{y} = \mathbf{u}(t)$, погодно је увести смену променљивих $x_i = y_i - u_i(t)$. Као и малопре, величине $x_i (i = 1, \dots, n)$ ће скраћено бити обележене подебљаним словом $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$. Сада се над $\mathbf{x}$ може дефинисати норма која ће бити означена са $\|\mathbf{x}\|$ тако да је $\|\mathbf{x}\| = \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{u}(t))$. Једначине (10) у овим координатама имају облик:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= X_i(t, x_1, \dots, x_n) \\ &= Y_i(t, x_1 + u_1(t), \dots, x_n + u_n(t)) \\ &\quad - Y_i(t, u_1(t), \dots, u_n(t)), \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (11)$$

или краће записано:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= X(t, \mathbf{x}) \\ &= Y(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t)) - Y(t, \mathbf{u}(t)). \end{aligned} \quad (12)$$

Партикуларном решењу $\mathbf{y} = \mathbf{u}(t)$ система диференцијалних једначина (10) одговара партикуларно решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ система диференцијалних једначина (12), а дефиниција стабилности у новим координатама гласи:

Дефиниција 10. Кретање механичког система је стабилно ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t > t_0)(\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon).$$

Што значи да би кретање било стабилно, треба да за сваку ε -околину тачке $\mathbf{0}$ постоји δ -околина тачке $\mathbf{0}$ тако да ако је $\mathbf{x}$ у почетном тренутку у δ -околини, онда никад неће изаћи из ε -окоline.

⁴Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в (1857–1918)

Дефиниција 11. Кретање при коме је:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

се зове асимптотски стабилно.

Овиме се испитивање стабилности решења једначина (10) своди на испитивање стабилности еквилибријума $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ једначина (12). До сада су разматране једначине (10), мада оне не морају бити тачне једначине кретања. На систем могу да делују и неке силе које нису узете у обзир, па би једначине кретања имале облик:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = Y(t, \mathbf{y}) + R(t, \mathbf{y}), \quad (13)$$

где $R(t, \mathbf{y})$ представља непознат утицај на механички систем, а за $R(t, \mathbf{y})$ се може претпоставити да је довољно мало и да дозвољава постојање решења једначина (13). Како је немогуће решити једначине (13), јер је $R(t, \mathbf{y})$ непознато, за испитивање стабилности треба одредити услове при којима ће решења једначина (10) бити стабилна ако им се дода утицај $R(t, \mathbf{y})$.

Дефиниција 12. За решење $\mathbf{y} = \mathbf{u}(t)$ једначина (10) се каже да је стабилно при дејству непознатих утицаја $R(t, \mathbf{y})$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоје два броја $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ тако да за свако решење $\mathbf{y}'(t)$ једначина (13) које у почетном тренутку задовољава:

$$\text{dist}(\mathbf{y}'(t_0) - \mathbf{u}(t_0)) < \delta_1,$$

важи за свако $t > t_0$:

$$\text{dist}(\mathbf{y}'(t) - \mathbf{u}(t)) < \varepsilon,$$

независно од утицаја $R(t, \mathbf{y})$ који у области $\{(t, \mathbf{y}) \mid t > t_0, \text{dist}(\mathbf{y} - \mathbf{u}(t)) < \varepsilon\}$ задовољава:

$$\|R(t, \mathbf{y})\| = \sum_{i=1}^n |R_i(t, \mathbf{y})| < \delta_2.$$

2.1 Теореме Јапунова

Нека је $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ решење једначина:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (14)$$

где $X_i(\mathbf{x})$, $(i = 1, \dots, n)$ не зависе од t . Стабилност решења се посматра у некој околини тачке $\mathbf{0}$:

$$\|\mathbf{x}\| < h. \quad (15)$$

Дефиниција 13. Функција $V(x_1, \dots, x_n) = V(\mathbf{x})$ се зове

- дефинитна ако је $V(\mathbf{x})$ константног знака за $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $V(\mathbf{0}) = 0$ у некој околини $\|\mathbf{x}\| < h$,
- семи-дефинитна ако је у некој околини $\|\mathbf{x}\| < h$ $V(\mathbf{x})$ ненегативна или непозитивна функција и $V(\mathbf{0}) = 0$, дакле може да буде $V(\mathbf{x}) = 0$ и за $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- недефинитна ако $V(\mathbf{x})$ узима вредности различитог знака у свакој околини $\|\mathbf{x}\| < h$.

Дефинитна функција која узима позитивне вредности ће бити ословљена као позитивно дефинитна, а ако узима негативне вредности, биће ословљена као негативно дефинитна. Слично ће и семи-дефинитна функција бити ословљена као позитивно семи-дефинитна или негативно семи-дефинитна.

Нека је $V = V(\mathbf{x})$ глатка функција променљивих $x_1, \dots, x_n$. Ако је $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ решење једначина (14), онда се и $V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}(t))$ мења по времену и важи:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i = W(\mathbf{x}), \quad (16)$$

па је и $\frac{dV}{dt}$ функција по $\mathbf{x}$ која постаје нула за $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Теорема 7. Ако је за једначине (14) могуће наћи дефинитну функцију $V(\mathbf{x})$ чији је извод по времену супротног знака од V или је једнак 0, онда је $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ стабилно решење једначина (14).

Доказ: Без губљења општости, може се претпоставити да је $V(\mathbf{x})$ позитивно дефинитна и да је у области (15) $\frac{dV}{dt} \leq 0$. Нека је U_ε ε -околина тачке $\mathbf{0}$, тј. $U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ тако да је $\varepsilon < h$ и нека је $\partial U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = \varepsilon\}$ њена граница. Тада V на ∂U_ε достиже минимум ξ који је строго позитиван, јер је $V(\mathbf{x}) = 0$ само за $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Како је $V(\mathbf{0}) = 0$, а V је непрекидна функција, онда постоји U_δ : δ -околина тачке $\mathbf{0}$ тако да важи $\mathbf{x} \in U_\delta \Rightarrow V(\mathbf{x}) < \xi$. U_δ је садржано у U_ε , јер је U_δ бирано тако да нема заједничких тачака са ∂U_ε . Нека је $\mathbf{x}(t_0) \in U_\delta$, тада је $V(\mathbf{x}(t_0)) < \xi$. Ако би $\mathbf{x}(t)$ изашло из U_ε , онда би у неком тренутку t_1 $\mathbf{x}(t)$ дошло први пут до ∂U_ε . Међутим, то је немогуће, јер би до тог тренутка $\mathbf{x}(t)$ било у U_ε , па би било $\frac{dV}{dt} \leq 0$, тј. важило би $V(\mathbf{x}(t_1)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) < \xi$. Овиме је доказано да оно решење које почиње у U_δ заувек остаје у U_ε . $\square$

Теорема 8. Ако је за једначине (14) могуће наћи дефинитну функцију $V(\mathbf{x})$ чији је извод по времену такође дефинитна функција, али супротног знака од V , онда је $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ асимптотски стабилно решење једначина (14).

Доказ: Без губљења општости, може се претпоставити да је $V(\mathbf{x})$ позитивно дефинитна и да је $\frac{dV}{dt}$ негативно дефинитна. Ако су области U_δ и U_ε као из доказа претходне теореме, онда ће свако решење које почиње у U_δ остати у U_ε , дакле решење је стабилно. Треба доказати да за сваку ρ -околину U_ρ тачке $\mathbf{0}$, постоји тренутак од када решење $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ које је почело у U_δ заувек остаје у U_ρ . На основу доказа претходне теореме постоји $\delta' > 0$ и одговарајућа околина $U_{\delta'}$, тако да ако решење $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ у неком тренутку уђе у околинду $U_{\delta'}$ заувек остаје у U_ρ . Претпоставимо супротно, да $\mathbf{x}(t)$ никада неће ући у околинду $U_{\delta'}$. Тада би $\mathbf{x}(t)$ било у компактном скупу $\overline{U_\varepsilon} \setminus U_{\delta'}$ на коме функција $\frac{dV}{dt}$ достиже максимум $-\nu < 0$. Међутим, то је немогуће, јер би било $V(t) < V(t_0) - \nu(t - t_0)$, па би за довољно велико t функција $V(t)$ била негативна. То значи да ће $\mathbf{x}(t)$ у неком тренутку ући у $U_{\delta'}$, а од тог тренутка ће заувек остати у U_ρ . Како је околина U_ρ произвољно мала, овиме је доказана асимптотска стабилност решења $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$. $\square$

Претходне две теореме су теореме Љапунова које говоре о стабилности решења $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$. Наредне две теореме говоре при којим условима је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ нестабилно.

Теорема 9. Ако је за једначине (14) могуће наћи функцију $V(\mathbf{x})$ чији је извод по времену $\frac{dV}{dt}$ дефинитна функција, а функција V је или недефинитна, или дефинитна (односно семи-дефинитна) истог знака као и $\frac{dV}{dt}$ онда је $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ нестабилно решење једначина (14).

Доказ: Нека је $\|\mathbf{x}\| < h$ околина у којој је $\frac{dV}{dt}$ дефинитна и нека је у њој садржано затворење $\overline{U_\varepsilon}$ ε -окоLINE тачке $\mathbf{0}$. Без губљења општости, може се претпоставити да је $\frac{dV}{dt}$ позитивно дефинитна. Из услова теореме, у свакој U_δ : δ -окоLINE тачке $\mathbf{0}$ постоји $\mathbf{x}_0 \in U_\delta$ тако да је $V(\mathbf{x}_0) > 0$. Како је V непрекидна и $V(\mathbf{0}) = 0$, онда постоји околина $U_{\delta'}$ тачке $\mathbf{0}$ тако да за $\mathbf{x} \in U_{\delta'}$ важи $V(\mathbf{x}) < V(\mathbf{x}_0)$. Позитивно дефинитна функција $\frac{dV}{dt}$ на компактном скупу $\overline{U_\varepsilon} \setminus U_{\delta'}$ достиже минимум $\nu > 0$. Нека је $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ решење једначина (14) са почетним условом $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Тада је $V(t) = V(\mathbf{x}(t))$ растућа функција, па не може $\mathbf{x}(t)$ да уђе у окоLINE $U_{\delta'}$ што значи да је $\frac{dV}{dt} \geq \nu$. Решење $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ће у неком тренутку изаћи из области U_ε , јер би под супротном претпоставком $V(\mathbf{x}(t))$ било ограничено максимумом функције V на $\overline{U_\varepsilon}$. То међутим није могуће, јер је $V(\mathbf{x}(t)) > V(\mathbf{x}(t_0)) + \nu(t - t_0)$. Овиме је доказано да за сваку δ -окоLINE тачке $\mathbf{0}$ постоји решење $\mathbf{x}$ које у њој почиње, а излази из окоLINE U_ε . $\square$

Теорема 10. Ако је за једначине (14) могуће наћи функцију $V(\mathbf{x})$ (која није идентички једнака нули ни у једној окоLINE тачке $\mathbf{0}$) чији је извод по времену $\frac{dV}{dt}$ облика:

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

где је $\lambda > 0$, а $W = W(\mathbf{x})$ је или идентички једнако нули, или је семи-дефинитна (или дефинитна) функција, а у том случају је V таква да у свакој окоLINE тачке $\mathbf{0}$ узима између осталог и вредности истог знака као и W , онда је $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ нестабилно решење једначина (14).

Доказ: Нека је $\|\mathbf{x}\| < h$ околина у којој је W семи-дефинитна и нека је у њој садржано затворење $\overline{U_\varepsilon}$ ε -окоLINE тачке $\mathbf{0}$. Може се претпоставити да је W позитивно семи-дефинитна. Тада је:

$$\frac{dV}{dt} \geq \lambda V.$$

Нека је U_δ произвољна околина тачке $\mathbf{0}$. По претпоставци постоји $\mathbf{x}_0 \in U_\delta$ тако да је $V(\mathbf{x}_0) > 0$. Како је $\frac{dV}{dt} \geq \lambda V$, онда је V растућа за $V > 0$. Ако је $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ решење такво да је $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, имајући у виду да је $V(\mathbf{x}_0) > 0$, V ће бити позитивна и растућа, па је $V(\mathbf{x}(t)) > V(\mathbf{x}(t_0)) = V(\mathbf{x}_0)$. Сада је $\frac{dV}{dt} \geq \lambda V \geq \lambda V(\mathbf{x}_0)$, па је $V(\mathbf{x}) \geq V(\mathbf{x}_0) + (t - t_0)\lambda V(\mathbf{x}_0)$. Функција V достиже максимум на $\overline{U_\varepsilon}$, што значи да ће у неком тренутку $V(\mathbf{x})$ бити веће од тог максимума, тј. $\mathbf{x}$ ће изаћи из $\overline{U_\varepsilon}$. Како је околина U_δ произвољно мала, решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ је нестабилно решење једначина (14). $\square$

Дефиниција 14. Функција $V = V(\mathbf{x})$ из претходних теорема се зове Љапуновљева функција за систем диференцијалних једначина (14).

2.2 Форме m -тог реда

Не постоји општи метод за конструкцију Љапуновљевих функција, а различити проблеми имају различите особености које понекад омогућавају конструкцију Љапуновљевих функција. Код система линеарних диференцијалних једначина је погодно користити форме.

Дефиниција 15. Функција $V = V(x_1, \dots, x_n)$ је форма m -тог реда, ако је:

$$V = \sum_{m_1, \dots, m_n} a_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n},$$

где су m_i ($i = 1, \dots, n$) ненегативни цели бројеви и важи $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$.

Из дефиниције следи да ако је V форма m -тог реда, онда је $V(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^m V(\mathbf{x})$. Ако је систем диференцијалних једначина који се разматра линеаран:

$$\frac{dx_j}{dt} = p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n, \quad (17)$$

при $V(t) = V(\mathbf{x}(t))$, где је $\mathbf{x}(t)$ решење система диференцијалних једначина (17), тада је:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n)$$

такође форма m -тог реда. Претпоставимо да се тражи форма V тако да је задовољено:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n) = \lambda V, \quad (18)$$

где је λ константа. Нека је најпре $m = 1$, тј. V је форма првог реда:

$$V = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

Заменом у (18) се добија:

$$\sum_{i=1}^n a_j(p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n) = \lambda(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n).$$

Изједначавање коефицијената уз x_i ($i = 1, \dots, n$) даје:

$$\begin{bmatrix} p_{11}a_1 & + & p_{21}a_2 & + & \dots & + & p_{n1}a_n \\ p_{12}a_1 & + & p_{22}a_2 & + & \dots & + & p_{n2}a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1n}a_1 & + & p_{2n}a_2 & + & \dots & + & p_{nn}a_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

или краће:

$$P^T \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a},$$

где $j \in$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Да би постојало $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ које задовољава ово, потребно и довољно је да буде:

$$D(\lambda) = \det(P^T - \lambda E) = \det(P - \lambda E) = 0. \quad (19)$$

Дакле, да би постојала линеарна форма V која задовољава једначину (18) потребно је и довољно да λ буде сопствена вредност матрице P . Нека је сада V форма m -тог реда, $m > 1$. Нека је са N означен број чланова форме m -тог реда. Из дефиниције форме

m -тог реда следи да је N једнако броју комбинација ненегативних целих бројева $m_1, \dots, m_n$ за које важи $m_1 + \dots + m_n = m$. Сада је:

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} m_j a_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_j^{m_j-1} \dots x_n^{m_n}.$$

Нека је N коефицијената $a_{m_1, m_2, \dots, m_n}$ поређано неким редом и нека су означени са $a_1, \dots, a_N$. Тада се убацивањем претходне једнакости у (18) и изјеначавањем чланова истог облика добија:

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \dots + A_{iN}a_N = \lambda a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (20)$$

где су A_{ij} неке константе које су линеарна комбинација коефицијената p_{kl} . Да би систем (20) имао решење различито од тривијалног ($a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$), потребно је и довољно да λ задовољава једначину:

$$D_m(\lambda) = \det \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (21)$$

па у том случају једначину (18) задовољава форма m -тог реда. Постоји веза између корена једначине (21) и корена карактеристичне једначине (19).

Теорема 11. Сви корени једначине (21) су дефинисани са:

$$\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_n\lambda_n, \quad (22)$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ корени карактеристичне једначине (19), а $m_1, m_2, \dots, m_n$ су ненегативни цели бројеви за које важи:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = m.$$

Доказ: Као што је показано, сваком корену λ_k карактеристичне једначине одговара бар једна линеарна форма V_k која задовољава (18). Тада је:

$$\frac{dV_k}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_k}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n) = \lambda_k V_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Нека је V форма m -тог реда дефинисана са:

$$V = V_1^{m_1} V_2^{m_2} \dots V_n^{m_n}.$$

Сада је извод по времену ове форме:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= m_1 V_1^{m_1-1} V_2^{m_2} \dots V_n^{m_n} \frac{dV_1}{dt} + \dots + m_n V_1^{m_1} V_2^{m_2} \dots V_n^{m_n-1} \frac{dV_n}{dt} \\ &= (m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n) V. \end{aligned}$$

Дакле, форма V m -тог реда задовољава једначину (18), за вредност $\lambda = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n$. Овиме је доказано да су све вредности облика (22) корени једначине (21). Треба још доказати да су сви корени једначине (21) облика (22). Ако су све вредности облика (22) међусобно различите, онда корена облика (22) има онолико колико има ненегативних целих бројева $m_1, m_2, \dots, m_n$ за које важи $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$. То је, међутим, баш једнако N , колико има и корена једначине (21). Нека су коефицијенти p_{jk} из (17) такви да нису све вредности облика (22) међусобно различите. Треба доказати да међу коренима једначине (21) нема оних који нису обухваћени изразом (22). Претпоставимо супротно, да је $\lambda = \Lambda$ један такав корен једначине (21). Нека је α модул разлике Λ и њему најближе вредности облика (22). Тада је α строго позитиван број. При промени коефицијената p_{jk} коефицијентима p'_{jk} , једначина (19) ће бити замењена једначином $D'(\lambda) = 0$. Нека су $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ њени корени. Једначина (21) ће бити замењена једначином $D'_m(\lambda) = 0$. Разлика између корена једначине $D'_m(\lambda) = 0$ и корена једначине $D_m(\lambda) = 0$ може да буде произвољно мала при довољно малој разлици коефицијената p_{kl} и p'_{kl} . Конкретно, постојаће корен једначине $D'_m(\lambda) = 0$ који је произвољно близу вредности Λ . Међутим, коефицијенти p'_{kl} се могу изабрати тако да међу бројевима:

$$m_1 \lambda'_1 + m_2 \lambda'_2 + \dots + m_n \lambda'_n, \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_n = m), \quad (23)$$

нема једнаких. То значи, да су сви корени једначине $D'_m(\lambda) = 0$ облика (23). Са друге стране, Λ је произвољно близу једном од њих, а сваки корен $m_1 \lambda'_1 + m_2 \lambda'_2 + \dots + m_n \lambda'_n$ једначине $D'_m(\lambda) = 0$ је произвољно близу корену $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n$ једначине $D_m(\lambda) = 0$. То значи да је Λ произвољно близу неког корена једначине

$D_m(\lambda) = 0$, што је у супротности са претпоставком да је растојање између Λ и њему најближег корена једначине $D_m(\lambda) = 0$ једнако $\alpha > 0$. Дакле, и у овом случају су сви корени једначине (21) облика (22). $\square$

Нека је $U(x_1, \dots, x_n)$ дата форма m -тог реда. Треба пронаћи форму истог реда која задовољава:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n) = U. \quad (24)$$

Нека су коефицијенти форме V означени као и раније: $a_1, a_2, \dots, a_N$ и нека су $b_1, b_2, \dots, b_N$ коефицијенти форме U . Изједначавајући чланове истог облика, добија се:

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \dots + A_{iN}a_N = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (25)$$

где се (25) разликује од (20) само са десне стране једнакости. Детерминанта овог система се поклапа са $D_m(0)$, а ако се разликује од нуле, онда ће постојати јединствени $a_1, \dots, a_N$ који задовољавају (25). У том случају постоји јединствена форма m -тог реда V која задовољава (24). Како су сви корени полинома $D_m(\lambda)$ одређени изразом (22), важиће следећа теорема.

Теорема 12. Ако су корени λ_j карактеристичне једначине (19) такви да израз (22) није нула ни за једну комбинацију ненегативних целих бројева $m_1, m_2, \dots, m_n$ за које је $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$, онда за сваку форму m -тог реда $U(x_1, \dots, x_n)$ постоји јединствена форма m -тог реда $V(x_1, \dots, x_n)$, тако да је задовољена једначина (24).

Још неке особине форми m -тог реда које ће бити потребне у наставку су дате следећим лемама.

Лема 4. (Ојлерова теорема о хомогеним функцијама [12]) Нека је функција $V(x_1, \dots, x_n)$ таква да је $V(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m V(x_1, \dots, x_n)$. Тада важи:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i = mV.$$

Доказ: Нека је $x'_i = \alpha x_i$ и нека су вредности $x_1, x_2, \dots, x_n$ фиксирани. Тада је:

$$\begin{aligned} V(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) &= \alpha^m V(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{d}{d\alpha} V(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) &= \frac{d}{d\alpha} \alpha^m V(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x'_i}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \frac{dx'_i}{d\alpha} &= m\alpha^{m-1} V(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x'_i}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) x_i &= m\alpha^{m-1} V(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Стављајући $\alpha = 1$ добија се тражена једнакост. $\square$

Нека је $V(x_1, \dots, x_n)$ форма m -тог реда и нека је функција $W(x_1, \dots, x_n)$ таква да је $W(\mathbf{0}) = 0$ и нека у области $\|\mathbf{x}\| < h$ задовољава неједнакост:

$$W(\mathbf{x}) < A(|x_1| + \dots + |x_n|)^m = A\|\mathbf{x}\|^m.$$

За оно што следи, појмови дефинитност, семи-дефинитност и недефинитност ће се гледати у области $\|\mathbf{x}\| < h$.

Лема 5. Ако је V дефинитна форма m -тог реда, онда ће и функција:

$$U(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x})$$

такође бити дефинитна и истог знака као и V , где је W у области $\|\mathbf{x}\| < h$ таква да важи $W(\mathbf{x}) < A\|\mathbf{x}\|^m$, а A је довољно мали број који зависи од само од V . Ако је V недефинитна, онда ће при истим условима и функција U бити недефинитна.

Доказ: Нека је $\mathbf{x} = \rho\boldsymbol{\alpha}$, где је $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$. Тада је:

$$U(\mathbf{x}) = \rho^m V(\boldsymbol{\alpha}) + W(\rho\boldsymbol{\alpha}).$$

Ако је V дефинитна, може се без умањења општости претпоставити да је позитивно дефинитна. За довољно мало ρ ће бити $\|\mathbf{x}\| < h$, па важи:

$$W(\rho\boldsymbol{\alpha}) < A\rho^m \|\boldsymbol{\alpha}\|^m = A\rho^m.$$

Нека је l минимум функције $V(\alpha)$, ($\|\alpha\| = 1$). Како је V позитивно дефинитна, l је строго веће од нуле и зависи само од форме V . Међутим, тада је за $A < l$ функција $U(x)$ позитивно дефинитна за $\|x\| < h$. Ако је форма V недефинитна, тада постоје α_1 и α_2 , такви да је $V(\alpha_1) = a > 0$ и $V(\alpha_2) = -b < 0$. Тада је за $A < \min\{a, b\}$ и функција $U(x)$ недефинитна. $\square$

Лема 6. Дефинитност или недефинитност форме се чува ако јој се дода форма истог реда са довољно малим коефицијентима.

Доказ: Ово следи директно из претходне леме имајући у виду да свака форма m -тог реда W задовољава неједнакост $W(x) < A\|x\|^m$, а позитиван број A може да буде произвољно мали ако су довољно мали коефицијенти форме W . $\square$

Нека је $V(x)$ функција која се може развити у ред у некој околини тачке $x = 0$, тако да почиње члановима m -тог реда. Тада се може написати:

$$V(x) = V_m(x) + V'(x),$$

где је V_m форма m -тог реда, а V' представља суму чланова вишег реда. Функција $V'(x)$ се може посматрати као форма m -тог реда чији су коефицијенти функције по x , које постају нула за $x = 0$. Зато ће у довољно малој области $\|x\| < h$ ти коефицијенти бити произвољно мали, па на основу претходне леме важи следећа.

Лема 7. Ако је V_m дефинитна форма, онда ће и функција V бити дефинитна у довољно малој околини $\|x\| < h_1$, а ако је V_m недефинитна, онда ће и функција V бити недефинитна у довољно малој околини $\|x\| < h_2$.

2.3 Стабилност решења система диференцијалних једначина

Нека је дат систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_j}{dt} = X'_j(x_1, \dots, x_n), \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

који има партикуларно решење $x \equiv 0$ ($x_j \equiv 0$; $j = 1, 2, \dots, n$). Ако се зна опште решење једначина (26), није проблем испитати стабилност партикуларног решења $x \equiv 0$. Међутим, мали је број

система диференцијалних једначина за који се зна опште решење. Зато је потребно наћи други начин да се испита стабилност. Један од начина је апроксимација система диференцијалних једначина линеарним системом. Нека је:

$$\frac{dx_j}{dt} = X'_j(x_1, \dots, x_n) = p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n + X_j(x_1, \dots, x_n), \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где се $X_j(\mathbf{x}) = X_j(x_1, \dots, x_n)$ у области:

$$\|\mathbf{x}\| < h$$

може развити у ред променљивих $x_1, \dots, x_n$ који почиње члановима степена не мањег од два. Тада се систему диференцијалних једначина (26) придружује линеаран систем:

$$\frac{dx_j}{dt} = p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

Систем линеарних диференцијалних једначина (27) се зове линеаризација система (или линеаризован систем) диференцијалних једначина (26). Сада се може испитивати стабилност решења $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ линеаризованог система. Треба напоменути да партикуларно решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ једначина (26) не мора да буде стабилно, чак и кад је $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ стабилно решење система једначина (27). Нека је:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + ax^3, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay^3, \end{aligned}$$

где је a константа. Нека је $x = x(t)$, $y = y(t)$ решење тог система. Тада је извод функције $x^2(t) + y^2(t)$ по t једнак:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) &= 2x(t)(-y(t) + ax^3(t)) + 2y(t)(x(t) + ay^3(t)) \\ &= 2a(x^4(t) + y^4(t)). \end{aligned}$$

Како је $2(x^4 + y^4) = (x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2 \geq (x^2 + y^2)^2$, за $a > 0$ важи $\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) \geq a(x^2 + y^2)^2$, па ће функција $x^2(t) + y^2(t)$ расти, а њен извод је ограничен одоздо са $a(x^2(t_0) + y^2(t_0))^2 \leq a(x^2(t) + y^2(t))^2$.

Дакле, $x^2(t) + y^2(t)$ неограничено расте. Ако је са друге стране $a < 0$, онда ће $x^2(t) + y^2(t)$ опадати и тежити нули. У оба случаја ($a > 0$ и $a < 0$) линеаризован систем гласи:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= x,\end{aligned}$$

а његово решење је:

$$\begin{aligned}x &= x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y &= x_0 \sin t + y_0 \cos t,\end{aligned}$$

где су x_0 и y_0 почетне вредности величина $x(t)$ и $y(t)$ (за $t = 0$). Дакле, линеаризован систем је стабилан, а стабилност почетног система зависи од величина вишег реда. Иако не мора увек стабилност система диференцијалних једначина да буде иста као и линеаризованог система, при одређеним условима ће бити. Због тога се најпре разматра стабилност линеарних система диференцијалних једначина.

2.3.1 Стабилност решења линеарних система

Нека је дат систем линеарних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_j}{dt} = p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

или краће

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = P\mathbf{x}. \quad (28)$$

Решење система линеарних диференцијалних једначина (28) са почетним условом $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ је $\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)P}\mathbf{x}_0$. Ако сви корени карактеристичне једначине:

$$\det(P - \lambda E) \quad (29)$$

имају негативне реалне делове онда је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ асимптотски стабилно, а ако постоји бар један корен карактеристичне једначине

са позитивним реалним делом, онда је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ нестабилно.⁵ За конструкцију Љапуновљевих функција система линеарних диференцијалних једначина, погодно је користити форме.

Теорема 13. Ако су реални делови свих корена карактеристичне једначине (29) негативни, и ако је дата дефинитна форма $U(x_1, \dots, x_n)$, онда постоји тачно једна форма $V(x_1, \dots, x_n)$ истог реда која задовољава једначину:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n) = U, \quad (30)$$

а та форма је такође дефинитна и супротног је знака од U .

Доказ: Како је реалан део сваког корена λ_i карактеристичне једначине негативан, израз (22) неће бити једнак нули ни за једну комбинацију ненегативних целих бројева $m_1, \dots, m_n$, таквих да је $m_1 + \dots + m_n = m$, па су услови Теореме 12 задовољени. То значи да постоји јединствена форма $V(x_1, \dots, x_n)$ која задовољава (30). Треба још доказати да је V дефинитна и супротног знака од U . Не умањујући општост, може се претпоставити да је U негативно дефинитна. Ако би форма V узимала негативне вредности, онда би на основу Теореме 9 решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ било нестабилно, што је супротно претпоставци. Ако форма V не узима негативне вредности, али је семи-дефинитна, онда би могло да се нађе $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, тако да је $V(\mathbf{x}_0) = 0$. Тада би за решење $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ са почетним условом $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ у почетном тренутку t_0 важило $V = 0$ и $\frac{dV}{dt} < 0$, што је немогуће, јер је V позитивно семи-дефинитна. Преостаје једино да је V позитивно дефинитна. $\square$

Форма V из претходне теореме задовољава услове Теореме 8, па представља Љапуновљеву функцију. У случају да су реални делови свих корена карактеристичне једначине (29) негативни, за конструкцију Љапуновљеве функције је довољно изабрати дефинитну форму U , на основу које се конструише V . Како је рачун којим се од U добија V компликованији за форме вишег реда, погодно је за U изабрати квадратну форму. У случају да постоји

⁵ Дефиниција за e^A кад је A матрица, као и услови стабилности линеарног система диференцијалних једначина се могу наћи у [1].

корен карактеристичне једначине (29) коме је реалан део позитиван, важе следеће теореме.

Теорема 14. Ако постоји корен карактеристичне једначине (29) са позитивним реалним делом и ако су корени карактеристичне једначине такви да:

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n$$

није нула ни за једну комбинацију ненегативних целих бројева $m_1, \dots, m_n$, при $m_1 + \cdots + m_n = m$, онда за сваку дефинитну форму m -тог реда U постоји јединствена форма V истог реда која задовољава (30) и V неће бити семи-дефинитна (ни дефинитна) супротног знака од U .

Доказ: Може се претпоставити да је U позитивно дефинитна. На основу Теореме 12 Постоји јединствена форма V истог реда која задовољава (30). Треба још доказати да V није ни негативно семи-дефинитна ни негативно дефинитна. Ако би била негативно дефинитна, задовољавала би услове Теореме 8, па би решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ било асимптотски стабилно, што је супротно претпоставци. Форма V не може да буде ни негативно семи-дефинитна, јер би као у доказу претходне теореме постојало решење $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ за које у почетном тренутку важи $V = 0$, $\frac{dV}{dt} > 0$, а то би било немогуће ако је V негативно семи-дефинитна. $\square$

За претходну теорему је био неопходан услов да $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n$ није нула ни за једну комбинацију ненегативних целих бројева $m_1, \dots, m_n$, при $m_1 + \cdots + m_n = m$. Тај недостатак отклања следећа теорема.

Теорема 15. Ако постоји корен карактеристичне једначине (29) са позитивним реалним делом, за произвољну дефинитну форму m -тог реда U постоје форма V истог реда и позитиван број $\alpha > 0$, тако да важи:

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V + U, \quad (31)$$

а форма V неће бити семи-дефинитна (ни дефинитна) супротног знака од U .

Доказ: Нека је у једначини:

$$D'(\rho) = \det \begin{bmatrix} p_{11} - \frac{\alpha}{m} - \rho & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \frac{\alpha}{m} - \rho & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} - \frac{\alpha}{m} - \rho \end{bmatrix} = 0, \quad (32)$$

$\alpha > 0$. Корени ρ_j ове једначине су повезани са коренима карактеристичне једначине везом:

$$\rho_j = \lambda_j - \frac{\alpha}{m},$$

па се може изабрати довољно мало α тако да бар један корен једначине (32) има позитиван реалан део. У исто време може се изабрати такво α да:

$$m_1\rho_1 + m_2\rho_2 + \cdots + m_n\rho_n$$

није нула ни за једну комбинацију ненегативних целих бројева $m_1, \dots, m_n$, за које је $m_1 + \cdots + m_n = m$. Тада, на основу претходне теореме постоји јединствена форма m -тог реда V која задовољава:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \left(p_{j1}x_1 + \cdots + \left(p_{jj} - \frac{\alpha}{m} \right) x_j + \cdots + p_{jn}x_n \right) = U, \quad (33)$$

где је U произвољна дефинитна форма m -тог реда, а V није семи-дефинитна (ни дефинитна) супротног знака. На основу Леме 4 је:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} = mV,$$

па се добија:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \cdots + (p_{jj})x_j + \cdots + p_{jn}x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \left(p_{j1}x_1 + \cdots + \left(p_{jj} - \frac{\alpha}{m} \right) x_j + \cdots + p_{jn}x_n \right) + \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} x_j \\ &= \alpha V + U, \end{aligned} \quad (34)$$

што се и тражило. $\square$

2.3.2 Довољни услови стабилности и нестабилности

Нека је дат систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_j}{dt} = p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n + X_j(x_1, \dots, x_n), \quad (j = 1, \dots, n), \quad (35)$$

где се $X_j(\mathbf{x})$ у области:

$$\|\mathbf{x}\| < h$$

може развити у ред по $x_1, \dots, x_n$ који почиње члановима реда не мањег од два. Треба пронаћи услове при којима се одговор на питање стабилности може дати разматрајући само линеаризован систем:

$$\frac{dx_j}{dt} = p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (36)$$

Теорема 16. Ако сви корени карактеристичне једначине линеаризованог система диференцијалних једначина (36) имају негативне реалне делове, онда је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ система диференцијалних једначина (35) стабилно, и то асимптотски.

Доказ: Нека је квадратна форма $V(x_1, \dots, x_n)$ дефинисана са:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n) = -(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

На основу Теореме 13, таква форма постоји и биће позитивно дефинитна. Извод ове форме по времену при систему диференцијалних једначина (35) има облик:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \cdots + p_{jn}x_n + X_j) \\ &= -(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} X_j. \end{aligned}$$

Како развој функције $\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} X_j$ почиње члановима реда не мањег од 3, на основу Леме 7, $\frac{dV}{dt}$ ће бити негативно дефинитна функција у некој околини $\|\mathbf{x}\| < h$. Сада, форма V задовољава услове Теореме 8, па је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ система диференцијалних једначина (35) асимптотски стабилно. $\square$

Теорема 17. Ако постоји корен карактеристичне једначине линеаризованог система диференцијалних једначина (36) који има позитиван реалан део, онда је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ система диференцијалних једначина (35) нестабилно.

Доказ: Нека су квадратна форма $V(x_1, \dots, x_n)$ и позитиван број α такви да важи:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n) = \alpha V + (x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

На основу Теореме 15 они постоје, а форма V узима и позитивне вредности. Извод ове форме по времену при систему диференцијалних једначина (35) има облик:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n + X_j) \\ &= \alpha V + W, \end{aligned}$$

где је:

$$W(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} X_j,$$

а на основу Леме 7, W је позитивно дефинитна функција у некој околини $\|\mathbf{x}\| < h$. На основу Теореме 10 је решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ система диференцијалних једначина (35) нестабилно. $\square$

2.4 Теорема Љапунов–Малкина

У случају када су реални делови корена карактеристичне једначине мањи од нуле, или када постоји корен коме је реалан део већи од нуле, стабилност решења датог система је позната. Међутим, у многим ситуацијама се јављају системи диференцијалних једначина где корени карактеристичне једначине немају позитиван реалан део, али имају реалан део једнак нули. При одређеним условима је и у том случају могуће испитати стабилност. Један од тих случајева ће бити приказан сада, а користиће се за одређивање стабилности кретања келтског камена у наредној глави.

Нека је дат систем диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}\frac{dy_i}{dt} &= Y_i(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k), \quad (i = 1, \dots, k), \\ \frac{dx_j}{dt} &= p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n + X_j(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k), \quad (j = 1, \dots, n),\end{aligned}\tag{37}$$

где су Y_i и X_j ограничене функције по t (тј. ако се фиксирају $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, онда су функције $Y_i(t) = Y_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $X_j(t) = X_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ ограничене), а аналитичке по променљивама y_i и x_j у некој околини тачке $\mathbf{0}$ која је независна од t , тако да развој тих функција у ред почиње члановима реда не мањег од два. У исто време, за функције Y_i и X_j важи:

$$Y_i(t, 0, \dots, 0, y_1, \dots, y_k) = X_j(t, 0, \dots, 0, y_1, \dots, y_k) = 0,$$

дакле, функције Y_i и X_j постају једнаке нули кад је само $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Коефицијенти p_{jk} су такви да једначина:

$$\det \begin{bmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0, \tag{38}$$

има само корене са негативним реалним деловима. Једначине (37) имају партикуларна решења:

$$y_1 = c_1, \dots, y_k = c_k, \quad x_1 = \dots = x_n = 0. \tag{39}$$

Теорема 18. (Љапунов–Малкин⁶) Партикуларно решење $y_1 = \dots = y_k = x_1 = \dots = x_n = 0$ система диференцијалних једначина (37) је стабилно, а свако решење које му је у почетном тренутку било довољно близу ће асимптотски тежити једном од решења (39). При томе ће и решења облика (39) поседовати ове особине, ако су параметри c_i довољно мали.

Доказ: Како корени једначине (38) имају негативне реалне делове, онда на основу Теореме 13 постоји позитивно дефинитна квадратна

⁶Иоэль Гилевич Малкин (1907–1958)

форма $V(x_1, \dots, x_n)$ која задовољава једначину:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} (p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n) = - \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

Заменом:

$$\xi_j = e^{\alpha t} x_j$$

се друга група система диференцијалних једначина (37) трансформише у:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{dt} &= \alpha e^{\alpha t} x_j + e^{\alpha t} \frac{dx_j}{dt} \\ &= \alpha \xi_j + e^{\alpha t} (p_{j1}x_1 + \dots + p_{jn}x_n) \\ &\quad + e^{\alpha t} X_j(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \\ &= p_{j1}\xi_1 + \dots + (p_{jj} + \alpha)\xi_j + \dots + p_{jn}\xi_n \\ &\quad + e^{\alpha t} X_j(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \dots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \dots, y_k). \end{aligned} \tag{40}$$

На основу (40) извод функције $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ по t гласи:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial \xi_j} (p_{j1}\xi_1 + \dots + p_{jn}\xi_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial \xi_j} \alpha \xi_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial \xi_j} e^{\alpha t} X_j(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \dots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \dots, y_k) \\ &= - \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + 2\alpha V \\ &\quad + e^{\alpha t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial \xi_j} X_j(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \dots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \dots, y_k). \end{aligned}$$

У рачуну је коришћена Лема 4. На основу Леме 6 се позитивна константа α може изабрати довољно мала, тако да је форма:

$$- \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + 2\alpha V$$

негативно дефинитна. Како је V квадратна форма, онда је $\frac{\partial V}{\partial \xi_j}$ линеарна форма. Функције X_i су једнаке нули за $x_1 = \dots = x_n = 0$, па када се развију у ред, сваки члан садржи бар неки од $x_1, \dots, x_n$. При развоју у ред функција X_i , израз:

$$e^{\alpha t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial \xi_j} X_j(t, e^{-\alpha t} \xi_1, \dots, e^{-\alpha t} \xi_n, y_1, \dots, y_k)$$

садржи чланове по $\xi_1, \dots, \xi_n$ реда не мањег од два, а укупног реда не мањег од три. Вредност $e^{\alpha t}$ којом се множи сума се поништи са $e^{-\alpha t}$ из развоја функција X_j (сваки члан у развоју садржи неки од $e^{-\alpha t} \xi_j$). Како су функције X_i ограничене по t , онда се независно од t може изабрати околина:

$$|\xi_j| \leq \beta, |y_i| \leq \beta, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, k),$$

у којој ће за неко $P > 0$ важити:

$$\left| e^{\alpha t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial \xi_j} X_j(t, e^{-\alpha t} \xi_1, \dots, e^{-\alpha t} \xi_n, y_1, \dots, y_k) \right| < P(|\xi_1| + \dots + |\xi_n|)^2, \quad (41)$$

јер лева страна неједнакости при развоју у ред нема чланове реда мањег од два по $\xi_1, \dots, \xi_n$, а како је сваки члан у развоју укупног реда не мањег од три, онда P може да буде произвољно мало при довољно малом избору вредности β . Сада се на основу Леме 5 може изабрати довољно мали број β , тако да је $\frac{dV}{dt}$ негативно дефинитна. Нека је изабрано баш такво β . Нека је сада $\xi_j(t)$, $y_i(t)$ решење са почетним условом $\xi_j(0) = \xi_j^0$ и $y_i(0) = y_i^0$, тако да важи:

$$|\xi_j^0| \leq \eta, |y_i^0| \leq \eta, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, k), \quad (42)$$

где је $\eta < \beta$. За ово решење ће неједнакости:

$$|\xi_j(t)| \leq \beta, |y_i(t)| \leq \beta \quad (43)$$

важити када је t довољно близу почетном тренутку $t_0 = 0$. Тада на целом интервалу $(0, t)$ важи $\frac{dV}{dt} < 0$, па ће бити:

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) < V(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0). \quad (44)$$

Како је V позитивно дефинитна форма, из (44) следи да ће на посматраном временском интервалу важити:

$$|\xi_j| < A, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (45)$$

где број A може бити произвољно мали при довољно малој вредности η из (42). Сада је у посматраном временском интервалу:

$$|x_j(t)| < Ae^{-\alpha t}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (46)$$

Тада је:

$$|Y_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_k(t))| < AMe^{-\alpha t}, \quad (47)$$

где је M неки позитиван број, јер функције Y_i узимају вредност нула за $x_1 = \dots = x_n = 0$ и ограничене су по t . Сада важи:

$$|y_i(t)| < |y_i^0| + AM \int_0^t e^{-\alpha \tau} d\tau = |y_i^0| + \frac{AM(1 - e^{-\alpha t})}{\alpha} < |y_i^0| + \frac{AM}{\alpha}. \quad (48)$$

Нека је сада $\varepsilon > 0$ произвољно мали број, тако да важи $\varepsilon < \beta$. Нека је број η у неједнакостима (42) изабран тако да је $A < \varepsilon$ и да је десна страна неједнакости (48) такође мања од ε . Сада из (45) и (48) следи да докле год су задовољене неједнакости (43), да ће бити задовољене и неједнакости:

$$|\xi_j(t)| < \varepsilon, |y_i(t)| < \varepsilon, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, k). \quad (49)$$

Међутим, како је $\varepsilon < \beta$, неједнакости (43) ће заједно са неједнакостима (49) важити у целом временском интервалу. Из (46) следи да је:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = 0,$$

а из (47) следи да постоји лимес:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = y_i^0 + \int_0^\infty Y_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_k(t)) dt.$$

Треба још доказати да за довољно мале $c_1, \dots, c_k$, сва партикуларна решења облика (39) имају исте особине као и решење $x_1 = \dots = x_n = y_1 = \dots = y_k = 0$. При смени променљивих:

$$u_i = y_i - c_i$$

систем једначина (37) постаје:

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dt} &= U_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_k) \\ &\quad + \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n, \\ \frac{dx_j}{dt} &= (p_{j1} + c_{j1})x_1 + \dots + (p_{jn} + c_{jn})x_n \\ &\quad + \bar{X}_j(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_k),\end{aligned}\tag{50}$$

Где су функције U_i и $\bar{X}_j$ истог типа као и Y_i и X_j , а α_{is} и c_{jl} су функције по $t, c_1, \dots, c_k$. Функције α_{is} и c_{jl} су ограничене по t , а аналитичке по $c_1, \dots, c_k$ и постају нула за $c_1 = \dots = c_k = 0$, па ће за довољно мале $|c_i|$, величине α_{is} и c_{jl} бити произвољно мале. Систем једначина (50) се од система једначина (37) разликује у томе што са десне стране има додатне чланове по x_j . У првој групи једначина, то не мења ништа, јер у доказу нигде није коришћено да развој функције Y_i у ред не садржи линеарне чланове. Било је једино битно да Y_i постаје нула за $x_1 = \dots = x_n = 0$. Присуство нових чланова у другој групи једначина неће имати никакав утицај на доказ теореме ако квадратна форма:

$$-\sum_{j=1}^n x_j^2 + 2\alpha V + \sum_{j=1}^d \frac{\partial V}{\partial x_j} (c_{j1}x_1 + \dots + c_{jn}x_n)$$

остаје негативно дефинитна, што је тачно за довољно мале величине $|c_i|$. У том случају је доказ применљив и на систем диференцијалних једначина (50), па важе исти закључци као и за стабилност решења $x_1 = \dots = x_n = y_1 = \dots = y_k = 0$, чиме је теорема доказана. $\square$

Више о Љапуновљевим функцијама и условима стабилности решења може се наћи у [8].

2.5 Раут–Хурвицова теорема

Да би решење $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ система диференцијалних једначина (35) било стабилно, довољно је да сви корени карактеристичне једначине линеаризованог система имају негативне реалне делове.

Раут⁷[9] је први предложио алгоритам којим би се проверило да ли сви корени полинома имају негативне реалне делове, а Хурвиц⁸[6] је коефицијенте полинома ставио у матрицу код које ће сви минори бити позитивни ако и само ако полином има све корене са негативним реалним делом.

Дефиниција 16. Полином:

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (51)$$

са реалним коефицијентима a_i ($i = 1, \dots, n$) се зове Хурвицов ако сви његови корени имају негативне реалне делове.

Нека је $f(z)$ полином степена n . Ако је $f(z)$ Хурвицов, онда сви његови корени леже у области $\Phi = \{z : \operatorname{Re}(z) < 0, |z| < R\}$ за довољно велико R . Нека је $f^*(z)$ полином дефинисан са:

$$f^*(z) = z^n - a_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n = (-1)^n f(-z) \quad (52)$$

и нека је $F_0(z)$ полином степена $n+1$ дефинисан са:

$$F_0(z) = (z + c)f(z),$$

где је c нека позитивна константа. Полином $F_0(z)$ је Хурвицов ако и само ако је $f(z)$ Хурвицов, јер су корени полинома $f(z)$ корени и од $F_0(z)$, а $F_0(z)$ има још и корен $z = -c$. Полином $(n+1)$ -ог степена:

$$F_\mu(z) = (z + c)f(z) + \mu z f^*(z)$$

се променом параметра μ од 0 до 1 мења од полинома $F_0(z)$ до полинома:

$$F_1(z) = (z + c)f(z) + z f^*(z). \quad (53)$$

Ако полином $F_1(z)$ није Хурвицов, а $F_0(z)$ јесте, онда би у неком тренутку корен полинома $F_\mu(z)$ прошао кроз границу области Φ . Ако се изабере довољно велико R , онда за $z = Re^{i\theta}$, вредност:

$$F_\mu(z) = (1 + \mu)R^{n+1}e^{i(n+1)\theta} + \dots$$

⁷Edward John Routh (1831–1907)

⁸Adolf Hurwitz (1859–1919)

не може да буде једнака нули ни за једно $\mu \in [0, 1]$, па једино преостаје да је $F_\mu(z) = 0$ за неко z које је на имагинарној оси, тј. $z = ib$. Ако је α_k корен полинома $f(z)$, а како је $f(z)$ полином са реалним коефицијентима, онда је и $\overline{\alpha_k}$ корен полинома $f(z)$. Тада је $\alpha_k^* = -\overline{\alpha_k}$ корен полинома $f^*(z) = (-1)^n f(-z)$. За z на имагинарној оси ($z = ib$) важи:

$$\left| \frac{f(z)}{f^*(z)} \right| = \frac{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n}{\rho_1^* \rho_2^* \cdots \rho_n^*} = 1,$$

где је:

$$\rho_k = |z - \alpha_k|, \quad \rho_k^* = |z - \alpha_k^*| = |z + \overline{\alpha_k}|,$$

а за $z = ib$ важи $\rho_k = \rho_k^*$. Ако би $F_\mu(z)$ било једнако нули за $z = ib$, онда би било:

$$F_\mu(z) = (z + c)f(z) + \mu z f^*(z) = 0, \quad z = ib,$$

па би важило:

$$\begin{aligned} (z + c)f(z) &= -\mu z f^*(z), \\ |(z + c)f(z)| &= |-\mu z f^*(z)|, \\ |(z + c)||f(z)| &= |\mu z||f^*(z)|, \\ \left| \frac{f(z)}{f^*(z)} \right| &= \frac{|\mu z|}{|z + c|}, \\ 1 &= \frac{\mu |b|}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \end{aligned}$$

што је немогуће, јер је $\mu \in [0, 1]$. Дакле, ни за једно $\mu \in [0, 1]$ корен полинома $F_\mu(z)$ неће бити на граници области Φ , а како су сви корени полинома $F_0(z)$ у тој области, у њој ће бити и корени полинома $F_1(z)$. Ако је полином $f(z)$ Хурвицов, онда је и полином $F_1(z)$ Хурвицов. Да $f(z)$ није био Хурвицов и да је имао корене у десној полуравни, а да није имао чисто имагинарне корене, онда би корене у десној полуравни имао и $F_0(z)$, а аналогним резоновањем се добија да корени полинома $F_\mu(z)$ остају у својој полуравни. У случају да је $f(z)$ имао чисто имагинаран корен, тада би то био корен и функције $f^*(z)$, а онда уједно и функције $F_1(z)$. Овиме је доказано да је $F_1(z)$ Хурвицов ако и само ако је $f(z)$ Хурвицов.

Ако су $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ корени полинома $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, онда важи:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) > 0.$$

Нека је фамилија полинома $G_\mu(z)$ дефинисана са:

$$G_\mu(z) = (z - 2a_1)f(z) - \mu z f^*(z),$$

где се параметар μ мења од 0 до 1. Полином:

$$G_0(z) = (z - 2a_1)f(z)$$

има n корена са негативним реалним делом, као и позитиван корен $z = 2a_1$. Исто као и $F_\mu(z)$, ни $G_\mu(z)$ не може да има корен на имагинарној оси $z = ib$ ни за једно $\mu \in [0, 1]$. Тада је:

$$\begin{aligned} G_\mu(z) &= (z - 2a_1)f(z) - \mu z f^*(z) \\ &= (z - 2a_1)(z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) - \mu z(z^n - a_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n) \\ &= (1 - \mu)z^{n+1} + (-2a_1 + a_1 + \mu a_1)z^n + (-2a_1^2 + a_2 - \mu a_2)z^{n-1} + P_\mu(z) \\ &= (1 - \mu)z^{n+1} - (1 - \mu)a_1 z^n + (a_2(1 - \mu) - 2a_1^2)z^{n-1} + P_\mu(z), \end{aligned}$$

где је $P_\mu(z)$ полином степена $n - 2$ који се непрекидно мења када μ иде од 0 до 1. Тада за довољно велико $r > 0$ у области $|z| > r$ важи:

$$|P_\mu(z)| \leq B_\mu |z|^{n-2}. \quad (54)$$

Ако су вредности B_μ најмање за које важи (54), онда се због непрекидне промене $P_\mu(z)$ по $\mu \in [0, 1]$ и вредности B_μ непрекидно мењају. Нека је $B = \max\{B_\mu : \mu \in [0, 1]\}$. Онда је:

$$|P_\mu(z)| \leq B |z|^{n-2}$$

за свако $\mu \in [0, 1]$. На $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ се нуле полинома $G_\mu(z)$ поклапају са нулама функције $H_\mu(z) = \frac{G_\mu(z)}{z^{n-1}}$, где је:

$$H_\mu(z) = (1 - \mu)z^2 - (1 - \mu)a_1 z + (a_2(1 - \mu) - 2a_1^2) + \frac{P_\mu(z)}{z^{n-1}}. \quad (55)$$

Лема 8. Нека се функција H_μ посматра на реалној оси, $H_\mu = H_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тада за произвољно велико $r_0 > r$ постоји $\mu_0 \in (0, 1)$, тако да за свако $\mu \in (0, 1)$, $\mu > \mu_0$ постоји $x_0 > r_0$ за које је $H_\mu(x_0) < 0$.

Доказ: Из (54) и (55) се добија:

$$H_\mu(x) \leq (1 - \mu)x^2 - (1 - \mu)a_1x + (a_2(1 - \mu) - 2a_1^2) + \frac{B}{|x|}.$$

Нека су сада $\mu'_0 \in (0, 1)$ и $r'_0 > r_0$ такви да за $\mu \in (0, 1)$, $\mu > \mu'_0$ и $|x| > r'_0$ важи $a_2(1 - \mu) < \frac{a_1^2}{2}$ и $\frac{B}{|x|} < \frac{a_1^2}{2}$. Тада је:

$$H_\mu(x) < (1 - \mu)x^2 - (1 - \mu)a_1x - a_1^2.$$

Нека је сада $x_0 > r'_0$ фиксирано. Тада се за:

$$H_\mu(x_0) < (1 - \mu)(x_0^2 - a_1x_0) - a_1^2.$$

може изабрати $\mu_0 \in (0, 1)$, $\mu_0 > \mu'_0$ тако да за $\mu \in (0, 1)$, $\mu > \mu_0$ важи

$$(1 - \mu)(x_0^2 - a_1x_0) - a_1^2 < 0.$$

Онда је и $H_\mu(x_0) < 0$ чиме је лема доказана. $\square$

Како је за $\mu \in (0, 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H_\mu(x) = +\infty,$$

онда на основу претходне леме и непрекидности функције H_μ следи да за свако $r_0 > r$ постоји $\mu_0 \in (0, 1)$ тако да за свако $\mu \in (0, 1)$, $\mu > \mu_0$ постоји $x > r_0$ за које је $H_\mu(x) = 0$. Нека се то x посматра као функција од μ ($x = x(\mu)$). Дакле, за свако $r_0 > r$ постоји $\mu_0 \in (0, 1)$ тако да за свако $\mu \in (0, 1)$, $\mu > \mu_0$ важи $x(\mu) > r_0$. То по дефиницији значи да је:

$$\lim_{\mu \rightarrow 1} x(\mu) = +\infty.$$

Како је $x(\mu)$ корен функције $H_\mu(z)$, а самим тим и $G_\mu(z)$, онда $G_\mu(z)$ има позитиван реалан корен који при $\mu \rightarrow 1$ тежи $+\infty$. На исти начин се доказује да има и негативан реалан корен који при $\mu \rightarrow 1$ тежи $-\infty$.

Полином:

$$G_1(z) = (z - 2a_1)f(z) - zf^*(z) \tag{56}$$

је полином $(n - 1)$ -ог степена, коме су на основу претходног сви корени у левој полуравни (јер је $G_\mu(z)$ имао само један корен у

десној полуравни који тежи бесконачности кад $\mu \rightarrow \infty$), па је $G_1(z)$ Хурвицов.

Нека је сваком полиному $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ додељена матрица димензија $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

где за $m > n$ важи $a_m = 0$. Ова матрица се зове Хурвицова матрица. Нека су главни минори Хурвицове матрице означени са:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Ти минори се зову Хурвицове детерминанте. Одговор на питање када ће сви корени неког полинома имати негативне реалне делове даје Раут-Хурвицова теорема.

Теорема 19. Потребан и довољан услов да сваки корен полинома $f(z)$ има негативан реалан део јесте да важе следеће неједнакости:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (57)$$

Доказ: Из (53), имајући у виду (51) и (52) се добија:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= (z + c)f(z) + zf^*(z) \\ &= (z + c) \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} + z \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i z^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i z^{n+1-i} + \sum_{i=0}^n c a_i z^{n-i} + \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i z^{n+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i (1 + (-1)^i) z^{n+1-i} + \sum_{j=1}^{n+1} c a_{j-1} z^{n+1-j} \\ &= \sum_{r=0}^{n+1} [a_r (1 + (-1)^r) + c a_{r-1}] z^{n+1-r}, \end{aligned}$$

где је $a_0 = 1$, а $a_l = 0$ за $l \notin \{0, 1, \dots, n\}$. Стављајући $c = 2a$ важи:

$$F_1(z) = 2 \sum_{r=0}^{n+1} A_r z^{n+1-r},$$

где су коефицијенти:

$$A_r = \frac{(1 + (-1)^r)}{2} a_r + a a_{r-1}.$$

Изразом (56) се од Хурвицовог полинома степена n добија Хурвицов полином степена $n-1$. Ако се у (56) уместо $f(z)$ стави полином $\frac{1}{2}F_1(z)$, добиће се Хурвицов полином степена n . Нека је то полином $g(z)$. За њега важи:

$$\begin{aligned} g(z) &= (z - 2A_1) \frac{1}{2} F_1(z) - z \frac{1}{2} F_1^*(z) \\ &= (z - 2A_1) \sum_{i=0}^{n+1} A_i z^{n+1-i} - z \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i A_i z^{n+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} A_i z^{n+2-i} - \sum_{i=0}^{n+1} 2A_1 A_i z^{n+1-i} - \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i A_i z^{n+2-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} A_i (1 - (-1)^i) z^{n+2-i} - \sum_{j=1}^{n+2} 2A_1 A_{j-1} z^{n+2-j} \\ &= \sum_{r=0}^{n+2} [A_r (1 - (-1)^r) - 2A_1 A_{r-1}] z^{n+2-r} \\ &= \sum_{k=0}^n b_k z^{n-k}, \end{aligned}$$

где је $b_k = (1 - (-1)^{k+2}) A_{k+2} - 2A_1 A_{k+1} = (1 - (-1)^k) A_{k+2} - 2A_1 A_{k+1}$. Као што је $F_1(z) = (z + c)f(z) + z f^*(z)$ Хурвицов кад је $f(z)$ Хурвицов, онда ће и полином $F_1'(z) = (z + c)g(z) + z g^*(z)$ бити Хурвицов, јер је

$g(z)$ Хурвицов. Коефицијенти полинома $\frac{1}{2}F_1'(z)$ за $c = 2A_1 > 0$ су:

$$\begin{aligned}
A'_k &= \frac{(1 + (-1)^k)}{2} b_k + A_1 b_{k-1} \\
&= \frac{(1 + (-1)^k)}{2} ((1 - (-1)^k) A_{k+2} - 2A_1 A_{k+1}) \\
&\quad + A_1 ((1 - (-1)^{k-1}) A_{k+1} - 2A_1 A_k) \\
&= \frac{(1 + (-1)^k)}{2} (1 - (-1)^k) A_{k+2} - (1 + (-1)^k) A_1 A_{k+1} \\
&\quad + (1 - (-1)^{k-1}) A_1 A_{k+1} - 2A_1^2 A_k \\
&= 0A_{k+2} + (1 - (-1)^{k-1} - 1 - (-1)^k) A_1 A_{k+1} - 2A_1^2 A_k \\
&= -2A_1^2 A_k
\end{aligned}$$

па је $F_1'(z) = -2A_1^2 F_1(z)$. То значи да би се изразом (53) за $f(z) = -\frac{1}{2A_1^2} g(z)$ добио баш полином $F_1(z)$, па за сваки Хурвицов полином $F_1(z)$ степена $n + 1$ постоји Хурвицов полином $f(z)$ степена n , тако да важи (53).

Нека су са Δ_ν означене Хурвицове детерминанте полинома $f(z)$, а са D_ν Хурвицове детерминанте полинома $\frac{1}{2}F_1(z)$ (Посматра се полином $\frac{1}{2}F_1(z)$, јер је он моничан). Тада је:

$$D_\nu = \begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ A_3 & A_2 & A_1 & 1 & \cdots \\ A_5 & A_4 & A_3 & A_2 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ aa_2 & aa_1 + a_2 & a & 1 & \cdots \\ aa_4 & aa_3 + a_4 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Извлачењем фактора a из непарних колона, после чега се од парних колона одузима она која је испред ње, а онда се и из парних колона извлачи фактор a :

$$\begin{aligned}
D_\nu &= a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & aa_1 + a_2 & a & 1 & \cdots \\ a_4 & aa_3 + a_4 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & aa_1 & a & 1 & \cdots \\ a_4 & aa_3 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\
&= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a & 1 & \cdots \\ a_4 & a_3 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \cdots,
\end{aligned}$$

добија се:

$$D_\nu = a^\nu \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} = a^\nu \Delta_{\nu-1}. \quad (58)$$

Потребан и довољан услов да би полином $F_1(z)$ био Хурвицов је да полином $f(z)$ буде Хурвицов. Нека тврђење важи за $i \leq n$. Ако важе неједнакости (57) за D_ν , онда на основу (58) важе и за Δ_ν , па је $f(z)$ Хурвицов, а онда је и $F_1(z)$ Хурвицов. Обрнуто, ако је $F_1(z)$ Хурвицов, онда је и $f(z)$ Хурвицов, па неједнакости (57) важе за Δ_ν , а на основу (58) и за $D_{\nu+1}$ ($\nu = 1, \dots, n$). Како је $D_1 = a > 0$, важиће неједнакости (57) и за D_ν ($\nu = 1, \dots, n+1$). У случају да је полином линеаран или квадрата, непосредно се проверава да важи теорема, а она је овиме, методом математичке индукције доказана. $\square$

Још једна карактеризација Хурвицовог полинома се може наћи у [10]:

Нека је дат полином $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ и нека је полином:

$$q(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m, \quad m = \frac{n(n-1)}{2},$$

такав да су сви његови корени облика:

$$z_i + z_j; \quad i < j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где су z_k , $k = 1, 2, \dots, n$ корени полинома $f(z)$.

Сви корени полинома $f(z)$ са реалним коефицијентима имају негативан реалан део ако и само ако су сви коефицијенти a_j полинома $f(z)$ и b_k полинома $q(z)$ позитивни.

3 Келтски камен

Кретање без клизања конвексног крутог тела са глатком површи по равни је описано у поглављу 1.3 једначинама (8) и (9). Нека су ознаке исте као у поглављу 1.3. Постоји тачка P_0 на површи крутог за коју важи да је вектор $\overrightarrow{GP_0}$ који спаја центар масе тела G и тачку P_0 управан на раван тангентну на површ тела у тачки P_0 . Таква тачка ће, на пример, бити она тачка на површи тела која је најближа центру масе тела. Нека су r_1 и r_2 главни полупречници кривина површи тела у тачки P_0 и нека је $r_1 \neq r_2$. Нека је координатни систем K са базом $[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]$ који је везан за тело постављен тако да му је координатни почетак у G , а да је вектор $\mathbf{E}_3$ колинеаран вектору $\overrightarrow{GP_0}$ и супротног је смера у односу на $\overrightarrow{GP_0}$, а вектори $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ су паралелни главним правцима кривина. Ако је са h означено растојање од G до P_0 , онда се једначина површи у околини тачке P_0 може апроксимирати параболоидом:

$$F(\mathbf{X}) = -h - X_3 + \frac{X_1^2}{2r_1} + \frac{X_2^2}{2r_2} = 0, \quad (59)$$

где је $\mathbf{X} = X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2 + X_3\mathbf{E}_3$ радијус вектор у K . Другачије записано, површ је апроксимирана са:

$$X_3 = -h + \frac{X_1^2}{2r_1} + \frac{X_2^2}{2r_2} \quad (60)$$

у околини тачке P_0 .

Дефиниција 17. Ако се једна од главних оса инерције тела поклапа са осом $G\mathbf{E}_3$ и ако су друге две главне осе инерције заротиране за угао $\delta \neq 0$ у односу на осе $G\mathbf{E}_1$ и $G\mathbf{E}_2$, онда се посматрано тело зове келтски камен.

Ако су $\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3$ јединични вектори главних оса инерције, оператор инерције у бази $[\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3]$ има облик:

$$I_{\mathbf{E}'} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Нека је $\mathbf{E}'_3 = \mathbf{E}_3$ и нека су $\mathbf{E}'_1$ и $\mathbf{E}'_2$ заротирани за угао δ у односу на $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Нека је матрица димензија $n \times 1$ која одговара произвољном вектору $\mathbf{X}$ у бази $[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]$ означена са $\mathbf{X}_{\mathbf{E}}$, а у бази $[\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3]$ означена са $\mathbf{X}_{\mathbf{E}'}$. Тада важи:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{E}} = R\mathbf{X}_{\mathbf{E}'}, \quad (62)$$

где је:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Нека је:

$$I_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

оператор инерције у бази $[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]$. Онда се из $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$ добија:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{E}} &= I_{\mathbf{E}}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{E}}, \\ R\mathbf{M}_{\mathbf{E}'} &= I_{\mathbf{E}}R\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{E}'}, \\ RI_{\mathbf{E}'}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{E}'} &= I_{\mathbf{E}}R\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{E}'}, \end{aligned}$$

па је $I_{\mathbf{E}} = RI_{\mathbf{E}'}R^{-1}$, дакле:

$$I_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

односно:

$$I_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Нека је $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{X})$ јединичан вектор који је нормалан на површ тела у тачки којој одговара вектор положаја $\mathbf{X}$, тако да је $\boldsymbol{\Gamma}$ усмерено ка унутрашњости тела. Тада је:

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{X}) = -\frac{\nabla F(\mathbf{X})}{|\nabla F(\mathbf{X})|}, \quad (65)$$

а имајући у виду (59), важи:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= -\frac{\frac{X_1}{r_1}}{\sqrt{\left(\frac{X_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{r_2}\right)^2 + 1}}, \\ \Gamma_2 &= -\frac{\frac{X_2}{r_2}}{\sqrt{\left(\frac{X_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{r_2}\right)^2 + 1}}, \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{X_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{r_2}\right)^2 + 1}}.\end{aligned}\tag{66}$$

Сада се из (66) и (60) за X_1, X_2, X_3 добија:

$$\begin{aligned}X_1 &= -r_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3}, \\ X_2 &= -r_2 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}, \\ X_3 &= -h + \frac{r_1 \Gamma_1^2 + r_2 \Gamma_2^2}{2\Gamma_3^2}.\end{aligned}\tag{67}$$

Нека је $\mathbf{f}$ сила којом раван делује на тело јединичне масе, гледано из непокретног координатног система $\mathbf{k}$ (видети поглавље 1.3), а $\mathbf{F}$ та иста сила гледано из K . Тада из другог Њутновог закона следи:

$$\mathbf{f} - g\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}},$$

где је $\boldsymbol{\gamma}$ јединичан вектор управан на површ у тачки додира са равни, а $\mathbf{v}$ брзина центра масе гледано из k . Тада је:

$$\mathbf{f} = g\boldsymbol{\gamma} + \dot{\mathbf{v}},$$

а на основу (6) важи:

$$\begin{aligned}B^{-1}\mathbf{f} &= gB^{-1}\boldsymbol{\gamma} + B^{-1}\dot{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{F} &= g\boldsymbol{\Gamma} + \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V},\end{aligned}\tag{68}$$

или када се распише:

$$\begin{aligned}F_1 &= g\Gamma_1 + \dot{V}_1 + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2, \\ F_2 &= g\Gamma_2 + \dot{V}_2 + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3, \\ F_3 &= g\Gamma_3 + \dot{V}_3 + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1.\end{aligned}\tag{69}$$

За вектор $\mathbf{\Gamma}$ важи (9), па је:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_1 &= \Omega_3 \Gamma_2 - \Omega_2 \Gamma_3, \\ \dot{\Gamma}_2 &= \Omega_1 \Gamma_3 - \Omega_3 \Gamma_1, \\ \dot{\Gamma}_3 &= \Omega_2 \Gamma_1 - \Omega_1 \Gamma_2.\end{aligned}\tag{70}$$

Сила $\mathbf{f}$ је сила која делује на тело јединичне масе, па ће сила која делује на тело масе m бити $m\mathbf{f}$. У инерцијалном систему k ће извод кинетичког момента $\mathbf{m}$ по времену бити једнак збиру момената сила, а ако је са $\mathbf{x}$ означен вектор у k који одговара вектору $\mathbf{X}$ у K , важиће:

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{x} \times m\mathbf{f},\tag{71}$$

па ће се при преласку у координатни систем K , имајући у виду (6) и да је $\mathbf{M} = I_E \mathbf{\Omega}$, добити:

$$\begin{aligned}B^{-1}\dot{\mathbf{m}} &= B^{-1}\mathbf{x} \times mB^{-1}\mathbf{f}, \\ \dot{\mathbf{M}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{M} &= \mathbf{X} \times m\mathbf{F}, \\ I_E \dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times I_E \mathbf{\Omega} &= m\mathbf{X} \times \mathbf{F},\end{aligned}\tag{72}$$

а исписивањем по првој координати (имајући у виду да је $I_{13} = I_{23} = I_{31} = I_{32} = 0, I_{12} = I_{21}$ и да је $I_{33} = I_3$) се добије:

$$\begin{aligned}I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 + \Omega_2 I_3 \Omega_3 - \Omega_3(I_{21}\Omega_1 + I_{22}\Omega_2) &= m(X_2 F_3 - X_3 F_2), \\ I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 + (I_3 - I_{22})\Omega_2 \Omega_3 - I_{12}\Omega_1 \Omega_3 &= m(X_2 F_3 - X_3 F_2).\end{aligned}\tag{73}$$

Када се распише по другој координати добије се:

$$\begin{aligned}I_{21}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 - \Omega_1 I_3 \Omega_3 + \Omega_3(I_{11}\Omega_1 + I_{12}\Omega_2) &= m(X_3 F_1 - X_1 F_3), \\ I_{12}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 + (I_{11} - I_3)\Omega_1 \Omega_3 + I_{12}\Omega_2 \Omega_3 &= m(X_3 F_1 - X_1 F_3).\end{aligned}\tag{74}$$

По трећој координати је:

$$\begin{aligned}I_3\dot{\Omega}_3 + \Omega_1(I_{21}\Omega_1 + I_{22}\Omega_2) - \Omega_2(I_{11}\Omega_1 + I_{12}\Omega_2) &= m(X_1 F_2 - X_2 F_1), \\ I_3\dot{\Omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\Omega_1 \Omega_2 + I_{12}\Omega_1^2 - I_{12}\Omega_2^2 &= m(X_1 F_2 - X_2 F_1).\end{aligned}\tag{75}$$

Треба имати у виду да се једначина (8) не примењује овде, јер се у једначини (8) кинетички момент посматра у односу на тачку

додира тела и равни, а овде је $\mathbf{M}$ кинетички момент у односу на центар масе. Једначине (73), (74) и (75) записане заједно гласе:

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 + (I_3 - I_{22})\Omega_2\Omega_3 - I_{12}\Omega_1\Omega_3 &= m(X_2F_3 - X_3F_2), \\ I_{12}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 + (I_{11} - I_3)\Omega_1\Omega_3 + I_{12}\Omega_2\Omega_3 &= m(X_3F_1 - X_1F_3), \\ I_3\dot{\Omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\Omega_1\Omega_2 + I_{12}\Omega_1^2 - I_{12}\Omega_2^2 &= m(X_1F_2 - X_2F_1). \end{aligned} \quad (76)$$

Како је брзина тачке која је у додиру са равни једнака нули, из једначине (5) следи да је:

$$\mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{X} = \mathbf{0},$$

односно:

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} \times \mathbf{\Omega},$$

или у координатама:

$$\begin{aligned} V_1 &= \Omega_3 X_2 - \Omega_2 X_3, \\ V_2 &= \Omega_1 X_3 - \Omega_3 X_1, \\ V_3 &= \Omega_2 X_1 - \Omega_1 X_2. \end{aligned} \quad (77)$$

Заменом (77) у (69), па изражавањем F_1, F_2, F_3 из (69) и убацивањем тих израза у (76), као и убацивањем вредности за X_1, X_2, X_3 из (67) у (76) добија се систем од шест диференцијалних једначина (70) и (76) по променљивама $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. Он дозвољава партикуларно решење $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \Gamma_3 = 1, \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \Omega_3 = \omega$, при чему је:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 0, F_3 = g, \\ X_1 &= X_2 = 0, X_3 = -h, \\ V_1 &= V_2 = V_3 = 0. \end{aligned}$$

Стабилност ове стационарне ротације се може испитати увођењем смена:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \Omega_3 - \omega, \\ \Theta_2 &= \Gamma_3 - 1, \end{aligned}$$

док преостале променљиве задржавају своје називе. Једначине (70) и (76) тада имају облик (видети додатак):

$$\begin{aligned}
\xi_1 \dot{\Omega}_1 + I_{12} \dot{\Omega}_2 &= I_{12} \omega \Omega_1 + \alpha_1 \omega \Omega_2 + \delta_1 \Gamma_2 + R_1, \\
I_{12} \dot{\Omega}_1 + \xi_2 \dot{\Omega}_2 &= -\alpha_2 \omega \Omega_1 - I_{12} \omega \Omega_2 - \delta_2 \Gamma_1 + R_2, \\
\dot{\Gamma}_1 &= -\Omega_2 + \omega \Gamma_2 + R_3, \\
\dot{\Gamma}_2 &= \Omega_1 - \omega \Gamma_1 + R_4, \\
\dot{\Theta}_1 &= R_5, \\
\dot{\Theta}_2 &= R_6,
\end{aligned} \tag{78}$$

где је:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= I_{11} + mh^2, \\
\xi_2 &= I_{22} + mh^2, \\
\alpha_1 &= I_{22} - I_{12} + mh^2 - mhr_1, \\
\alpha_2 &= I_{11} - I_{12} + mh^2 - mhr_2, \\
\delta_1 &= m(g(h - r_2) + \omega^2 h(r_1 - r_2)), \\
\delta_2 &= m(g(h - r_1) + \omega^2 h(r_2 - r_1)),
\end{aligned} \tag{79}$$

а величине R_i су величине другог реда по $\Omega_1, \Omega_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Theta_1, \Theta_2$ и постају нула за $\Omega_1 = \Omega_2 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. Решење ће, на основу теореме Љапунов–Малкина, бити стабилно када карактеристична једначина линеаризованог система:

$$A \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Gamma}_1 \\ \dot{\Gamma}_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \tag{80}$$

има све корене са негативним реалним делом. Матрице A и B су:

$$A = \begin{bmatrix} \xi_1 & I_{12} & 0 & 0 \\ I_{12} & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I_{12}\omega & \alpha_1\omega & 0 & \delta_1 \\ -\alpha_2\omega & -I_{12}\omega & -\delta_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix}. \tag{81}$$

То значи да решења једначине $\det(A^{-1}B - \lambda E) = 0$ треба да имају негативне реалне делове. Матрица A^{-1} постоји, јер је $\det(A) =$

$\xi_1 \xi_2 - I_{12}^2 \neq 0$, што се директно проверава из (79) и (64). Међутим, $\det(A^{-1}B - \lambda E) = \det(A^{-1}(B - \lambda A)) = \det(A^{-1})\det(B - \lambda A)$. Како је $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \neq 0$, онда су корени карактеристичне једначине система (80) решења једначине:

$$\det(B - \lambda A) = \det \begin{bmatrix} I_{12}\omega - \lambda\xi_1 & \alpha_1\omega - \lambda I_{12} & 0 & \delta_1 \\ -\alpha_2\omega - \lambda I_{12} & -I_{12}\omega - \lambda\xi_2 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & \omega \\ 1 & 0 & -\omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (82)$$

Полином $\det(B - \lambda A) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$ је полином четвртог степена, за чије се коефицијенте после замене вредности из (79) и (64) добија:

$$a_0 = (I_1 + mh^2)(I_2 + mh^2) > 0,$$

$$a_1 = [(I_2 - I_1)mh(r_1 - r_2) \sin \delta \cos \delta] \omega,$$

$$\begin{aligned} a_2 = & \{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)\} \omega^2 \\ & + \{mh[(I_3 - I_1 \sin^2 \delta - I_2 \cos^2 \delta)(r_1 - h)]\} \omega^2 \\ & + \{mh[(I_3 - I_1 \cos^2 \delta - I_2 \sin^2 \delta)(r_2 - h)]\} \omega^2 \\ & + \{m^2 h^2 (r_1 - h)(r_2 - h) + (I_1 + mh^2)(I_2 + mh^2)\} \omega^2 \\ & + mg[(I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta + mh^2)(r_2 - h)] \\ & + mg[(I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta + mh^2)(r_1 - h)], \end{aligned}$$

$$a_3 = [(I_2 - I_1)mh(r_1 - r_2) \sin \delta \cos \delta] \omega^3,$$

$$\begin{aligned} a_4 = & \{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)\} \omega^4 \\ & + \{mh[(I_3 - I_1 \sin^2 \delta - I_2 \cos^2 \delta)(r_1 - h)]\} \omega^4 \\ & + \{mh[(I_3 - I_1 \cos^2 \delta - I_2 \sin^2 \delta)(r_2 - h)]\} \omega^4 \\ & + \{m^2 h^2 (r_1 - h)(r_2 - h)\} \omega^4 \\ & + mg[(I_3 - I_1 \sin^2 \delta - I_2 \cos^2 \delta)(r_1 - h)] \omega^2 \\ & + mg[(I_3 - I_1 \cos^2 \delta - I_2 \sin^2 \delta)(r_2 - h)] \omega^2 \\ & + [2m^2 gh(r_1 - h)(r_2 - h)] \omega^2 \\ & + m^2 g^2 (r_1 - h)(r_2 - h). \end{aligned}$$

Како је $a_0 > 0$, онда су минори Хурвицове матрице:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1}{a_0} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_3}{a_0} & \frac{a_2}{a_0} & \frac{a_1}{a_0} & 1 \\ 0 & \frac{a_4}{a_0} & \frac{a_3}{a_0} & \frac{a_2}{a_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_4}{a_0} \end{bmatrix}$$

и минори матрице:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \quad (83)$$

истог знака. Нека су $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ минори матрице (83). Тада је:

$$\Delta_1 = a_1 = [(I_2 - I_1)mh(r_1 - r_2) \sin \delta \cos \delta] \omega,$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = a_1 a_2 - a_0 \omega^2 a_1 = a_1 (a_2 - a_0 \omega^2),$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2 = a_1(a_2 \omega^2 a_1 - a_1 a_4) - a_0 \omega^4 a_1^2 \\ &= a_1^2 \{a_2 \omega^2 - a_4 - a_0 \omega^4\} \\ &= a_1^2 \{[mg(I_1 + I_2 - I_3 + mh^2)(r_1 + r_2 - 2h) - 2m^2 gh(r_1 - h)(r_2 - h)] \omega^2 \\ &\quad - m^2 g^2 (r_1 - h)(r_2 - h)\}, \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3.$$

У случају да је:

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad I_1 < I_2 < I_3, \quad r_1 > r_2 > h,$$

услови:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \quad (84)$$

се свODE на:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \quad (85)$$

јер је онда $a_4 > 0$ и $a_2 - a_0 \omega^2 > 0$, па ако је задовољено (85), биће задовољено и (84). Када се Δ_3 подели са $a_1^2 mgh$, услов $\Delta_3 > 0$ има облик:

$$J\omega^2 - mgh \left(\frac{r_1}{h} - 1 \right) \left(\frac{r_2}{h} - 1 \right) > 0, \quad (86)$$

где је:

$$J = (I_1 + I_2 - I_3) \left(\frac{r_1}{h} + \frac{r_2}{h} - 2 \right) - m[4h^2 - 3h(r_1 + r_2) + 2r_1r_2].$$

Како је услов $\Delta_1 > 0$ задовољен за $\omega > 0$, онда треба још да важи:

$$J\omega^2 > mgh \left(\frac{r_1}{h} - 1 \right) \left(\frac{r_2}{h} - 1 \right). \quad (87)$$

Ако је $J \leq 0$, онда овај услов не може да буде задовољен, па не постоји стабилна ротација. Ако је $J > 0$, онда ће постојати стабилна ротација у једном смеру, али угаона брзина мора да буде већа од критичне угаоне брзине ω_* :

$$\omega_*^2 = mg \frac{(r_1 - h)(r_2 - h)}{Jh}. \quad (88)$$

У том случају ће, на основу теореме Љапунов–Малкина, кретање асимптотски тежити некој ротацији са угаоном брзином ω' , где се вредност ω' може наћи из закона одржања енергије имајући у виду да ће енергија система при таквој ротацији бити:

$$E = T + U = \frac{1}{2} I_3 \omega'^2 + mgh.$$

Са T и U су означене кинетичка и потенцијална енергија, редом.

Може се закључити да неће постојати стабилна стационарна ротација келтског камена код кога је $J \leq 0$. Стабилност стационарне ротације келтског камена код кога је $J > 0$ зависи и од смера и од интензитета угаоне брзине: у једном смеру је увек нестабилна, а у другом смеру је стабилна само ако је угаона брзина ω већа од критичне угаоне брзине ω_* . Вредности J и ω_* су одређене геометријом келтског камена и расподелом масе у њему.

4 Додатак

Да би се добио систем диференцијалних једначина (78), потребно је системе диференцијалних једначина (70) и (76) изразити преко $\Omega_1, \Omega_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Theta_1, \Theta_2$, где је $\Theta_1 = \Omega_3 - \omega$, $\Theta_2 = \Gamma_3 - 1$. У том циљу, нека су са O^n означене величине реда не мањег од n по променљивама $\Omega_1, \Omega_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Theta_1, \Theta_2$ у околини тачке $\Omega_1 = \Omega_2 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Theta_1 = \Theta_2 = 0$. Тада једнакости (67) имају облик:

$$\begin{aligned} X_1 &= -r_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3} = -r_1 \frac{\Gamma_1}{1 + \Theta_2} = -r_1 \Gamma_1 + r_1 \frac{\Gamma_1 \Theta_2}{1 + \Theta_2} = -r_1 \Gamma_1 + O^2, \\ X_2 &= -r_2 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} = -r_2 \frac{\Gamma_2}{1 + \Theta_2} = -r_2 \Gamma_2 + r_2 \frac{\Gamma_2 \Theta_2}{1 + \Theta_2} = -r_2 \Gamma_2 + O^2, \\ X_3 &= -h + \frac{r_1 \Gamma_1^2 + r_2 \Gamma_2^2}{2\Gamma_3^2} = -h + O^2. \end{aligned} \quad (89)$$

Из (77) се добија:

$$\begin{aligned} V_1 &= \Omega_3 X_2 - \Omega_2 X_3 = (\omega + \Theta_1)(-r_2 \Gamma_2 + O^2) - \Omega_2(-h + O^2) \\ &= -r_2 \omega \Gamma_2 - r_2 \Theta_1 \Gamma_2 + O^2 + h \Omega_2 + O^3 = h \Omega_2 - r_2 \omega \Gamma_2 + O^2, \\ V_2 &= \Omega_1 X_3 - \Omega_3 X_1 = \Omega_1(-h + O^2) - (\omega + \Theta_1)(-r_1 \Gamma_1 + O^2) \\ &= -h \Omega_1 + O^3 + r_1 \omega \Gamma_1 + r_1 \Theta_1 \Gamma_1 + O^2 = r_1 \omega \Gamma_1 - h \Omega_1 + O^2, \\ V_3 &= \Omega_2 X_1 - \Omega_1 X_2 = \Omega_2(-r_1 \Gamma_1 + O^2) - \Omega_1(-r_2 \Gamma_2 + O^2) \\ &= -r_1 \Omega_2 \Gamma_1 + O^3 - r_2 \Omega_1 \Gamma_2 + O^3 = O^2. \end{aligned} \quad (90)$$

Једначине (70) постају:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_1 &= \Omega_3 \Gamma_2 - \Omega_2 \Gamma_3 = (\omega + \Theta_1) \Gamma_2 - \Omega_2(1 + \Theta_2) \\ &= \omega \Gamma_2 + \Theta_1 \Gamma_2 - \Omega_2 - \Omega_2 \Theta_2 = \omega \Gamma_2 - \Omega_2 + O^2, \\ \dot{\Gamma}_2 &= \Omega_1 \Gamma_3 - \Omega_3 \Gamma_1 = \Omega_1(1 + \Theta_2) - (\omega + \Theta_1) \Gamma_1 \\ &= \Omega_1 + \Omega_1 \Theta_2 - \omega \Gamma_1 + \Theta_1 \Gamma_1 = \Omega_1 - \omega \Gamma_1 + O^2, \\ \dot{\Theta}_2 &= \dot{\Gamma}_3 = \Omega_2 \Gamma_1 - \Omega_1 \Gamma_2 = O^2. \end{aligned} \quad (91)$$

Овиме су добијене трећа, четврта и шеста једначина из (78). Треба имати у виду да свака од величина O^2 постаје нула за $\Omega_1 = \Omega_2 =$

$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, независно од вредности Θ_1 и Θ_2 . Сада је из (67) и (91):

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= -r_1 \frac{\dot{\Gamma}_1 \Gamma_3 - \Gamma_1 \dot{\Gamma}_3}{\Gamma_3^2} = -r_1 \frac{(\omega \Gamma_2 - \Omega_2 + O^2)(1 + \Theta_2) - \Gamma_1 O^2}{(1 + \Theta_2)^2} \\
&= -r_1 \frac{\omega \Gamma_2 + \omega \Gamma_2 \Theta_2 - \Omega_2 - \Omega_2 \Theta_2 + O^2 - O^3}{1 + 2\Theta_2 + \Theta_2^2} \\
&= -r_1 \frac{\omega \Gamma_2 - \Omega_2 + O^2}{1 + 2\Theta_2 + \Theta_2^2} = -r_1 \frac{\omega \Gamma_2 - \Omega_2}{1 + 2\Theta_2 + \Theta_2^2} + O^2 \\
&= -r_1(\omega \Gamma_2 - \Omega_2) + r_1 \frac{(\omega \Gamma_2 - \Omega_2)(2\Theta_2 + \Theta_2^2)}{1 + 2\Theta_2 + \Theta_2^2} + O^2 \\
&= r_1 \Omega_2 - r_1 \omega \Gamma_2 + O^2, \\
\dot{X}_2 &= -r_2 \frac{\dot{\Gamma}_2 \Gamma_3 - \Gamma_2 \dot{\Gamma}_3}{\Gamma_3^2} = -r_2 \frac{(\Omega_1 - \omega \Gamma_1 + O^2)(1 + \Theta_2) - \Gamma_2 O^2}{(1 + \Theta_2)^2} \\
&= -r_2 \frac{\Omega_1 - \omega \Gamma_1 + \Omega_1 \Theta_2 - \omega \Gamma_1 \Theta_2 + O^2 - O^3}{1 + 2\Theta_2 + \Theta_2^2} \\
&= -r_2 \frac{\Omega_1 - \omega \Gamma_1 + O^2}{1 + 2\Theta_2 + \Theta_2^2} = -r_2 \frac{\Omega_1 - \omega \Gamma_1}{1 + 2\Theta_2 + \Theta_2^2} + O^2 \\
&= -r_2(\Omega_1 - \omega \Gamma_1) + r_2 \frac{(\Omega_1 - \omega \Gamma_1)(2\Theta_2 + \Theta_2^2)}{1 + 2\Theta_2 + \Theta_2^2} + O^2 \\
&= r_2 \omega \Gamma_1 - r_2 \Omega_1 + O^2, \\
\dot{X}_3 &= \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt}(r_1 \Gamma_1^2 + r_2 \Gamma_2^2) \Gamma_3^2 - (r_1 \Gamma_1^2 + r_2 \Gamma_2^2) \frac{d}{dt}(\Gamma_3^2)}{\Gamma_3^4} \\
&= \frac{1}{2} \frac{2(r_1 \Gamma_1 \dot{\Gamma}_1 + r_2 \Gamma_2 \dot{\Gamma}_2) \Gamma_3^2 - 2(r_1 \Gamma_1^2 + r_2 \Gamma_2^2) \Gamma_3 \dot{\Gamma}_3}{\Gamma_3^4} \\
&= \frac{(r_1 \Gamma_1(\omega \Gamma_2 - \Omega_2 + O^2) + r_2 \Gamma_2(\Omega_1 - \omega \Gamma_1 + O^2))(1 + \Theta_2)^2}{(1 + \Theta_2)^4} \\
&\quad - \frac{(r_1 \Gamma_1^2 + r_2 \Gamma_2^2)(1 + \Theta_2) O^2}{(1 + \Theta_2)^4} \\
&= \frac{(r_1 \omega \Gamma_1 \Gamma_2 - r_1 \Gamma_1 \Omega_2 + O^3 + r_2 \Gamma_2 \Omega_1 - r_2 \omega \Gamma_2 \Gamma_1 + O^3)(1 + \Theta_2)^2}{(1 + \Theta_2)^4} - O^4 \\
&= \frac{O^2(1 + \Theta_2)^2}{(1 + \Theta_2)^4} - O^4 = O^2 - O^4 = O^2.
\end{aligned} \tag{92}$$

На основу (77) и претходног (имајући у виду да је због (75) $\dot{\Theta}_1 = \dot{\Omega}_3 = O^1$, јер је на основу (89) $X_1 = O^1, X_2 = O^1$) је:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \dot{\Omega}_3 X_2 + \Omega_3 \dot{X}_2 - \dot{\Omega}_2 X_3 - \Omega_2 \dot{X}_3 \\
&= \dot{\Theta}_1(-r_2 \Gamma_2 + O^2) + (\omega + \Theta_1)(r_2 \omega \Gamma_1 - r_2 \Omega_1 + O^2) \\
&\quad - \dot{\Omega}_2(-h + O^2) - \Omega_2 O^2 \\
&= -r_2 \dot{\Theta}_1 \Gamma_2 + O^2 + r_2 \omega^2 \Gamma_1 - r_2 \omega \Omega_1 + r_2 \omega \Theta_1 \Gamma_1 - r_2 \Theta_1 \Omega_1 + O^2 \\
&\quad + h \dot{\Omega}_2 - O^2 - O^3 \\
&= O^2 + O^2 + r_2 \omega^2 \Gamma_1 - r_2 \omega \Omega_1 + O^2 - O^2 + O^2 + h \dot{\Omega}_2 - O^2 - O^3 \\
&= r_2 \omega^2 \Gamma_1 - r_2 \omega \Omega_1 + h \dot{\Omega}_2 + O^2, \\
\dot{V}_2 &= \dot{\Omega}_1 X_3 + \Omega_1 \dot{X}_3 - \dot{\Omega}_3 X_1 - \Omega_3 \dot{X}_1 \\
&= \dot{\Omega}_1(-h + O^2) + \Omega_1 O^2 - \dot{\Theta}_1(-r_1 \Gamma_1 + O^2) \\
&\quad - (\omega + \Theta_1)(r_1 \Omega_2 - r_1 \omega \Gamma_2 + O^2) \\
&= -h \dot{\Omega}_1 + O^2 + O^3 + r_1 \dot{\Theta}_1 \Gamma_1 - O^2 \\
&\quad - r_1 \omega \Omega_2 + r_1 \omega^2 \Gamma_2 - r_1 \Theta_1 \Omega_2 + r_1 \Theta_1 \omega \Gamma_2 + O^2 \\
&= -h \dot{\Omega}_1 + O^2 + O^3 + O^2 - O^2 - r_1 \omega \Omega_2 + r_1 \omega^2 \Gamma_2 - O^2 + O^2 + O^2 \\
&= r_1 \omega^2 \Gamma_2 - r_1 \omega \Omega_2 - h \dot{\Omega}_1 + O^2, \\
\dot{V}_3 &= \dot{\Omega}_2 X_1 + \Omega_2 \dot{X}_1 - \dot{\Omega}_1 X_2 - \Omega_1 \dot{X}_2 \\
&= \dot{\Omega}_2(-r_1 \Gamma_1 + O^2) + \Omega_2(r_2 \omega \Gamma_1 - r_2 \Omega_1 + O^2) \\
&\quad - \dot{\Omega}_1(-r_2 \Gamma_2 + O^2) - \Omega_1(r_2 \omega \Gamma_1 - r_2 \Omega_1 + O^2) \\
&= -r_1 \Gamma_1 \dot{\Omega}_2 + O^2 + r_2 \omega \Gamma_1 \Omega_2 - r_2 \Omega_1 \Omega_2 + O^3 \\
&\quad + r_2 \Gamma_2 \dot{\Omega}_1 - O^2 - r_2 \omega \Gamma_1 \Omega_1 + r_2 \Omega_1^2 + O^3 \\
&= -r_1 \Gamma_1 \dot{\Omega}_2 + O^2 + O^2 - O^2 + O^3 + r_2 \Gamma_2 \dot{\Omega}_1 - O^2 - O^2 + O^2 + O^3 \\
&= r_2 \Gamma_2 \dot{\Omega}_1 - r_1 \Gamma_1 \dot{\Omega}_2 + O^2.
\end{aligned} \tag{93}$$

Сада (69) има облик:

$$\begin{aligned}
F_1 &= g\Gamma_1 + \dot{V}_1 + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 \\
&= g\Gamma_1 + r_2\omega^2\Gamma_1 - r_2\omega\Omega_1 + h\dot{\Omega}_2 + O^2 + \Omega_2 O^2 \\
&\quad - (\omega + \Theta_1)(r_1\omega\Gamma_1 - h\Omega_1 + O^2) \\
&= g\Gamma_1 + r_2\omega^2\Gamma_1 - r_2\omega\Omega_1 + h\dot{\Omega}_2 + O^2 + \Omega_2 O^2 \\
&\quad - r_1\omega^2\Gamma_1 + h\omega\Omega_1 - r_1\omega\Gamma_1\Theta_1 + h\Omega_1\Theta_1 + O^2 \\
&= g\Gamma_1 + r_2\omega^2\Gamma_1 - r_2\omega\Omega_1 + h\dot{\Omega}_2 + O^2 + \Omega_2 O^2 \\
&\quad - r_1\omega^2\Gamma_1 + h\omega\Omega_1 - O^2 + O^2 + O^2 \\
&= (g + r_2\omega^2 - r_1\omega^2)\Gamma_1 + (h\omega - r_2\omega)\Omega_1 + h\dot{\Omega}_2 + O^2, \\
F_2 &= g\Gamma_2 + \dot{V}_2 + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 \\
&= g\Gamma_2 + r_1\omega^2\Gamma_2 - r_1\omega\Omega_2 - h\dot{\Omega}_1 + O^2 \\
&\quad + (\omega + \Theta_1)(h\Omega_2 - r_2\omega\Gamma_2 + O^2) - \Omega_1 O^2 \\
&= g\Gamma_2 + r_1\omega^2\Gamma_2 - r_1\omega\Omega_2 - h\dot{\Omega}_1 + O^2 \\
&\quad + h\omega\Omega_2 - r_2\omega^2\Gamma_2 + h\Theta_1\Omega_2 - r_2\omega\Theta_1\Gamma_2 + O^2 - O^3 \\
&= g\Gamma_2 + r_1\omega^2\Gamma_2 - r_1\omega\Omega_2 - h\dot{\Omega}_1 + O^2 \\
&\quad + h\omega\Omega_2 - r_2\omega^2\Gamma_2 + O^2 - O^2 + O^2 - O^3 \\
&= (g + r_1\omega^2 - r_2\omega^2)\Gamma_2 + (h\omega - r_1\omega)\Omega_2 - h\dot{\Omega}_1 + O^2, \\
F_3 &= g\Gamma_3 + \dot{V}_3 + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 \\
&= g(1 + \Theta_2) + r_2\Gamma_2\dot{\Omega}_1 - r_1\Gamma_1\dot{\Omega}_2 + O^2 + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 \\
&= g + g\Theta_2 + O^1 = g + O^1.
\end{aligned} \tag{94}$$

Од свих величина O^n у претходним изразима, једино O^1 из $F_3 = g + O^1$ не мора да буде једнак нули за $\Omega_1 = \Omega_2 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ (то ће бити у случају да је $\Theta_2 \neq 0$). Међутим, у ономе што следи, множиће се неким од $\Omega_1, \Omega_2, \Gamma_1, \Gamma_2$, тако да ће добијена величина O^2 бити једнака нули за $\Omega_1 = \Omega_2 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. До сада добијени

изрази гласе:

$$\begin{aligned}
X_1 &= -r_1\Gamma_1 + O^2, \\
X_2 &= -r_2\Gamma_2 + O^2, \\
X_3 &= -h + O^2, \\
V_1 &= h\Omega_2 - r_2\omega\Gamma_2 + O^2, \\
V_2 &= r_1\omega\Gamma_1 - h\Omega_1 + O^2, \\
V_3 &= O^2, \\
F_1 &= (g + r_2\omega^2 - r_1\omega^2)\Gamma_1 + (h\omega - r_2\omega)\Omega_1 + h\dot{\Omega}_2 + O^2, \\
F_2 &= (g + r_1\omega^2 - r_2\omega^2)\Gamma_2 + (h\omega - r_1\omega)\Omega_2 - h\dot{\Omega}_1 + O^2, \\
F_3 &= g + O^1, \\
\dot{\Gamma}_1 &= \omega\Gamma_2 - \Omega_2 + O^2, \\
\dot{\Gamma}_2 &= \Omega_1 - \omega\Gamma_1 + O^2, \\
\dot{\Theta}_2 &= O^2, \\
\dot{X}_1 &= r_1\Omega_2 - r_1\omega\Gamma_2 + O^2, \\
\dot{X}_2 &= r_2\omega\Gamma_1 - r_2\Omega_1 + O^2, \\
\dot{X}_3 &= O^2, \\
\dot{V}_1 &= r_2\omega^2\Gamma_1 - r_2\omega\Omega_1 + h\dot{\Omega}_2 + O^2, \\
\dot{V}_2 &= r_1\omega^2\Gamma_2 - r_1\omega\Omega_2 - h\dot{\Omega}_1 + O^2, \\
\dot{V}_3 &= r_2\Gamma_2\dot{\Omega}_1 - r_1\Gamma_1\dot{\Omega}_2 + O^2.
\end{aligned} \tag{95}$$

Сада (73) има облик:

$$\begin{aligned}
& I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 + (I_3 - I_{22})\Omega_2\Omega_3 - I_{12}\Omega_1\Omega_3 = m(X_2F_3 - X_3F_2), \\
& I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 + (I_3 - I_{22})\Omega_2(\omega + \Theta_1) - I_{12}\Omega_1(\omega + \Theta_1) \\
& = m((-r_2\Gamma_2 + O^2)(g + O^1) \\
& \quad - (-h + O^2)((g + r_1\omega^2 - r_2\omega^2)\Gamma_2 + (h\omega - r_1\omega)\Omega_2 - h\dot{\Omega}_1 + O^2)), \\
& I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 + (I_3 - I_{22})\omega\Omega_2 + O^2 - I_{12}\omega\Omega_1 - O^2 \\
& = m(-r_2g\Gamma_2 + gO^2 + O^2 + hg\Gamma_2 + hr_1\omega^2\Gamma_2 - hr_2\omega^2\Gamma_2 \\
& \quad + h^2\omega\Omega_2 - hr_1\omega\Omega_2 - h^2\dot{\Omega}_1 + hO^2 - O^2) - O^2, \tag{96} \\
& I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 + (I_3 - I_{22})\omega\Omega_2 - I_{12}\omega\Omega_1 + O^2 \\
& = -mh^2\dot{\Omega}_1 + m(h^2\omega - hr_1\omega)\Omega_2 \\
& \quad + m(hg - r_2g + hr_1\omega^2 - hr_2\omega^2)\Gamma_2 + O^2, \\
& (I_{11} + mh^2)\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 \\
& = I_{12}\omega\Omega_1 + ((I_{22} - I_3)\omega + m(h^2\omega - hr_1\omega))\Omega_2 \\
& \quad + m(hg - r_2g + hr_1\omega^2 - hr_2\omega^2)\Gamma_2 + O^2,
\end{aligned}$$

што представља прву једначину у (78).

Слично, једначина (74) има облик:

$$\begin{aligned}
I_{12}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 + (I_{11} - I_3)\Omega_1\Omega_3 + I_{12}\Omega_2\Omega_3 &= m(X_3F_1 - X_1F_3), \\
I_{12}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 + (I_{11} - I_3)\Omega_1(\omega + \Theta_1) + I_{12}\Omega_2(\omega + \Theta_1) \\
&= m((-h + O^2)((g + r_2\omega^2 - r_1\omega^2)\Gamma_1 + (h\omega - r_2\omega)\Omega_1 + h\dot{\Omega}_2 + O^2) \\
&\quad - (-r_1\Gamma_1 + O^2)(g + O^1)), \\
I_{12}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 + (I_{11} - I_3)\omega\Omega_1 + O^2 + I_{12}\omega\Omega_2 + O^2 \\
&= m((-hg\Gamma_1 - hr_2\omega^2\Gamma_1 + hr_1\omega^2\Gamma_1 - h^2\omega\Omega_1 + hr_2\omega\Omega_1 - h^2\dot{\Omega}_2 + O^2) \\
&\quad + gr_1\Gamma_1 - gO^2 - O^2), \tag{97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 + (I_{11} - I_3)\omega\Omega_1 + I_{12}\omega\Omega_2 + O^2 \\
&= -mh^2\dot{\Omega}_2 + m(hr_2\omega - h^2\omega)\Omega_1 \\
&\quad + m(hr_1\omega^2 - hr_2\omega^2 - hg + gr_1)\Gamma_1 + O^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12}\dot{\Omega}_1 + (I_{22} + mh^2)\dot{\Omega}_2 \\
&= ((I_3 - I_{11})\omega + m(hr_2\omega - h^2\omega))\Omega_1 - I_{12}\omega\Omega_2 \\
&\quad + m(hr_1\omega^2 - hr_2\omega^2 - hg + gr_1)\Gamma_1 + O^2,
\end{aligned}$$

а то је друга једначина у (78). Из (95) се могу F_1 и F_2 изразити:

$$\begin{aligned}
F_1 &= h\dot{\Omega}_2 + O^1, \\
F_2 &= -h\dot{\Omega}_1 + O^1.
\end{aligned}$$

Такође, из (95) је:

$$\begin{aligned}
X_1 &= O^1, \\
X_2 &= O^1, \\
X_3 &= -h + O^2,
\end{aligned}$$

где величине O^1 и O^2 из претходних израза постају нула за $\Omega_1 = \Omega_2 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. Тада прве две једначине у (76) имају облик:

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 + O^2 &= m(O^1F_3 - (-h + O^2)(-h\dot{\Omega}_1 + O^1)), \\
I_{12}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 + O^2 &= m((-h + O^2)(h\dot{\Omega}_2 + O^1) - O^1F_3),
\end{aligned}$$

тј:

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 &= -mh^2\dot{\Omega}_1 + O^1, \\ I_{12}\dot{\Omega}_1 + I_{22}\dot{\Omega}_2 &= -mh^2\dot{\Omega}_2 + O^1, \end{aligned}$$

или:

$$\begin{aligned} (I_{11} + mh^2)\dot{\Omega}_1 + I_{12}\dot{\Omega}_2 &= O^1, \\ I_{12}\dot{\Omega}_1 + (I_{22} + mh^2)\dot{\Omega}_2 &= O^1, \end{aligned}$$

па ће бити и $\dot{\Omega}_1 = O^1$ и $\dot{\Omega}_2 = O^1$ кад је:

$$\det \begin{bmatrix} I_{11} + mh^2 & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} + mh^2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

То увек важи, јер је:

$$\det \begin{bmatrix} I_{11} + mh^2 & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} + mh^2 \end{bmatrix} > \det \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{bmatrix} = I_1 I_2,$$

што се директно рачуна из (64). То значи да је $\dot{\Omega}_1 = O^1$ и $\dot{\Omega}_2 = O^1$, па је:

$$\begin{aligned} F_1 &= h\dot{\Omega}_2 + O^1 = O^1, \\ F_2 &= -h\dot{\Omega}_1 + O^1 = O^1. \end{aligned}$$

Сада једначина (75) има облик:

$$\begin{aligned} I_3\dot{\Omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\Omega_1\Omega_2 + I_{12}\Omega_1^2 - I_{12}\Omega_2^2 &= m(X_1F_2 - X_2F_1), \\ I_3\dot{\Omega}_3 + O^2 &= m(O^1O^1 - O^1O^1), \\ I_3\dot{\Omega}_3 &= O^2, \\ \dot{\Omega}_3 &= O^2. \end{aligned}$$

Како је $\Theta_1 = \Omega_3 - \omega$, онда је $\dot{\Theta}_1 = \dot{\Omega}_3 = O^2$, што представља пету једначину у (78).

Литература

- [1] V. I. Arnol'd: *Ordinary differential equations*, Springer Textbook. Springer-Verlag, Berlin, (1992), 334 pp.
- [2] V. I. Arnol'd: *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, New York, (1989), 516 pp.
- [3] И.С. Астапов: Об устойчивости вращения кельтского камня Вестник МГУ, сер.1 Мат. Мех. Но.2 (1980), 97–100.
- [4] А. Бакша, М. Весковић: Стабилност кретања, Математички факултет Београд, (1996), 260 с.
- [5] A. V. Borisov, I.S. Mamaev: Strange attractors in rattleback dynamics, *Physics Uspekhi*, **46**(4) (2003), 393–403.
- [6] A. Hurwitz, On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts, *Math. Ann.*, **46** (1895), 273–284.
- [7] А.В. Карапетян: Устойчивост стационарных движений, УРСС, (1998), 168 с.
- [8] И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Москва-Ленинград: Государств. Издат. Техн.-Теор. Лит., (1952), 432 с.
- [9] E.J. Routh, *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*, Macmillan, (1877).
- [10] Sh. Strelitz: On the Routh-Hurwitz problem, *Amer. Math. Monthly* **84** (1977), no. 7, 542–544.
- [11] Н.Г. Четаев: Устойчивост движения, Наука, Москва, четвертое издание, (1990), 176 с.
- [12] E. W. Weisstein: Euler's Homogeneous Function Theorem, From MathWorld—A Wolfram Web Resource