

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Кристина Мићић

ГЕНЕРАЛИЗОВАНИ ТОНАЦ:  
МАТЕМАТИЧКА СТРУКТУРА МУЗИКЕ

мастер рад

Београд, 2025.

**Ментор:**

др Срђан ВУКМИРОВИЋ, редовни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије:**

др Филип ЈЕВТИЋ, научни сарадник  
Математички институт Српске академије наука и уметности (САНУ)

др Александар ЛИПКОВСКИ, редовни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Датум одбране:** \_\_\_\_\_

Посебну захвалност желим да изразим др Филипу Јевтићу са Математичког института САНУ, који ме је стрпљиво усмеравао током писања овог рада. Његова подршка и посвећеност били су од великог значаја за успех и развој ове тезе. Инспирацију за писање рада сам добила читајући његов рад у којем сам се први пут сусрела са структуром тонца.

Захваљујем својим професорима др Срђану Вукмировићу и др Александру Липковском на предавањима које памтим по генијалности и многобројним примерима примене математике у свету у ком живимо. Посебно им захваљујем на изузетном педагошком приступу током основних студија који ме је инспирисао да рад у математици посматрам и примењујем на исти начин.

Захваљујем својој породици на поверењу и подршци коју ми свакодневно пружају.

# Садржај

|          |                                                                      |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Тонац - геометрија музике</b>                                     | <b>2</b>  |
| 1.1      | Ојлеров тонац . . . . .                                              | 2         |
| 1.2      | Музички садржај тонца . . . . .                                      | 3         |
| 1.3      | Конструкција тонца - дужински вектор $L$ . . . . .                   | 6         |
| 1.4      | Генерализовани тонац $Ton^{n,k}(L)$ . . . . .                        | 8         |
| <b>2</b> | <b>Комбинаторна структура тонца</b>                                  | <b>10</b> |
| 2.1      | Симплекси и симплицијални комплекси . . . . .                        | 10        |
| 2.2      | Звезда и линк симплекса . . . . .                                    | 14        |
| 2.3      | Комбинаторна многострукост . . . . .                                 | 17        |
| 2.4      | Тонац $Ton^{n,k}(L)$ је повезана комбинаторна многострукост . . . .  | 19        |
| <b>3</b> | <b>Тополошка структура тонца</b>                                     | <b>28</b> |
| 3.1      | Тонац $Ton^{n,3}(L)$ је тријангулација торуса . . . . .              | 28        |
| 3.2      | Сви 2-комплекси тонац-типа . . . . .                                 | 34        |
| 3.3      | Хомологија тонца . . . . .                                           | 38        |
| 3.4      | Генерализовани тонац $Ton^{n,k}(L)$ је тријангулација торуса . . . . | 44        |
| <b>4</b> | <b>Алгебарска структура тонца</b>                                    | <b>45</b> |
| 4.1      | Изоморфизми између тонаца . . . . .                                  | 45        |
| 4.2      | Група $Aut(Ton^{n,k}(L))$ . . . . .                                  | 50        |
| 4.3      | Изоморфизам $T_1 \cong T_4$ . . . . .                                | 54        |
| 4.4      | Компоновање у тонцу . . . . .                                        | 60        |
|          | <b>Литература</b>                                                    | <b>63</b> |

# Увод

Музика је математика у времену. Познато је још из периода античких мислилаца како музичка теорија у својој основи крије дубоке математичке обрасца, а у савременом стваралаштву јавља се интересовање за такозвани *џонац*, комбинаторно-геометријску структуру, која описује акорде и интервалске односе међу тоновима.

Почетна инспирација је *Ојлеров џонац*, те у првој глави дајемо његов опис и уводимо основну терминологију музичког света. Дефинишемо дужински вектор, а затим први пут дајемо дефиницију генерализованог тонца.

Друго поглавље је посвећено структури симплицијалних комплекса и као круну поглавља дајемо доказ да је генерализовани тонац повезана, затворена и оријентабилна многострукост.

У трећој глави се служимо начелима алгебарске топологије. Структура дводимензионалног тонца се своди на тријангулацију торуса и до тога нас доводи теорема о класификацији компактних површи. Генерализовани тонац представља тријангулација торуса, док неки дегенерисани облици тонца производе друге тополошке структуре.

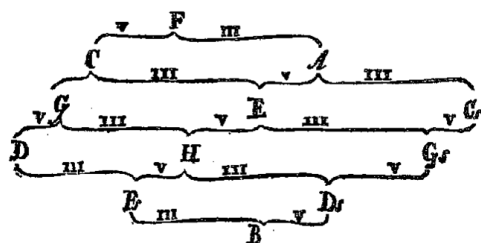
Четврто поглавље представља ауторски допринос у ком испитујемо све изоморфизме међу тонцима. Долазимо до веома занимљивог запажања, а то је да постоји тонац изоморфан класичном Ојлеровом тонцу. Тај тонац је сачињен од акорада који садрже снажну музичку дисонанцу, те његова изоморфна веза са дурским и молским акордима пружа изузетну перспективу за музичке теоретичаре и композиторе. Ово поставља темељ за даља истраживања генерализованих тонаца, различитих хармонских бојења, као и њихове примене у композицијама.

# Глава 1

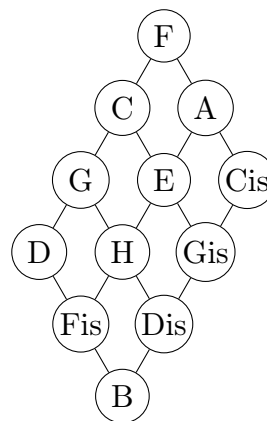
## Тонац - геометрија музике

### 1.1 Ојлеров тонац

Веза између музике и математике стара је колико и саме те две науке — од Питагорејаца и источних филозофа, преко ренесансних мислилаца и композитора. Међутим, у XVIII веку, тачније 1739. године, настаје дело „*Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principijs dilucide expositae*”, у којем се хармонски простор тонова систематски представља помоћу геометријских и аритметичких модела. Аутор овог дела је један од најзначајнијих математичара свих времена — Леонард Ојлер. Као што је поставио темеље савремене математике, тако је и својим увидима у музику поставио основе у начину на који се данас формализују музичке структуре у оквиру музичке и математичке теорије.



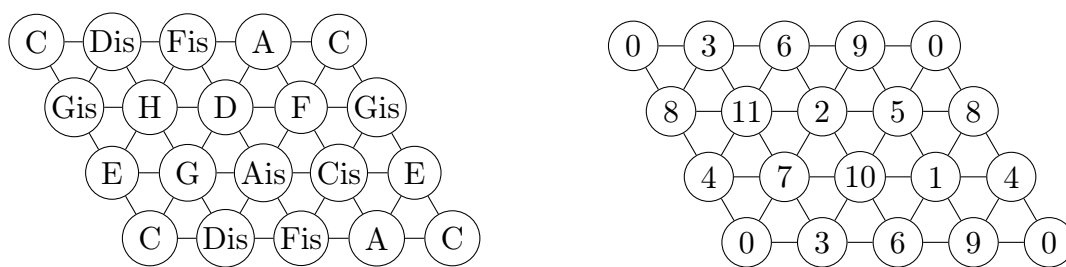
(a)



(б)

Слика 1.1: Ојлерова мрежа тонова у изворном и савременом дијаграму.

На слици 1.1 (а) је приказана оригинална Ојлерова идеја како се тонови могу посматрати као елементи неког дискретног простора. Дурски и молски трозвуци се лако могу уочити у оквиру ма ког ромба на слици 1.1 (б), те нпр. када бисмо повукли ивицу C-A, ромб FCEA би био подељен на два различито оријентисана троугла, FАC-дурски и АСЕ-молски трозвук. Тако настаје **Ојлеров тонац**, најпознатији и историјски најстарији модел тонца.



Слика 1.2: Ојлеров тонац у нотацији тонова и бројева.

Са геометријског становишта, Ојлеров тонац је торус, у равни представљен путем тријангулисане тонске мреже у којој се, у виду троуглова, јасно уочавају сви дурски и молски трозвуци једнакотемпероване хроматске скале. Свако теме представља један тон, а десно на слици 1.2 видимо на који начин свих 12 тонова можемо поистоветити са елементима скупа  $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, \dots, 11\}$ . Суседна темена су повезана ивицама и њих посматрамо као музичке интервале и то: мале терце, велике терце и чисте квинте, као и све њихове обртаје. Тако ће геометрија уз аритметику постати језик који открива симетрије и инверзије у музичкој хармонији, а простор у коме се акорди континуално повезују описаће многе тополошке и комбинаторне структуре.

## 1.2 Музички садржај тонца

Већ смо користили неколико музичких термина, те уведемо основне појмове музичке теорије који ће нам омогућити да музички простор интервала, акорада и скала разумемо таман онолико колико нам је потребно у даљем раду.

**Тон** је основни елемент музичког система и одређен је својом *фреквенцијом*, односно бројем осцилација звучног таласа у секунди. Два тона се сматрају еквивалентним ако се њихове фреквенције разликују за цео број октава,

тј. ако се њихов однос може записати као  $2^k$  за неки цео број  $k$ . Овим се добија природна периодичност у музичком простору, што ће касније бити од суштинског значаја за разумевање торусних структура. **Музички интервал** представља однос између фреквенција два тона. Ако тонови имају фреквенције  $f_1$  и  $f_2$ , интервал између њих је одређен количником  $\frac{f_2}{f_1}$ .

**Скала** је низ тонова распоређених по висини унутар једне октаве. Тонове скале бирамо из скупа који је дефинисан према одређеном систему темперовања интервала унутар октаве. Најдоминантнији је **једнакотемперовани систем**, по коме је октава подељена на дванаест једнаких интервала, тзв. **полустепена**. У једнакотемперованом систему, сваки полустепен одговара множењу фреквенције са  $2^{1/12}$ , тако да се октава добија након дванаест таквих корака. На тај начин добија се низ:

$$C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, H, C$$

$$(C, D\flat, D, E\flat, E, F, G\flat, G, A\flat, A, B, H, C)$$

Пошто се након  $H$  поново појављује  $C$  (само двоструко веће фреквенције), систем је природно периодичан. *Напомена*: тон  $H$  се у литератури земаља западне Европе чешће означава са  $B$ , а у домаћој литератури смо преузели немачку нотацију, те  $B$  користимо за снижен тон  $H$ .

**Хроматска скала** представља скуп свих дванаест тонова унутар једне октаве. Такав скуп можемо поистоветити са  $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, \dots, 11\}$ , где сваки елемент представља један тон, а сабирање по модулу 12 моделује кретање кроз полустепене. Овим се у музички простор уводи аритметичка структура која ће касније бити кључна за конструкцију тонца.

Аритметичка структура једнакотемперованог система омогућава да се интервали опишу сабирањем по модулу у групи  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ . Сваки **интервал у хроматској скали** можемо представити као растојање између два тона у  $\mathbb{Z}_{12}$ , односно број полустепена између њих. Имамо одговарајућу терминологију за интервале: 0 (чиста прима), 1 (мала секунда), 2 (велика секунда), 3 (мала терца), 4 (велика терца), 5 (чиста кварта), 6 (прекомерна кварта/умањена квинта), 7 (квинта), 8 (мала секста), 9 (велика секста), 10 (мала септима), 11 (велика септима), 12 (октава). Сваком интервалу у  $\mathbb{Z}_{12}$  придружен је његов **инверзан интервал**, онај који га допуњује до октаве. Математички, ако интервал представља елемент  $i \in \mathbb{Z}_{12}$ , његов инверз је  $12 - i$  (модуло 12). На пример, велика терца ( $i = 4$ ) и мала секста ( $12 - 4 = 8$ ) су инверзни

интервали, јер заједно чине октаву. Инверзија у музичком смислу одговара симетрији интервала око одабраног центра.

**Акорд** је скуп од два или више тонова који звуче истовремено. Један пример акорда је **трозвук**, тј. акорд који се састоји од три тона. Акорди чине базу **хармонског простора**. Најпознатији трозвуци су **дурски**, када су интервали које тонови граде са почетним тоном велика терца и чиста квинта (нпр.  $C-E-G$ , тј.  $0-4-7$ ) и **молски** када се уместо велике јавља мала терца (нпр.  $A-C-E$ , тј.  $0-3-7$ ).

**Транспоновати акорд** значи померити све његове тонове за исти интервал. Ако акорд садржи тонове који одговарају елементима  $\{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ , онда се његова транспозиција за интервал  $t$  добија као

$$\{v_0 + t, v_1 + t, \dots, v_{k-1} + t\} \pmod{12}.$$

У геометријском смислу, транспозиција је *транслација* акорда у музичком простору, тј. његов облик остаје исти, али је позиција померена. Слично, **инверзија** акорда се постиже заменом сваког тона  $v$  са  $-v$  (по модулу 12), што одговара одразу акорда кроз симетријску осу у музичком простору.

Избор тона који ћемо идентификовати са  $0 \in \mathbb{Z}_{12}$  може бити произвољан, међутим најчешћа ситуација ће бити баш као у следећој табели.

|     |           |     |           |     |     |           |     |           |     |           |     |     |
|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----|
| $C$ | $C\sharp$ | $D$ | $D\sharp$ | $E$ | $F$ | $F\sharp$ | $G$ | $G\sharp$ | $A$ | $A\sharp$ | $B$ | $C$ |
| 0   | 1         | 2   | 3         | 4   | 5   | 6         | 7   | 8         | 9   | 10        | 11  | 0   |

**Значај једнакотемперованог система** огледа се у постојању чувеног **квинтног круга**, који се у овом систему савршено затвара након седам октава. Наиме, у једнакотемперованој хроматској скали свака квинта има једнаку величину и одговара померању за 7 полустепена, па полазећи од тона  $C$  добијамо:  $7 \cdot 12 \equiv_{12} 0$ , чиме се круг квинти затвара — након дванаест корака стигемо поново до тона  $C$  у некој октави више.

Међутим, у **Питагорином систему**, који је настао из **аликвотног низа** природних облика вибрације жице, интервали нису дефинисани по једнаким полустепенима, већ као рационални односи фреквенција. Тако је квинта дефинисана као однос  $\frac{3}{2}$ . Ако се овај однос примени дванаест пута за редом, добија се:  $(\frac{3}{2})^{12} = 129.7463\dots$ , док би седам октава више од почетног тона износило  $2^7 = 128$ . Разлика између ових вредности је приближно 1.0136, што одговара интервалу од око 23.46 центи, познатом као **Питагорина кома**.

Ова мала али кумулативна разлика значи да се у природном систему круг квинти не затвара, већ остаје „отворен“. Стога тонови истог имена (нпр.  $D\sharp$  и  $E\flat$ ) нису потпуно идентични по висини, што се јасно чује на инструментима без фиксног темперовања, као што је виолина. Супротно томе, у једнакотемперованом систему, који је постао доминантан током касног барока — посебно након Баховог „Добро темперованог клавира“ — свих дванаест полустепена имају једнако растојање и круг квинти се у потпуности затвара, што представља кључну особину модерног система интонације.

## Нео-риманска теорија

У духу рада, није на одмет указати на то да већ крајем XIX века, композитори постепено достижу границе традиционалне употребе хармонијских средстава и функционалних акордских веза у оквиру једног тоналитета. Јавља се потреба за сложенијим и обимнијим акордским структурама, као и за алатима који могу прецизно означити композиционе поступке. Музички теоретичар Хуго Риман један је од првих, али сада теоретичара музике, који уводи операције над акордима: три основне трансформације (P, R, L) које покривају готово све могуће комбинације акорда у једнакотемперованом систему. У овом раду нећемо разматрати саме трансформације, њихова детаљна анализа доступна је у литератури, на пример у [3]. Ипак, након упознавања са структуром тонца, рад са овим трансформацијама постаје интуитиван и јасан.

### 1.3 Конструкција тонца - дужински вектор $L$

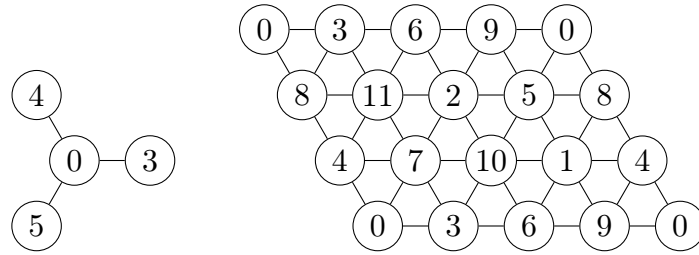
Сада када смо се упознали са свом музичком терминологијом јасно је на који начин простор тонова сагледавамо кроз  $\mathbb{Z}_{12}$ , те Ојлеров тонац можемо дефинисати као:

$$T = \left\{ \{v, v+3, v+7\} \mid v \in \mathbb{Z}_{12} \right\} \cup \left\{ \{v, v+4, v+7\} \mid v \in \mathbb{Z}_{12} \right\}$$

где први скуп уније представља све молске, а други скуп све дурске трозвуке. Приметимо да ако  $\{u, v, w\} \in T$  онда је  $\{v-u, w-v, u-w\} = \pm\{3, 4, 5\}$  што се поклапа и са музичким смислом ових квинтакорада, јер интервали између тонова које они садрже морају бити искључиво: 3 (мала терца), 4 (велика

терца), и 5 (кварта), или неки од њихових обртаја,  $9(\equiv_{12} -3)$  (велика секста),  $8(\equiv_{12} -4)$  (мала секста) и  $7(\equiv_{12} -5)$  квинта.

Приметимо да скуп  $\{3, 4, 5\}$  има веома значајну геометријску реализацију у Ојлеровом тонцу  $T$ . Заиста, означимо га са  $L = (3, 4, 5)$  и посматрајмо га као вектор који садржи информацију о дужинама. Правци којима су те дужине додељене одговарају правцима ивица троуглова, односно свим истакнутим правцима у тонац мрежи.



Слика 1.3: Пример реализације вектора  $L$  у тонцу  $T$ .

Вектор дужина  $L$  садржи готово све потребне информације о конструкцији тонца, те је природно поставити питање какве све мреже тонова могу да постоје и колико постоји тонаца попут Ојлеровог тонца. На друго питање ћемо дати одговор тек у последњој глави овог рада, међутим већ сада можемо да конструишемо све могуће такозване **генерализоване тонце**  $Ton^{n,k}(L)$  чија мрежа може бити било које димензије  $k - 1$ , а подела скале на било који број тонова  $n$ .

Поставимо прво одређене услове за генерализован вектор дужина. Важно нам је да када завршимо са додавањем свих дужина, односно музичких интервала из колекције  $L$ , достигнемо све тонове скале, а такође нам је од значаја и то да најкраћи путеви између два тона буду јединствени у тонац мрежи.

**Дефиниција 1.3.1** (торусни вектор дужина  $L$ ). Нека је  $L = \{l_i\}_{i=1}^k$  колекција  $k$  позитивних целих бројева таквих да је њихов збир  $n$

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n.$$

Колекција  $L$  је **редукована** ако за сваки пар  $I, J \in 2^{[k]}$  подскупова од  $[k]$  важи

$$\sum_{i \in I} l_i = \sum_{j \in J} l_j \Rightarrow I = J. \quad (1.1)$$

Колекција  $L$  је **генеричка** уколико је НЗД за све  $l_i$  једнак 1,

$$\text{НЗД}(l_1, \dots, l_k) = 1. \quad (1.2)$$

Кажемо да је вектор дужина  $L = (l_1, \dots, l_k)$  **торусни** уколико је колекција  $L$  генеричка и редукована.

Услов редукованости нам даје то да два различита подскупа дужина не смеју имати исти збир, те да сваки подзбир носи јединствену информацију о томе који елементи су учествовали што ће осигурати јединствене путеве у тонцу. Услов генеричности ће осигурати то да колекција  $L = \{l_1, \dots, l_k\}$  генерише целу групу  $\mathbb{Z}_n$ , те да ће сви тонови скале бити присутни у тонцу.

У даљем раду, када је јасан контекст, истом ознаком  $L$  ћемо обележавати скуп дужина  $L = \{l_1, \dots, l_k\}$  и дужински вектор  $L = (l_1, \dots, l_k)$ .

## 1.4 Генерализовани тонац $\text{Ton}^{n,k}(L)$

Нека је  $L = (l_1, \dots, l_k)$  вектор дужина који задовољава услове редукованости и генеричности. **Генерализовани тонац**  $\text{Ton}^{n,k}(L)$  можемо интуитивно да замислимо као дискретну  $(k-1)$ -димензиону мрежу изграђену од једноставних „градивних јединица“ — троуглова, тетраедара или њихових вишедимензионих аналога, чија темена идентификујемо са тоновима из  $\mathbb{Z}_n$ , а ивице са интервалима из  $L$ .

Сваком акорду, односно „хелији“ у музичком простору, одговара неки подскуп дужина из  $L$ . У том смислу,  $\text{Ton}^{n,k}(L)$  ће представљати комбинаторну структуру која истовремено бележи интервалске односе и геометрију хармонског простора.

**Дефиниција 1.4.1** (пермутације и симетрична група). **Пермутација** на скупу  $X$  је ма која функција  $p : X \rightarrow X$  која је бијекција. Фамилију свих пермутација скупа  $X$ , у ознаци  $\mathcal{S}_X$ , називамо **симетрична група** на  $X$ .

Формалну дефиницију тонца  $\text{Ton}^{n,k}(L)$  дајемо сада, међутим све њене сегменте ћемо детаљно проучити у наредном поглављу, где ћемо дефинисати

све потребне појмове попут *симплекса* и *симплицијалног комплекса* чији се симплекси одређују управо дужинама из  $L$ .

**Дефиниција 1.4.2** (Генерализовани тонац  $Ton^{n,k}(L)$ ).  $Ton^{n,k}(L)$  је  $(k - 1)$ -димензиони симплицијални комплекс чији су максимални симплекси облика:

$$\sigma = \{v, v + l_{p(1)}, v + l_{p(1)} + l_{p(2)}, \dots, v + l_{p(1)} + \dots + l_{p(k-1)}\}$$

где је  $v \in \mathbb{Z}_n$ , а  $p \in \mathcal{S}_X$ ,  $X = \{1, 2, \dots, k\}$  је пермутација.

Максимални симплекси су  $k$ -точлани скупови које геометријски сагледавамо као  $(k - 1)$ -димензионе политопе, а у музичком смислу они представљају  $k$ -звуче.

## Глава 2

# Комбинаторна структура тонца

### 2.1 Симплекси и симплицијални комплекси

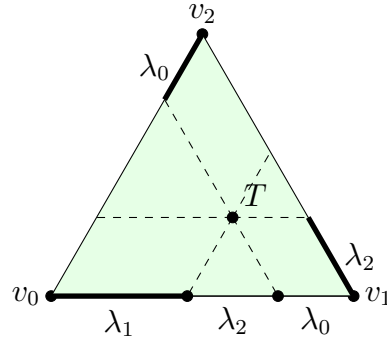
**Дефиниција 2.1.1** (симплекс  $\sigma$ ). Нека је дато  $n + 1$  афино независних тачака  $v_0, \dots, v_n$  у простору  $\mathbb{A}^n$ . Дефинишемо  $n$ -симплекс  $\sigma$  или **симплекс  $\sigma$  димензије  $n$**  који је генерисан тачкама  $v_0, \dots, v_n$  као скуп свих конвексних комбинација  $\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$ , за које важи  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$  и  $\lambda_i \geq 0, \forall i, 0 \leq i \leq n$ .

**Темена** симплекса  $\sigma$  су елементи скупа  $\{v_0, \dots, v_n\}$ , односно темена су тачке којима је симплекс дефинисан. **Лице** симплекса  $\sigma$  је било који  $k$ -симплекс  $\tau$  који је дефинисан подскупом  $\tau = \{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\} \subseteq \{v_0, \dots, v_n\} = \sigma$ , где је  $0 \leq k \leq n$ . Такву релацију међу симплексима обележавамо са  $\tau \preceq \sigma$ . За свако теме  $v_i$  лице генерисано теменима  $v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$  јесте лице насупрот темена  $v_i$ . Свако лице димензије  $n-1$  називамо **граничним лицем**. **Граница** симплекса  $\sigma$  је унија свих граничних лица симплекса  $\sigma$  и означавамо је са  $\partial\sigma$ , док унутрашњост симплекса дефинишемо као  $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma - \partial\sigma$  и називамо **отвореним симплексом**.

Још једном, важно је напоменути да  $n$ -симплекс увек има тачно  $n + 1$  темена.

**Пример 2.1.1.** 0-симплекс је скуп који се састоји од само једне тачке  $\{v_0\}$  и за њега важи  $\partial\{v_0\} = \emptyset, \{v_0\} = \overset{\circ}{\{v_0\}}$ . 1-симплекс  $\{v_0, v_1\}$  је дуж  $(v_0, v_1)$  са крајевима у тачкама  $v_0$  и  $v_1$  и унутрашњим тачкама облика  $\lambda v_0 + (1 - \lambda)v_1, 0 < \lambda < 1$ . Аналогно, 2-симплекс  $\{v_0, v_1, v_2\}$  је троугао са теменима  $v_0, v_1, v_2$  и свим својим унутрашњим тачкама, 3-симплекс  $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  је тетраедар итд.

**Тврђење 2.1.1.** Тачка  $x$  припада граници  $n$ -симплекса  $\partial\sigma$  ако је најмање једна од њених барицентричних координата  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  једнака 0. Тачка  $x$  припада унутрашњости  $n$ -симплекса  $\overset{\circ}{\sigma}$  ако су све њене барицентричне координате  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  позитивне.



Слика 2.1: Пример 2-симплекса са истакнутом тачком  $T = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ , за  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

**Дефиниција 2.1.2** (комплекс  $K_a$ ). **Апстрактни симплицијални комплекс** је уређен пар  $K_a = (V, \mathcal{S})$  који се састоји из непразног скупа  $V$  својих темена и фамилије  $\mathcal{S}$  коначних подскупова од  $V$  који представљају **апстрактне симплексе**  $\sigma_a$  тог комплекса, тако да важи:

- (1) Свако теме  $v \in V$  припада бар једном, а највише коначном броју апстрактних симплекса из  $\mathcal{S}$ .
- (2) Сваки подскуп апстрактног симплекса је такође апстрактни симплекс  $\sigma_a \in \mathcal{S}$ .

Овако дефинисан, апстрактни симплицијални комплекс  $K$  није подскуп од  $\mathbb{A}^n$ , већ представља комбинаторни објекат, односно скуп апстрактних симплекса који задовољавају одређене услове. Због тога уводимо геометријску реализацију апстрактног комплекса у  $\mathbb{A}^n$ .

**Дефиниција 2.1.3** (комплекс  $K$ ). **Симплицијални комплекс**  $K$  у  $\mathbb{A}^n$  је колекција симплекса из  $\mathbb{A}^n$  за које важи:

- (1) Свако лице било ког симплекса из  $K$  је такође у колекцији  $K$ .
- (2) Непразан пресек било која два симплекса из  $K$  је лице сваког од та два симплекса.

У будуће, с обзиром да ће углавном бити јасно да ли је реч о комбинаторном објекту, тј. апстрактном комплексу и апстрактним симплексима, или о њиховој геометријској реализацији, користићемо једноставно термине **комплекс** и **симплекс**, као и ознаке  $K$  и  $\sigma$  уместо  $K_a$  и  $\sigma_a$ .

Сваки  $k$ -симплекс који припада комплексу називамо  **$k$ -лицем комплекса**. У комплексу, 0-лица су темена, а 1-лица називамо **ивицама**. Димензија комплекса  $\dim K = d$  једнака је максималној димензији свих симплекса у том комплексу. Уколико је неко лице димензије  $d$  називамо га **максималним симплексом** или **ћелијом**, а уколико је димензије  $d-1$  називамо га **страном**. Кажемо да је комплекс  $K$  **чист**, односно хомоген, уколико је састављен од симплекса који су сви исте димензије  $d$ .

Геометријски је јасно да у Еуклидском простору  $\mathbb{R}^n$  комплексе визуализујемо као политопе, те дајмо кратак подсетник. **Политоп** или **конвексни политоп** је скуп у  $\mathbb{R}^n$  који се може представити као конвексни омотач коначног скупа тачака. Димензија политопа је димензија његовог афиног омотача (*engl. affine hull*). Ако је политоп димензије  $d$ , зовемо га  $d$ -политоп. Политоп видимо и као ограничен објекат који је пресек коначног броја затворених полупростора, по чему се и разликује од произвољног полиедра који не мора бити ограничен.

**Дефиниција 2.1.4** (симплицијални подкомплекс). Колекција  $K' \subseteq K$  је **подкомплекс** комплекса  $K$  уколико садржи сва лица својих симплекса и такође представља симплицијални комплекс за себе.

Подкомплекс који садржи све симплексе из  $K$  димензије мање од  $p$  називамо  **$p$ -скелет** и обележавамо са  $K^{(p)}$ . На пример,  $K^{(0)}$ , односно 0-скелет је подкомплекс који се састоји само од темена комплекса  $K$ .

Кроз читаво прво поглавље се највише ослањамо на дефинисања и тврђења радова [1], [2], [5] и [6].

## Топологија симплекса и комплекса

У раду анализирамо тополошка својства структура са којима радимо. Када говоримо о топологији, јасно је да ћемо у наставку оваквих секција искључиво радити са геометријском реализацијом симплекса и симплицијалних комплекса.

Треба приметити да је сваки симплекс  $\sigma$  конвексан, путно повезан, компактан и затворен скуп. Такође, његова унутрашњост  $\overset{\circ}{\sigma}$  је конвексна, путно повезана и отворена, а затварање унутрашњости је сам симплекс  $\sigma$ . Следећа теорема потврђује ова својства.

**Тврђење 2.1.2.** *Сваки  $n$ -симплекс је хомеоморфан затвореној јединичној лопти  $\overline{B^n}$ , иако да се граница симплекса  $\partial\sigma$  пресликава на границу лопте, односно на  $n$ -сферу  $S^{n-1}$ .*

**Скица доказа:** Наредна три корака доказују ову теорему.

1. Тополошко затварање  $\overline{U}$  непразног конвексног скупа  $U$  је такође конвексан скуп. Уколико је скуп  $U$  ограничен, ограничен ће бити и  $\overline{U}$ .
2. Нека је  $U$  непразан, ограничен и конвексан отворен скуп у  $\mathbb{A}^n$  и нека  $a \in U$ . Сваки зрак са почетком у тачки  $a$  сече скуп  $\partial U = \overline{U} - U$  у тачно једној тачки.
3. Постоји хомеоморфизам између  $\overline{U}$  и  $B^n$  тако да се  $\partial U$  пресликава на  $S^{n-1}$ .  $\square$

Дефинишемо **топологију на комплексу**  $K$  тако што проглашавамо:

$F \subseteq K$  је затворен уколико је  $F \cap \sigma$  затворен у  $\sigma$ , за сваки  $\sigma \in K$ .

Може се показати да овако дефинисана топологија заиста испуњава све услове да  $K$  прогласимо тополошким простором.

Погледајмо сада шта то значи да је комплекс повезан.

**Дефиниција 2.1.5.** Комплекс  $K = (V, \mathcal{S})$  је **повезан** уколико се не може представити као унија два комплекса  $K_1 = (V_1, \mathcal{S}_1)$  и  $K_2 = (V_2, \mathcal{S}_2)$ , где је  $V = V_1 \cup V_2$ , за дисјунктне скупе  $V_1$  и  $V_2$ , а такође  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ , за дисјунктне  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$ .

**Тврђење 2.1.3.** *Уколико је  $K = (V, \mathcal{S})$  повезан комплекс, иада су  $\mathcal{S}$  и  $V$  пребројиви скупови.*

Генерално код симплицијалних комплекса, увек захтевамо да  $K$  буде локално коначан, односно чак и када садржи бесконачно много симплекса свако теме може припадати највише коначном броју лица. Оваквим условом добијамо да је и  $K$  локално компактан. Такође, може се показати да је комплекс повезан ако и само ако је његов 1-скелет повезан, односно ако постоји полигон који образују све његове ивице. Лако се можемо уверити да код симплицијалних

комплекса повезаност такође представља и путну повезаност.

Желимо да радимо са јако лепим комплексима који не поседују никакве сингуларитете, те уводимо **звезду** и **линк** темена  $v$ , прво из геометријско-тополошке перспективе, а у наредној секцији и као комбинаторне објекте. Ове структуре ће нам бити кључне у доказима нама важних теорема које буду уследиле.

**Дефиниција 2.1.6** (звезда и линк). Нека је  $v$  теме из  $K$ . **Отворена звезда темена  $v$** , у ознаци  $st(v)$ , јесте унија унутрашњости оних симплекса из  $K$  који садрже  $v$  као своје теме:

$$st(v) = \bigcup_{v \in \sigma} \sigma^\circ.$$

Затворење скупа  $st(v)$  обележавамо са  $St(v) = \overline{st(v)}$  и називамо га **звезда темена  $v$** . Скуп  $St(v) - st(v)$  називамо **линк темена  $v$**  у  $K$  и означавамо га са  $Lk(v)$ .

Звезда  $St(v)$  и линк  $Lk(v)$  су подкомплекси комплекса  $K$ . Линк  $Lk(v)$  можемо да видимо и као унију свих лица из  $St(v)$  која не садрже  $v$ . Отворена звезда је отворен скуп, затворена звезда илити само звезда је компактан скуп. Звезда, аналогно и отворена звезда, је увек путно повезан скуп.

## 2.2 Звезда и линк симплекса

Дефинишимо сада звезду и линк ма ког симплекса, али овај пут дајмо дефиницију и у још ширем контексту који нас не везује само за геометријску визуелизацију, тј. дефинишимо апстрактно и чисто комбинаторно. Лако можемо да се уверимо да из геометријског угла претходна дефиниција и наредна задају исте објекте.

**Дефиниција 2.2.1** (апстрактна звезда и линк). Нека је  $K$  комплекс, а  $\sigma$  ма које његово лице. **Отворена звезда симплекса  $\sigma$**  је скуп свих симплекса који садрже  $\sigma$ ,

$$st(\sigma) := \{\tau \in K \mid \sigma \preceq \tau\}.$$

**Звезда симплекса**  $\sigma$  је скуп свих симплекса који су лице неког симплекса у коме је  $\sigma$  садржано,

$$St(\sigma) := \{\tau \in K \mid (\exists \gamma \in K) (\sigma \preceq \gamma \wedge \tau \preceq \gamma)\}.$$

**Линк симплекса**  $\sigma$  су сви они симплекси из звезде симплекса  $\sigma$ , али такви да не садрже симплекс  $\sigma$ ,

$$Lk(\sigma) := \{\tau \in K \mid \tau \in St(\sigma), \tau \cap \sigma = \emptyset\}.$$

Када желимо посебно да нагласимо у оквиру ког комплекса дефинишемо звезду и линк, писаћемо  $St(\sigma, K)$  уместо  $St(\sigma)$  и  $Lk(\sigma, K)$  уместо  $Lk(\sigma)$ .

По оваквој дефиницији, јасно је да је  $Lk(\sigma)$  подкомплекс комплекса  $St(\sigma)$ . Уколико је  $K$  чист и димензије  $d$ , звезда  $St(\sigma, K)$  је такође чиста и димензије  $d$ , а ако је  $\dim(\sigma) = k$  онда је  $Lk(\sigma, K)$  чист и димензије  $d - k - 1$ .

Понекад је лакше користити директнију дефиницију линка, односно такву која га не везује за звезду:

$$Link(\sigma) := \{\tau \in K \mid \tau * \sigma \in K, \tau \cap \sigma = \emptyset\},$$

с тога ћемо прво увести операцију конуса  $*$ , а потом и показати ову тврдњу.

**Дефиниција 2.2.2** (конус). Нека је дат комплекс  $K$  и нека је  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  произвољно  $k$ -лице тог комплекса. **Конус над симплексом  $\sigma$  теменом  $v$**  је  $(k + 1)$ -димензиони симплекс

$$v * \sigma = \{v, v_0, v_1, \dots, v_k\},$$

такав да је  $v$  било које теме афиног простора, а које није садржано ни у једној афиној комбинацији темена симплекса  $\sigma$ .

**Конус над комплексом  $K$  теменом  $w$**  је комплекс, у ознаци  $w * K$ , који садржи све симплексе  $w * \tau$  и сва њихова лица, за сваки симплекс  $\tau \in K$ , где је  $w$  поново било које тема афиног простора које није садржано ни у једној афиној комбинацији темена комплекса  $K$ .

Није тешко показати да овако дефинисан конус  $v * \sigma$  јесте симплекс димензије  $k + 1$  који садржи  $\sigma$ , као и да је  $w * K$  комплекс димензије  $\dim K + 1$  који садржи  $K$ .

Геометријски гледано, конус је ништа друго до пирамида. Када неким теменом правимо конус над дужи, добијамо троугао, а конус над троуглом даје тетраедар, итд.

Приметимо да операција конуса  $*$  нема смисла када теме са којим градиме конус припада некој афиној комбинацији темена симплекса, односно комплекса, над којим делујемо, јер у том случају остајемо у простору исте димензије.

Природно је да унију два дисјунктна симплекса  $\sigma$  и  $\tau$ , који су садржани у неком симплексу више димензије, посматрамо као конус, односно као **симплекс**  $\sigma * \tau$ . Овакав конус дефинишемо итеративно, теме по теме, **правећи конус над  $\tau$**  теменима из  $\sigma$ . Приметимо да нам је услов да дисјунктни симплекси буду садржани у неком симплексу више димензије сасвим довољан да задовољимо афину независност темена, као и то да ће  $\sigma * \tau$  поново бити симплекс.

**Лема 2.2.1.** *Нека је  $K$  комплекс, а  $\sigma$  ма које његово лице, тада је*

$$Lk(\sigma) = \{\tau \in K \mid \tau * \sigma \in K, \tau \cap \sigma = \emptyset\}.$$

**Доказ:** Довољно је показати да услов  $\tau \in Star(\sigma)$  повлачи услов  $\tau * \sigma \in K$  и обрнуто. Нека је  $\tau \in Star(\sigma)$ , то значи да постоји неки симплекс  $\rho \in K$  такав да  $\tau \preceq \rho$  и  $\sigma \preceq \rho$ . Како важи да су  $\tau$  и  $\sigma$  дисјунктни симплекси, важи да је  $\tau * \sigma \preceq \rho$ . С обзиром да је  $\rho$  симплекс из  $K$ , тада је и свако његово лице баш симплекс комплекса  $K$ . Обрнуто, нека је  $\tau * \sigma$  симплекс из  $K$  и означимо га са  $\gamma$ . Тада су по дефиницији конуса  $\tau$  и  $\sigma$  лица симплекса  $\gamma$ . Добијамо да постоји симплекс  $\gamma$  такав да је  $\sigma \preceq \gamma$  и  $\tau \preceq \gamma$ , одакле одмах добијамо да је  $\tau \in Star(\sigma)$ .  $\square$

По показаној леми јасно видимо да је структура линка симетрична, односно да уколико важи да је  $\tau \in Link(\sigma)$ , тада је и  $\sigma \in Link(\tau)$ .

**Лема 2.2.2.** *Нека је  $K$  комплекс, а  $\sigma$  и  $\tau$  два његова лица таква да важи  $\sigma \cap \tau = \emptyset$  и  $\sigma * \tau \in K$ . Тада је*

$$Lk(\sigma * \tau, K) = Lk(\sigma, Lk(\tau, K)) = Lk(\tau, Lk(\sigma, K)).$$

**Доказ:** Покажимо да је  $Lk(\sigma * \tau, K) = Lk(\sigma, Lk(\tau, K))$ , аналогно ће важити и друга једнакост. Нека је  $\rho \in Lk(\sigma * \tau, K)$  произвољно, тада је  $\rho \in K$ . Да би  $\rho$  припадало  $Lk(\sigma, Lk(\tau, K))$  потребно је да важи:

1.  $\rho \in Lk(\tau, K)$
2.  $\rho \cap \sigma = \emptyset$  у  $Lk(\tau, K)$
3.  $\rho * \sigma \in Lk(\tau, K)$  (тј. да  $\rho * \sigma \in K$ ,  $(\rho * \sigma) * \tau \in K$  и  $(\rho * \sigma) \cap \tau = \emptyset$ ).

Како  $\rho \in Lk(\sigma * \tau, K)$ , по дефиницији одмах имамо да је  $\rho \cap (\sigma * \tau) = \emptyset$  и  $\rho * (\sigma * \tau) \in K$ . Добијамо да је  $\rho \cap \sigma = \emptyset$  и  $\rho \cap \tau = \emptyset$ , што нам уз почетни услов леме даје да су  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  међусобно дисјунктни симплекси по паровима, а из  $\rho * (\sigma * \tau) \in K$  лако добијамо да важи  $(\rho * \sigma) * \tau \in K$ , јер су то исти симплекси. Очигледно је  $\rho * \sigma \in K$ , те смо овим комплетирали трећи услов. Слично се доказује и први услов  $\rho \in Lk(\tau, K)$ , док други тривијално следи из чињенице да је  $Lk(\tau, K)$  подкомплекс комплекса  $K$ . Обрат једнакости се показује готово идентично.  $\square$

**Лема 2.2.3.** *Нека је  $K$  комплекс и  $v$  његово шеме. Тада постоји природна бијекција између скупова:*

$$Lk(v) = \{\tau \in K \mid \tau * \{v\} \in K, v \notin \tau\} \quad \text{и} \quad st(v) = \{\sigma \in K \mid v \in \sigma\}.$$

**Доказ:** Дефинишемо функцију  $\varphi: Lk(v) \longrightarrow st(v)$ , тако да  $\varphi(\tau) = \tau * v$ . По дефиницији конуса,  $\tau * \{v\}$  је симплекс који садржи  $v$ , дакле  $\varphi(\sigma) \in st(v)$ , те је функција добро дефинисана. Функција је инјективна, јер ако важи  $\tau_1 * \{v\} = \tau_2 * \{v\}$ , онда следи  $\tau_1 = \tau_2$ . Функција је сурјективна, јер се свако лице  $\sigma \in st(v)$  може јединствено изразити као  $\sigma = \tau * \{v\}$ , где је  $\tau = \sigma \setminus \{v\}$ , а такво  $\tau$  припада  $Lk(v)$ . Дакле,  $\varphi$  је бијекција.  $\square$

## 2.3 Комбинаторна многострукост

Поред упознавања са главним појмовима симплицијалне геометрије и самим тим постављене подлоге за добро разумевање структуре Генерализованог тонца, циљ овог поглавља јесте и тај да овладаним алатима симплицијалне геометрије покажемо да је Генерализован тонац једна повезана многострукост. Пошто радимо у дискретном окружењу симплицијалних комплекса, природно је да се одговарајућа концепција многострукости дефинише управо као комбинаторна многострукост.

Као што је код глатких многострукости свакој тачки или отвореној околини додељена карта из атласа, тако свако теме, односно симплекс, има своју звезду

и линк, које можемо посматрати као карту која нам говори како су повезани одређени елементи комплекса.

Да бисмо избегли рад са сингуларним симплексима, ограничићемо се на чисте комплексе. Веома добра дискретна апроксимација тополошких простора јесу управо чисти комплекси без сингуларних лица. У то се можемо уверити путем следећих дефиниција и тврђења, а мотивисани тиме увешћемо појам комбинаторне многострукости.

**Дефиниција 2.3.1.** Нека је  $K$  чист комплекс димензије  $d$  и нека је  $\sigma$  ма које његово  $k$ -лице, где  $0 \leq k \leq d - 1$ . Лице  $\sigma$  називамо **несингуларним** ако је геометријска реализација његовог линка  $Lk(\sigma)$  хомеоморфна сфери  $S^{d-k-1}$  или затвореном диску  $\overline{B}^{d-k-1}$ .

**Тврђење 2.3.1** ([2]). Нека је  $K$  чисти комплекс димензије  $d$ . Уколико је свако лице у  $K$  несингуларно, тада за сваку тачку  $a \in |K|$  постоји отворен подскуп  $U \subseteq K$  који садржи  $a$  тако да је  $U \approx B^d$  или  $U \approx B^d \cap \mathbb{H}^d$ , где је  $\mathbb{H}^d = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_d \geq 0\}$ .

**Дефиниција 2.3.2** (комбинаторна многострукост). Сваки простор  $X$  који је хомеоморфан геометријској реализацији неког чистог  $d$ -димензионог комплекса  $K$  чија су сва лица несингуларна, дефинишемо као **комбинаторну  $d$ -многострукост**.

Уколико је линк сваког  $k$ -лица комплекса  $K$ ,  $0 \leq k \leq d$ , хомеоморфан сфери  $S^{d-k-1}$ , кажемо да је  $X$  комбинаторна многострукост **без границе**. Иначе, постоји  $k$ -лице чији је линк хомеоморфан затвореном диску  $\overline{B}^{d-k-1}$  и тада за  $X$  кажемо да је комбинаторна многострукост **са границом**.

Ова дефиниција нам пре свега даје одговор на питање када је и сам симплицијални комплекс  $K$  једна комбинаторна многострукост, а он ће то бити уколико је чист и ако су сва његова лица несингуларна.

Да бисмо показали да је неки чист комплекс комбинаторна многострукост довољно је да покажемо да је линк сваког темена хомеоморфан сфери или диску одговарајуће димензије, јер тада ће исто важити и за симплексе који садрже то теме. Заиста, то следи из следеће две леме.

**Лема 2.3.1.** Нека је  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  симплекс комплекса  $K$ . Тада је

$$Lk(\sigma, K) = Lk(\sigma \setminus \{v_i\}, Lk(v_i, K)) = Lk(v_i, Lk(\sigma \setminus \{v_i\}, K)), \forall i \in \{0, \dots, k\}.$$

**Доказ:** Тривијално следи по лема 2.2.2.  $\square$

**Лема 2.3.2.** Нека је  $S^n$  комбинаторна  $n$ -сфера, тада је линк сваког  $k$ -симплекса  $\sigma \in S^n$  комбинаторна сфера димензије  $n - k - 1$ .

Нека је  $\overline{B}^n$  комбинаторни  $n$ -диск, тада је линк сваког  $k$ -симплекса  $\sigma \in \overline{B}^n$  комбинаторна сфера димензије  $n - k - 1$  уколико је  $\sigma$  унутрашње лице од  $\overline{B}^n$ , а комбинаторни диск димензије  $n - k - 1$  уколико је  $\sigma$  спољашње лице од  $\overline{B}^n$ .

Спремни смо да покажемо жељено тврђење.

**Тврђење 2.3.2.** Нека је  $K$  чисти  $d$ -димензиони комплекс чија су сва темена несингуларна, односно изоморфна неком од  $S^{d-1}$  или  $\overline{B}^{d-1}$ , тада је  $K$  комбинаторна многострукост.

**Доказ:** Желимо да покажемо да за сваки  $k$ -симплекс  $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$  важи:

$$Lk(\sigma, K) \cong \begin{cases} S^{d-k-1}, & \sigma \in \text{Int}K \\ \overline{B}^{d-k-1}, & \sigma \in \partial K \end{cases}$$

Показаћемо тврђење користећи се индукцијом по броју темена симплекса  $\sigma$ , односно по димензији  $k$ . Нека је  $k = 0$ , тада је симплекс  $\sigma$  заправо теме, те по претпоставци важи жељени изоморфизам. Претпоставимо сада да тврђење важи за сваки симплекс  $\tau$  димензије  $\dim \tau \leq k - 1$  и покажимо да ће тврђење важити и за  $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ . Посматрајмо  $\sigma$  као  $\tau * \{v_k\}$ , где је  $\tau = \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$  један  $(k - 1)$ -димензиони симплекс. Важиће да је  $Lk(\sigma, K) = Lk(\tau * \{v_k\}, K) = Lk(v_k, Lk(\tau, K))$ . По индуктивној хипотези  $Lk(\tau, K)$  је изоморфно неком од  $S^{d-k}$  или  $\overline{B}^{d-k}$ , а у зависности од тога да ли  $\tau$  припада унутрашњости или спољашњости од  $K$ . Добијамо да је  $Lk(\sigma, K) \cong Lk(v_k, S^{d-k})$  или је  $Lk(\sigma, K) \cong Lk(v_k, \overline{B}^{d-k})$ , те по лема 2.3.2 коначно добијамо да је  $Lk(\sigma, K)$  изоморфно неком од  $S^{d-k-1}$  или  $\overline{B}^{d-k-1}$ .  $\square$

## 2.4 Тонац $\text{Ton}^{n,k}(L)$ је повезана комбинаторна многострукост

Сада смо потпуно спремни да детаљно разумемо структуру генерализованог тонца. Подсетимо се да је  $\text{Ton}^{n,k}(L)$  дефинисан као симплицијални комплекс

чији су симплекси у тесној вези са дужинским вектором  $L$ . Сажето, то можемо записати као:

$$Ton^{n,k}(L) = \{ \sigma \mid \sigma \in L \},$$

где је сваки симплекс  $\sigma$  облика

$$\sigma = \{v, v+l_1, v+l_1+l_2, \dots, v+l_1+\dots+l_d\}, \quad v \in \mathbb{Z}_n, \quad d \in \{1, 2, \dots, k-1\}. \quad (2.1)$$

Другим речима, сваки симплекс је одређен полазним теменом  $v$  и низом дужина  $\{l_1, \dots, l_d\} \subseteq L$ , које се редом надодају на теме  $v$ . Како су у питању елементи групе  $\mathbb{Z}_n$ , лако се види да су и сва лица оваквих симплекса садржана у  $Ton^{n,k}(L)$ , као и да је сваки непразан пресек два симплекса опет симплекс унутар њега. Ови услови обезбеђују да је  $Ton^{n,k}(L)$  заиста један апстрактни симплицијални комплекс.

**Тврђење 2.4.1.** *За сваки вектор дужина  $L = (l_1, \dots, l_k)$ ,  $Ton^{n,k}(L)$  је аистиракћан симплицијални комплекс.*

**Доказ:** По дефиницији, сваки симплекс  $\sigma \in Ton^{n,k}(L)$  је облика (2.1) и свако његово лице  $\tau \preceq \sigma$ , јесте подскуп тог симплекса које се добија надодавањем подколекције  $\{l_{i_1}, \dots, l_{i_j}\} \subseteq \{l_1, \dots, l_d\}$  дужина из  $L$  на неко теме  $w \in \{v, v+l_1, v+l_1+l_2, \dots, v+l_1+\dots+l_d\}$ , па и сам припада  $Ton^{n,k}(L)$ . Даље, пресек било која два симплекса је или празан или подскуп једног од њих, па је самим тим такође симплекс у комплексу. То су управо услови да  $Ton^{n,k}(L)$  буде симплицијални комплекс.  $\square$

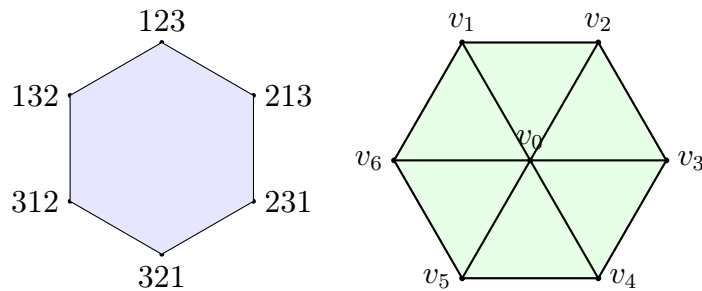
Иако је  $Ton^{n,k}(L)$  за сваки вектор  $L$  увек симплицијални комплекс, геометријска структура и тополошка својства тог комплекса у потпуности зависе од избора  $L$ . Генерички и редукован вектор дужина  $L$ , у смислу дефиниција (1.2) и (1.1), игра кључну улогу у класификацији свих могућих тонаца и у то ћемо се посебно уверити у последњем поглављу. Међутим, већ сада можемо да укажемо на то зашто су услови генеричности и редукованости веома значајни. Какву год музичку скалу да одаберемо, желимо да радимо са њом у целини. Зато интервали које надодајемо на полазни тон морају бити такви да њиховом комбинацијом можемо добити сваки тон скале. Управо нам услов генеричности обезбеђује ову свеобухватност: без њега би неки тонови били недостижни. С друге стране, услов редукованости гарантује да је најкраћи пут до сваког тона јединствено одређен. Ако је, на пример, интервал

између два тона једнак  $l$ , мора бити јасно којим збиром (евентуално мањих) дужина  $l_j \in L$  је овај број формиран. На тај начин добијамо да је тонац повезана и тополошки једнозначна структура, генерисана транспозицијама и пермутацијама. Такође, у будуће ћемо увек подразумевати да је вектор  $L$  генеричан и редукован. Сада смо спремни да и формално докажемо да је  $\text{Ton}^{n,k}(L)$  повезана комбинаторна многострукост.

Значајно је приметити то да постоји снажна повезаност између тонца и пермutoедра. Наиме, посет лица тонца има директну везу са посетом темена пермutoедра, па ће доказ комбинаторне многострукости природно уследити из ове структуралне везе. Да бисмо то приказали, прво ћемо дефинисати све релевантне појмове.

**Дефиниција 2.4.1** (пермutoедар). **Пермutoедар** реда  $k - 1$ , у ознаци  $\Pi_{k-1} \subseteq \mathbb{R}^k$ , је  $(k - 1)$ -димензиони политоп утопљен у  $k$ -димензиони простор, дефинисан тако да његова темена представљају све пермутације координата вектора  $(1, 2, \dots, k)$ .

Темена пермutoедра одређена су пермутацијом скупа  $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ , односно свако теме је облика  $(p(1), p(2), \dots, p(k))$ , где је  $p \in \Sigma_k$  једна пермутација скупа  $[k]$ . Пошто је збир координата сваког темена  $\frac{k(k+1)}{2} = 1+2+\dots+k$ , пермutoедар је утопљен у хиперраван:  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = \frac{k(k+1)}{2}$  димензије  $k - 1$ . Два темена су спојена ивицом ако и само ако се разликују за тачно једну транспозицију координата, при чему се координате које учествују у транспозицији разликују за 1. Дакле, ако је са једне стране ивице теме  $(p(1), \dots, p(i), p(i+1), \dots, p(k))$ , са друге стране ивице ће бити теме  $(p(1), \dots, p(i+1), p(i), \dots, p(k))$ , за  $i \in [k - 1]$ .



Слика 2.2: Пермutoедар  $\Pi_2$  и њему поларни симплицијални комплекс  $\Pi_2^o$

Коментар: Поларност је општа конструкција у теорији политопа која сваком пунодимензионом политопу  $P \subset \mathbb{R}^d$ , који садржи координатним почетком у својој унутрашњости, придружује нови политоп  $P^\circ$  тако што хиперравни које ограничавају  $P$  постају темена у  $P^\circ$  и обрнуто. Другим речима, поларност размењује улоге темена и максималних лица политопа. За пермутоедар  $\Pi_{k-1}$  важи да је његов полар  $\Pi_{k-1}^\circ$  симплицијални комплекс, при чему су темена  $\Pi_{k-1}$  у бијекцији са максималним симплексима из  $\Pi_{k-1}^\circ$ .

**Дефиниција 2.4.2** (уређена партиција скупа). Нека је  $S$  скуп. **Партиција скупа**  $S$ , у ознаци  $\pi = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ , је подела скупа  $S$  на непразне, дисјунктне подскупе  $P_i \subseteq S$ , тако да је  $P_i \cap P_j = \emptyset$  за сваки  $i \neq j$  и  $S = \bigsqcup_{i=1}^m P_i$ . **Уређена партиција скупа** је партиција  $\pi = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  чији су блокови  $P_i$  међусобно уређени неком релацијом  $\preceq$ , тако да важи

$$P_1 \preceq P_2 \preceq \dots \preceq P_m.$$

Приметимо да свака (неуређена) партиција  $\pi = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  одређује тачно  $m!$  различитих уређених партиција.

Партиције можемо класификовати као **финије** или **грубље**. На пример, за скуп  $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k > 7$ :

- Најфинија партиција је  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{k\}\}$ ,
- Грубља партиција може бити, на пример,  $\{\{1, 3\}, \{2\}, \dots, \{5, 7, k\}\}$ ,
- Најгрубља партиција је  $\{\{1, 2, \dots, k\}\}$ , тј. цео скуп.

Испоставиће се да је начин на који смо конструисали тонац  $Ton^{n,k}(L)$  условио то да сваком максималном симплексу, тј. симплексу димензије  $k - 1$ , одговара циклична класа тачно једне најфиније уређене партиције скупа  $[k]$ . Размотримо пример ради илустрације.

**Пример 2.4.1.** Нека је дат наш класични дурски трозвук

$$\{v_0, v_1, v_2\} = \{0, 4, 7\},$$

односно један 2-симплекс класичног тонца  $Ton^{12,3}(L)$ ,  $L = (l_1, l_2, l_3) = (3, 4, 5)$ . Посматрајмо како дужински вектор  $L$  учествује у конструисању овог симплекса.

1. од  $v_0$  до  $v_1$  долазимо додавањем дужине  $l_2$ , јер важи  $v_1 \equiv_n v_0 + l_2$ ,
2. од  $v_1$  до  $v_2$  долазимо додавањем дужине  $l_1$ , јер важи  $v_2 \equiv_n v_1 + l_1$ ,
3. од  $v_2$  до  $v_0$  долазимо додавањем дужине  $l_3$ , јер важи  $v_0 \equiv_n v_2 + l_3$ .

На овај начин, у виду блокова  $\{\{l_2\}, \{l_1\}, \{l_3\}\}$ , формирана је једна најфинија уређена партиција скупа  $L$ . Када кажемо да овом 2-симплексу одговара уређена партиција скупа  $[3]$ , мислимо на уређену партицију  $\{\{2\}, \{1\}, \{3\}\}$ , насталу користећи само индексе који одговарају дужинама  $l_i$ .

Читава циклична класа ове партиције задаје акорд истог типа, у овом случају дурског. Заиста,  $\{\{1\}, \{3\}, \{2\}\}$  задаје први, а  $\{\{3\}, \{2\}, \{1\}\}$  други обртај дурског квинтакорда. То је управо читава циклична класа партиције из  $[3]$  која одговара нашем 2-симплексу. Приметимо да циклична класа супротне оријентације, тј. класа одређена партицијом  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ , задаје молски трозвук као и све његове обртаје.

Додатно, размотримо и лица нижих димензија нашег дурског трозвука  $\{0, 4, 7\}$ . Двозвуке, односно 1-симплексе, добијамо тако што од најфиније партиције правимо грубље, пратећи оријентацију симплекса.

- ивица  $\{v_0, v_1\} = \{0, 4\}$  (велика терца) одговара партицији  $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$ , јер је  $v_1 \equiv_n v_0 + l_2$ , а  $v_0 \equiv_n v_1 + (l_1 + l_3)$ ,
- ивица  $\{v_1, v_2\} = \{4, 7\}$  (мала терца) одговара партицији  $\{\{1\}, \{3, 2\}\}$ ,
- ивица  $\{v_2, v_0\} = \{7, 0\}$  (кварта) одговара партицији  $\{\{3\}, \{2, 1\}\}$ .

Такође, и овде приметимо да, нпр. за  $\{v_0, v_1\} = \{0, 4\}$  (велика терца), партиција супротне оријентације је  $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$  и она почевши од неког произвољног темена задаје интервал мале сексте. Што сигурно није случајност, с обзиром да су велика терца и мала секста једна другој музички инверзне.

Произвољном темену увек одговара најгрубља партиција  $\{\{1, 2, 3\}\}$ , која је на неки начин аналогна функцији идентитета, јер фиксира теме.

Напомена: за максималне симплексе увек користимо најфинију партицију, јер само она има смисла да раздвоји симплексе супротне оријентације, тј. у овом случају молске и дурске акорде.

Инспирисани овим запажањем дефинишемо посет (*eng. partial order set*), а одмах потом и посет лица симплицијалног комплекса.

**Дефиниција 2.4.3** (посет). Нека је дат скуп  $S$  и нека је  $\preceq$  бинарна релација на том скупу. Уређен пар  $(S, \preceq)$  називамо **посет** (парцијално уређен скуп) ако су испуњена следећа својства:

(рефлексивност)  $(\forall x \in S) x \preceq x$ ,

(антисиметричност)  $(\forall x, y \in S) (x \preceq y \wedge y \preceq x) \Rightarrow x = y$ ,

(транзитивност)  $(\forall x, y, z \in S) (x \preceq y \wedge y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$ .

За елементе  $x, y \in S$  кажемо да су **упоредиви** ако важи  $x \preceq y$  или  $y \preceq x$ , а у супротном кажемо да су **неупоредиви**.

**Дефиниција 2.4.4** (посет свих лица комплекса). Нека је  $K$  симплицијални комплекс. **Посет лица комплекса**  $K$ , у ознаци  $\mathcal{F}(K)$ , дефинишемо као парцијално уређен скуп чији су елементи сва лица комплекса  $K$  (укључујући празан скуп), а релација је дата са:

$$\sigma \preceq \tau \iff \sigma \subseteq \tau.$$

**Дефиниција 2.4.5** (посет лица симплекса). Нека је  $K$  симплицијални комплекс и  $\sigma$  његов  $d$ -симплекс. **Посет лица симплекса**  $\sigma$ , у ознаци  $\mathcal{F}(\sigma)$ , дефинишемо као парцијално уређен скуп чији су елементи сва лица симплекса  $\sigma$ , са релацијом:

$$\alpha \preceq \beta \iff \alpha \subseteq \beta,$$

где  $\alpha, \beta$  означавају лица симплекса  $\sigma$ .

## Теорема: Тонац је повезана комбинаторна многострукост

Спремни смо да формално покажемо то да је тонац  $\text{Ton}^{n,k}(L)$  повезана комбинаторна многострукост. Доказ ћемо спровести по угледу на [1]. Кроз овај доказ ћемо увидети то како структура линкова темена тонца одражава веома лепу везу са пермутоедром, што омогућава прецизно описивање локалне структуре тонца.

**Теорема 2.4.1** ([1]).  *$\text{Ton}^{n,k}(L)$  је повезана, комбинаторна многострукост уколико је дужински вектор  $L = (l_1, \dots, l_k)$  редукован и генерички у смислу дефиниција 1.1 и 1.2. Штавише, линкови темена су изоморфни границама симплицијалних полиедра дуалних  $(k-1)$ -димензионом пермутоедру.*

**Доказ:** Нека је  $v \in \text{Ton}^{n,k}(L)$  произвољно теме тонца. Желимо да покажемо да је линк темена  $v$ , тј.  $\text{Link}(v)$ , хомеоморфан затвореном  $(k-1)$ -диску или  $(k-1)$ -сфери, чиме ћемо доказати да је тонац комбинаторна многострукост.

Приметимо да је посет свих лица отворене звезде  $\text{star}(v)$  изоморфан посету свих уређених партиција скупа  $[k]$ :

$$\mathcal{F}(\text{star}(v)) \cong \mathcal{F}([k]),$$

при чему највише димензиони симплекси одговарају најфинијим партицијама скупа  $[k]$ . Сада ћемо то и доказати.

Сваком максималном симплексу тонца одговара тачно једна, и то најфиније уређена партиција скупа  $[k]$  (као пример погледати 2.4.1). Заиста, када је  $\sigma \in \text{star}(v)$  максимални симплекс, тј.  $\sigma = \{v, v + l_1, \dots, v + l_1 + \dots + l_{k-1}\}$ , за њему одговарајућу партицију узимамо  $\pi = \{\{1\}, \dots, \{k\}\}$ .

Редослед блокова  $\{l_j\}$  у партицији зависи искључиво од редоследа по коме су у симплексу додаване дужине  $l_j$  и на тај начин су сви максимални симплекси у кореспонденцији са њима одговарајућим најфинијим партицијама скупа  $[k]$ . Укупан број максималних симплекса у  $\text{star}(v)$ , односно максималних симплекса који садрже теме  $v$ , једнак је броју пермутација координата вектора  $L = (l_1, \dots, l_k)$  и тај број износи  $k!$ , те добијамо баш  $1-1$  кореспонденцију.

Даље, нека је сада  $\tau \in \text{star}(v)$  симплекс чија је димензија мања од  $k-1$ , тј.  $\tau = \{v_0, v_1, \dots, v_{t-1}\}$ ,  $t < k$ . Симплекс  $\tau$  ће за интервал између својих суседних темена на бар једном месту имати збир који се састоји од више од једне дужине  $l_j$  скупа  $L$ . Прецизније,  $v_{i+1} - v_i = \sum_{j \in I_i} l_j$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, t-1\}$ , где блок  $I_i$  сачињавају индекси одговарајућих дужина које је потребно сабрати да би се од темена  $v_i$  стигло до темена  $v_{i+1}$  (теме након  $v_{t-1}$  дефинишимо као  $v_t := v_0$ ). Међутим, како је у питању симплекс који није максималан, постојаће неко  $i \in \{0, \dots, t-1\}$  за које је  $|I_i| \geq 2$ . Сваком таквом симплексу одговара јединствено уређена партиција  $\pi = \{I_0, I_1, \dots, I_{t-1}\}$ , а која је наравно грубља од најфиније партиције.

Није тешко показати да је укупан број симплекса димензије  $t-1$  у отвореној звезди  $\text{star}(v)$  једнак  $S(k, t) \cdot t!$ , где је  $S(k, t)$  Стирлингов број друге врсте, тј. број начина да се скуп  $[k]$  подели на  $t$  блокова без обзира на редослед тих блокова, а број могућих редоследа блокова је онда покривен са  $t!$  (нпр.

за  $t = 1$ , приметимо да у отвореној звезди  $star(v)$  лице које је теме може бити само  $\tau = v$  и њему ће одговарати јединствена најгрубља партиција  $\pi = \{\{1, 2, \dots, k\}\}$ .

Добијамо да је укупан број лица отворене звезде  $star(v)$  једнак  $\sum_{t=1}^k S(k, t) \cdot t!$ , а то је и укупан број партиција у посету  $[k]$ , чиме добијамо једнозначну кореспонденцију и самим тим  $\mathcal{F}(star(v)) \cong \mathcal{F}([k])$ .

Постоји још једна, нама од пресудног значаја, једнозначна кореспонденција: Посет лица  $(k-1)$ -димензионог пермутоедра  $\Pi_{k-1}$  је такође изоморфан посету свих уређених партиција  $[k]$ :

$$\mathcal{F}(\Pi_{k-1}) \cong \mathcal{F}([k]),$$

али сада са обрнутим уређењем, односно сада теменима пермутоедра одговарају најфиније партиције из  $[k]$ , а највише димензионом подполитоу из  $\mathcal{F}(\Pi_{k-1})$  одговара најгрубља партиција  $\pi = \{\{1, 2, \dots, k\}\}$ . Дакле,

$$\mathcal{F}(star(v)) \cong \mathcal{F}(\Pi_{k-1})$$

Нека је  $\Pi_{k-1}^\circ$  симплицијални политоп поларан пермутоедру  $\Pi_{k-1}$ , тада је

$$star(v) \cong \Pi_{k-1}^\circ$$

Познато је да је граница  $d$ -димензионог политопа тополошки једнака  $(d-1)$ -сфери, те добијамо да је

$$Link(v) = \partial star(v) \cong \partial \Pi_{k-1}^\circ \cong S^{k-2}$$

чиме смо показали да је тонац  $Ton^{n,k}(L)$  једна комбинаторна многострукост.

Сада ћемо показати и повезаност  $Ton^{n,k}(L)$ .

Темена су елементи скупа  $\mathbb{Z}_n$ , те је довољно пронаћи пут који повезује два произвољна и узастопна темена  $v$  и  $v+1$ . Својство генеричности вектора  $L$  нам даје то да је  $\text{НЗД}(n, l_1, \dots, l_k) = 1$ , те постоје  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$  такви да је  $a_1 l_1 + \dots + a_k l_k \equiv_n 1$ . Пут од  $v$  до  $v+1$  се добија управо као линеарна комбинација ових дужина, јер је  $v+1 \equiv_n v + (a_1 l_1 + \dots + a_k l_k)$ , што показује повезаност.  $\square$

Приметимо да је у случају тонца као симплицијалног комплекса,  $Link(v)$  увек сфера, док је  $star(v)$  увек затворени  $(k-1)$ -диск.

Такође, ту је још једно лепо својство:

$$Link(\tau) \cong \partial\Pi_{|I_0|-1}^\circ * \dots * \partial\Pi_{|I_{t-1}|-1}^\circ \cong S^{|I_0|-2} * \dots * S^{|I_{t-1}|-2} \cong S^d$$

које нам даје да је линк симплекса изоморфан тополошком споју (*engl. join*) граница симплицијалних политопа, што додатно потврђује да је локална структура  $Ton^{n,k}(L)$  у потпуности усклађена са понашањем комбинаторних многострукости. Такође, тај линк тополошки увек видимо као сферу  $S^d$  већ познате димензије

$$d = \sum_{i=0}^{t-1} (|I_i| - 2) + (t - 1) = \sum_{i=0}^{t-1} |I_i| - 2t + t - 1 = k - t - 1.$$

## Глава 3

# Тополошка структура тонца

У овом поглављу разматрамо тополошку структуру генерализованог тонца  $Ton^{n,k}(L)$  и показујемо да он представља тријангулацију торуса  $T^{k-1}$ . Користићемо и показати неке од резултата радова [1],[2],[4] и [7].

Поглавље започињемо детаљном анализом нама најпознатијег случаја тонца  $T_1 = Ton^{12,3}(3, 4, 5)$ , те га користимо као конкретан и илустративан пример дводимензионог музичког комплекса чија геометријско-тополошка структура открива многе особине генерализованог тонца  $Ton^{n,k}(L)$ .

У другој секцији проширујемо анализу на све могуће дводимензионе случаје. Примећујемо да само они тонци који имају генерички и редукован дужински вектор  $L$  имају тополошки тип торуса, док сви остали имају другачије и разноврсније тополошке структуре.

Затим, уопштавамо простор на димензију  $k$  и служимо се алатима симплицијалне хомологије. Показујемо да је фундаментална група генерализованог тонца слободна Абелова и да је Ојлерова карактеристика тонца увек 0. Наводимо геометријско-тополошку интерпретацију тонца као дискретног модела Јакобијан структуре, а која нас доводи до жељене тријангулације.

### 3.1 Тонац $Ton^{n,3}(L)$ је тријангулација торуса

Радимо са компактном дводимензионом површи, те подсетимо се централног резултата који повезује три фундаменталне инваријанте: оријентабилност, број граничних компоненти и Ојлерову карактеристику.

**Теорема 3.1.1. [Теорема о класификацији површи].** *Две дводимензионе компактне површи (са или без границе) су хомеоморфне ако и само ако се њодугарају по оријентабилности, броју граничних компоненти и Ојлеровој карактеристици.*

Ова теорема представља основни резултат у топологији површи, јер омогућава њихову потпуну класификацију. За торус знамо да је компактна и оријентабилна дводимензиона површ без границе чија је Ојлерова карактеристика 0. Уколико покажемо да исто важи и за  $Top^{n,3}(L)$  добићемо хомеоморфизам између тонца и тријангулисане структуре тонца.

## Оријентација у комплексу

У сваком коначно-димензионом реалном векторском простору постоје тачно две оријентације: позитивна и негативна. Узмимо за пример простор  $\mathbb{R}^d$ . Група свих инвертибилних линеарних трансформација  $GL(d, \mathbb{R})$  је подељена на две компоненте  $GL^+(d, \mathbb{R})$  и  $GL^-(d, \mathbb{R})$ , прву чине матрице са позитивном детерминантом, а другу са негативном, те оне дају базу позитивне и негативне оријентације.

Сваки симплекс  $\sigma$  индукује два оријентисана симплекса  $\sigma$  и  $-\sigma$ , а дефинишемо их као две класе еквиваленције које произлазе из скупа свих пермутација над линеарно уређеним скупом темена.

Нека је дат комплекс  $K$  и његов  $p$ -симплекс  $\sigma$ . Ако скуп темена симплекса  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$  посматрамо као линеарно уређен скуп, онда свака пермутација  $s : \{0, 1, \dots, p\} \rightarrow \{s(0), s(1), \dots, s(p)\}$  одговара једном уређеном низу темена симплекса  $\sigma$ , при чему укупно постоји  $(p+1)!$  таквих пермутација.

Ове пермутације можемо поделити у тачно две класе еквиваленције, и то на основу парности пермутације. Две пермутације  $s_1$  и  $s_2$  припадају истој класи ако је композиција  $s_2^{-1} \circ s_1$  парна пермутација, односно ако се разликују за парну пермутацију. Подсетимо, парна пермутација је она која се може изразити као производ парног броја транспозиција.

**Дефиниција 3.1.1** (оријентисан симплекс). Нека је дат  $p$ -симплекс  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ . Оријентација симплекса је избор једне од укупно две класе редоследа темена у симплексу. Два редоследа се сматрају еквивалентним уколико је редослед темена једног у односу на други достигнут парним бројем

пермутација, а аналогно уколико је непарна. Прву класу називамо **оријентисан симплекс позитивне оријентације** и њен представник је

$$(v_0, v_1, \dots, v_{p-1}, v_p),$$

а другу класу називамо **оријентисани симплекс негативне оријентације** и њен представник је

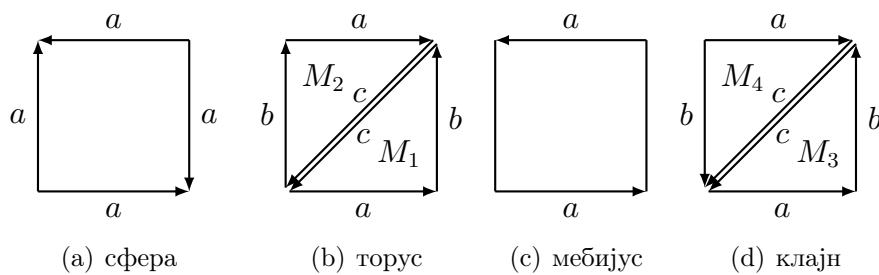
$$(v_1, v_0, \dots, v_{p-1}, v_p).$$

Означаваћемо  $(v_1, v_0, \dots, v_p) = -(v_0, v_1, \dots, v_p)$ .

**Дефиниција 3.1.2.** Нека су  $M_1, M_2 \subseteq \mathcal{M}$  два региона, сваки хомеоморфан отвореном диску у  $\mathbb{R}^n$ , која наслеђују оријентацију. Кажемо да су региони  $M_1$  и  $M_2$  **компатибилни** уколико индукују исту оријентацију на свим својим заједничким подрегионима.

**Дефиниција 3.1.3** (оријентабилна површ). Површ  $\mathcal{M}$  је **оријентабилна** уколико је могуће доделити оријентацију сваком њеном региону тако да су било која два преклапајућа региона компатибилна.

Оријентабилност је инваријанта хомеоморфизма, па су све површи подељене у две класе: оријентабилне и неоријентабилне. Типични примери оријентабилних површи су *сфера* и *торус*, док су класични примери неоријентабилних површи *Мебијусова шрака* и *Клајнова боца*.



Слика 3.1: Пример оријентабилних и неоријентабилних површи.

Укратко, симплицијални комплекс је оријентабилан ако је могуће изабрати оријентацију лица тако да свака ивица комплекса буде заступљена тачно једном у сваком правцу унутар одабране оријентације. Другим речима, постоји глобални избор оријентације лица који је компатибилан на свим ивицама комплекса. Из примера видимо да је торус оријентабилан, јер када одаберемо

глобалну оријентацију, нпр. супротну смеру казаљке на сату, онда смо региону  $M_1 = abc$  доделили позитивну оријентацију, а региону  $M_2^{-1} = bac$  негативну оријентацију, међутим они су компатибилни, јер су сва њихова преклапајућа лица, тј. странице  $a, b$  и  $c$  исте оријентације.

Ако не постоји такав избор, односно ако неке ивице морају бити „двоструко“ заступљене у истом смеру, комплекс је неоријентабилан. Ово показује да оријентабилност није само питање броја лица или ивица, већ и начина на који се лица повезују и како се дефинише њихова оријентација.

**Дефиниција 3.1.4** (подударање по оријентацији). Нека су  $M_1$  и  $M_2$  две компактне површи, са или без границе. Кажемо да се  $M_1$  и  $M_2$  **подударају по оријентацији** ако је могуће изабрати оријентације за њих тако да сваки хомеоморфизам између одговарајућих региона сачува оријентацију.

У пракси, то значи:

- ако је  $M_1$  оријентабилна, онда је и  $M_2$  оријентабилна са истом оријентацијом;
- ако је  $M_1$  неоријентабилна, онда је и  $M_2$  неоријентабилна и сви локални региони се подударају по оријентацији.

У раду се нећемо бавити површима са границом, међутим прокоментаришимо структуру и те површи. Тополошка површ са границом је повезана 2-многострукост чији се део тачака пресликава у границу полу-простора  $\mathbb{H}$ . Тачке које се при сваком координатном пресликавању шаљу у границу називају се *граничне тачке* површи. Површ са границом  $M$  је оријентабилна акко је њена унутрашњост  $\partial M$  оријентабилна. Оријентација унутрашњости површи диктира и оријентацију границе.

**Тврђење 3.1.1.** Тонац  $T_1 = T(3, 4, 5)$  нема граничних компоненти.

**Доказ:** У тонцу  $T_1$  доделимо позитивну оријентацију молским троугловима  $(v, v + 3, v + 7)$ , а негативну свим дурским троугловима  $(v, v + 4, v + 7)$ . Нека је дата ивица  $\{v_i, v_j\}$ , где је без умањења општости  $v_j = v_i + 7$ . С обзиром на конструкцију тонца, у њему постоје тачно један дурски и један молски троугао који деле ову ивицу и они су редом,  $(v_i, v_i + 4, v_j)$  и  $(v_i, v_i + 3, v_j)$ . С тога, свака ивица је део тачно два 2-симплекса. Дакле,  $T_1$  је без граничних ивица, односно нема границу.  $\square$

Једна од кључних тополошких инваријанти која омогућава класификацију компактних површи јесте *Ојлерова карактеристика*.

**Дефиниција 3.1.5.** Ојлерова карактеристика симплицијалног комплекса  $K$ , у ознаци  $\chi$ , дефинише се као

$$\chi(K) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i,$$

где  $f_i$  означава број  $i$ -симплекса у комплексу  $K$ .

Информацију о броју свих симплекса у  $(k-1)$ -димензионом комплексу  $K$  носи тзв. *f-вектор*, који се записује као  $f(K) = (f_0, f_1, \dots, f_{k-1})$ . За дводимензионе комплексе број темена означавамо са  $V$ , број ивица са  $E$ , а број максималних лица са  $F$  и њих често називамо и странама. Важи  $\chi = V - E + F$ .

**Тврђење 3.1.2.** Нека је  $L = (l_1, l_2, l_3)$  *генерички и редукван вектор дужина*. Тада одговарајући дводимензиони генерализовани тонац  $Ton^{n,3}(L)$  представља *тријангулацију дводимензионог тора*  $T^2$ .

**Доказ:** Показали смо да је сваки генерализовани тонац повезана многострукост, те ће то важити и за дводимензиони тонац  $T_1 = Ton^{n,3}(L)$ . Преостаје нам да испитамо његову Ојлерову карактеристику, оријентабилност и број граничних компоненти.

Без умањења општости, нека је  $l_1 < l_2 < l_3$ . Израчунајмо *f*-вектор тонца  $f(T) = (f_0, f_1, f_2)$ . По дефиницији тонца, јасно је да је број темена једнак  $n$ , те имамо  $f_0 = n$ .

Максималне симплексе видимо као троуглове и они падају у две класе:

$$T_I = \{ \{v, v + l_1, v + l_1 + l_2\} \mid v \in \mathbb{Z}_n \},$$

$$T_{II} = \{ \{v, v + l_2, v + l_1 + l_2\} \mid v \in \mathbb{Z}_n \}.$$

Посматрајмо прву класу, тј. све троуглове облика  $\{v, v + l_1, v + l_1 + l_2\}$ . Када  $v$  прође кроз цео скуп  $\mathbb{Z}_n$ , он ће обезбедити  $n$  различитих троуглова. Заиста, за  $v = 0$  имамо први троугао  $\{0, l_1, l_1 + l_2\}$ . Када се при транслагацији за неко  $v = k$ ,  $k \in [n-1]$ , поново достигне 0 на неком другом темену, нпр.  $v + l_1 \equiv_n 0$ , треће теме ће бити  $v + l_1 + l_2 \equiv_n l_2$ , а прво  $v \equiv_n v + n = v + (l_1 + l_2 + l_3) = (v + l_1) + l_2 + l_3 \equiv_n 0 + l_2 + l_3 = l_2 + l_3$ . Добијамо троугао  $\{l_2 + l_3, 0, l_2\}$  чија темена никако не могу бити иста као у троуглу  $\{0, l_1, l_1 + l_2\}$ , јер је  $l_1 < l_2$  и  $l_1 < l_2 + l_3$ ,

те не може бити једнако ни једном од њих. Аналогно, ако узмемо да се при истој транслацији  $v = k$ , 0 достигла на трећем темену, тј.  $v + l_1 + l_2 \equiv_n 0$ , добија се троугао  $\{l_3, l_3 + l_1, 0\}$  и важи исти коментар.

На потпуно исти начин добијамо да и друга класа  $T_{II}$  садржи тачно  $n$  различитих троуглова.

Класе су међусобно дисјунктне, тј. ни један троугао из класе  $T_I$  није једнак ни једном троуглу из класе  $T_{II}$ , јер су  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , међусобно различити бројеви. Добијамо да је

$$f_2 = 2n.$$

Како је свака ивица тонца садржана у тачно два троугла, број ивица добијамо као:

$$f_1 = \frac{3 \cdot f_2}{2} = \frac{3 \cdot 2n}{2} = 3n.$$

Дакле,  $f$ -вектор је  $f(T) = (n, 3n, 2n)$ , те Ојлерова карактеристика тонца износи

$$\chi(T) = V - E + F = n - 3n + 2n = 0.$$

Покажимо сада да је тонац  $T$  оријентабилна површ. Потребно је пронаћи доследну оријентацију свих 2-симплекса, тј. одабрати оријентацију троуглова тако да она буде компатибилна на заједничким ивицама.

Оријентисане ивице троуглова можемо означити са  $\alpha_{ij}$ , што би означило да је то ивица која почиње у темену  $v_i$  и завршава се у темену  $v_j$ . Троуглови у тонцу који деле заједничку ивицу потичу из различитих класа  $T_I$  и  $T_{II}$ . Доделимо позитивну оријентацију троугловима прве класе и нека је  $\sigma_1 = (v_0, v_1, v_2) = \alpha_{01}\alpha_{12}\alpha_{20} \in T_I$  произвољан. Узмимо произвољан 2-симплекс  $\sigma_2 \in T_{II}$  који дели заједничку ивицу са њим. Нека је нпр. њихова заједничка ивица  $\{v_0, v_2\}$ , онда је  $\sigma_2 = \{v_0, v_2, v_3\}$ . Ако троугловима друге класе доделимо негативну оријентацију, добијамо  $\sigma_2 = (v_0, v_3, v_2) = \alpha_{03}\alpha_{32}\alpha_{20}$ , те је оријентација компатибилна на њиховој заједничкој ивици  $\alpha_{20}$ . Аналогно ће исто важити и за ма који други троугао који дели неку од преосталих ивица са троуглом  $\sigma_1$ . На овај начин смо успели да доделимо оријентацију тонцу  $\text{Ton}^{n,3}(L)$ .

Како је свака страница садржана у тачно два 2-симплекса, ниједна неће представљати границу, те тонац  $T_1$  нема граничних компоненти.

По теореме о класификацији компактних површи наш тонац  $\text{Ton}^{n,3}(L)$  заиста јесте хомеоморфан торусу  $T^2$ .  $\square$

## 3.2 Сви 2-комплекси тонац-типа

У претходној секцији смо разматрали пример  $Ton^{12,3}(L)$  са редукованим и генеричким вектором дужина  $(3, 4, 5)$ , где је показано да је тонац повезана и оријентабилна површ са Ојлеровом карактеристиком  $\chi = 0$ , што нам је омогућило да закључимо да је торус.

У овој секцији, претећи резултате рада [4], разматрамо произвољни дводимензиони тонац  $Ton^{n,3}(L)$ , где је  $n$  било који природан број, а вектор дужина  $L = (l_1, \dots, l_k)$  нема услове за редукованост или генеричност. То значи да тонац можда није повезан, не мора садржати све тонове скале, а могући дупликати у  $L$  утичу на број троуглова и ивица. У зависности од односа дужина у  $L$ , добијамо различите тополошке типове: оријентабилне и неоријентабилне површи, као што су *Мебијусова шрака*, *цилиндар*, *шроуџао* или површи са више компоненти. На основу ових рачуна и критеријума оријентабилности можемо дати комплетну класификацију свих могућих дводимензионих тонаца. То је први корак ка разумевању општих  $(k - 1)$ -димензионих тонаца и њихових тополошких структура.

Наш циљ је да систематски израчунамо број ивица и троуглова у тонцима  $Ton^{n,3}(L)$ , за  $n \in \mathbb{N}$ , и да на основу тога одредимо Ојлерову карактеристику

$$\chi(T) = V - E + F.$$

С тога, потребно нам је да знамо колико темена, ивица и страна имају тонци, односно симплицијални комплекси које будемо испитивали.

Број темена комплекса  $T(L)$  ће увек бити  $V = n$ , те израчунајмо прво број ивица  $E$ . Разврстајмо све ивице у три скупа, тако да сваки скуп садржи само оне ивице које су представљене истом дужином  $l_i$ :

$$L_1 = \{\{v, v + l_1\} \mid v \in \mathbb{Z}_n\},$$

$$L_2 = \{\{v, v + l_2\} \mid v \in \mathbb{Z}_n\},$$

$$L_3 = \{\{v, v + l_3\} \mid v \in \mathbb{Z}_n\}.$$

**Лема 3.2.1** ([4]). *Нека је даи вектор дужина  $L = (l_1, l_2, l_3)$ , шакав да је  $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 < n$  и  $l_1 + l_2 + l_3 = n$ . Тада је:*

$$1) \ l_1 < \frac{n}{2} \text{ и } l_2 < \frac{n}{2},$$

$$2) \ l_3 = l_1 + l_2 \text{ ако } l_3 = \frac{n}{2},$$

$$3) \ |L_1| = |L_2| = n, \text{ а } |L_3| = \begin{cases} n & \text{за } l_3 \neq l_1 + l_2 \\ \frac{n}{2} & \text{за } l_3 = l_1 + l_2. \end{cases}$$

**Доказ:**

1) Из услова  $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 < n$  добијамо  $2l_1 \leq 2l_2 \leq l_2 + l_3 < l_1 + l_2 + l_3 = n$ , те  $l_1 < \frac{n}{2}$  и  $l_2 < \frac{n}{2}$ .

2) Имамо да је  $l_1 + l_2 + l_3 = n$ , те из  $l_3 = l_1 + l_2$  добијамо  $2l_3 = l_3 + l_3 = (l_1 + l_2) + l_3 = n$  тј.  $l_3 = \frac{n}{2}$ . Обрнуто, нека је  $l_3 = \frac{n}{2}$ , одмах добијамо  $l_3 = l_1 + l_2$ , јер је  $n = l_1 + l_2 + l_3$ .

3) По дефиницији  $L_1 = \{\{v, v + l_1\} \mid v \in \mathbb{Z}_n\}$ . Уколико су сви  $\{v, v + l_1\} \in L_1$  међусобно различити, добијамо да је  $|L_1| = |\mathbb{Z}_n| = n$ . Претпоставимо супротно, нека постоје  $u, w \in \mathbb{Z}_n$ ,  $u \neq w$ , такви да је  $\{u, u + l_1\} = \{w, w + l_1\}$ . Како први елементи нису једнаки, мора важити да је  $u = w + l_1$ . Добијамо  $\{w, w + l_1\} = \{u, u + l_1\} = \{w + l_1, w + 2l_1\}$ , те мора бити  $w = w + 2l_1$ , односно  $2l_1 = n$  што је у контрадикцији са 1)  $l_1 < \frac{n}{2}$ . Аналогно добијамо да је  $|L_2| = n$ .

Покажимо сада да је  $|L_3| = \frac{n}{2}$  када је  $l_3 = l_1 + l_2$ . У делу 2) смо показали да је тада  $l_3 = \frac{n}{2}$ , те имамо да је  $L_3 = \{\{v, v + \frac{n}{2}\} \mid v \in \mathbb{Z}_n\}$ . Када је  $0 \leq v < \frac{n}{2}$  сви  $\{v, v + \frac{n}{2}\}$  су међусобно различити. Међутим, када је  $\frac{n}{2} \leq v < n$  важиће да је  $v = \frac{n}{2} + (v - \frac{n}{2}) = i + \frac{n}{2}$ , где  $i = v - \frac{n}{2}$  и  $0 \leq i < \frac{n}{2}$ . С тога, имамо  $\{v, v + \frac{n}{2}\} = \{i + \frac{n}{2}, i + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\} \equiv_n \{i + \frac{n}{2}, i\}$ , те су сви ови случајеви подударни случају када је  $0 \leq v < \frac{n}{2}$ , односно за  $\frac{n}{2} \leq v < n$  нема нових ивица  $\{v, v + l_3\}$ , те је  $|L_3| = \frac{n}{2}$ . У случају када је  $l_3 \neq l_1 + l_2$ , аналогним рачуном којим смо показали  $|L_1| = n$ , добијамо да је  $l_3 = \frac{n}{2}$  што је у контрадикцији са делом под 2), те мора важити да је  $|L_3| = n$ .  $\square$

Погледајмо сада у табели како се број ивица  $E$  мења у зависности од односа између дужина  $l_1, l_2$  и  $l_3$

| случајеви                                | $ L_1 $ | $ L_2 $ | $ L_3 $       | $E =  L_1 \cup L_2 \cup L_3 $     |
|------------------------------------------|---------|---------|---------------|-----------------------------------|
| $l_1 < l_2 < l_3$ и $l_3 \neq l_1 + l_2$ | $n$     | $n$     | $n$           | $3n$                              |
| $l_1 < l_2 < l_3$ и $l_3 = l_1 + l_2$    | $n$     | $n$     | $\frac{n}{2}$ | $\frac{5n}{2}$                    |
| $l_1 = l_2 < l_3$ и $l_3 \neq l_1 + l_2$ | $n$     | $n$     | $n$           | $L_1 = L_2 \implies 2n$           |
| $l_1 = l_2 < l_3$ и $l_3 = l_1 + l_2$    | $n$     | $n$     | $\frac{n}{2}$ | $L_1 = L_2 \implies \frac{3n}{2}$ |
| $l_1 < l_2 = l_3$                        | $n$     | $n$     | $n$           | $L_2 = L_3 \implies 2n$           |
| $l_1 = l_2 = l_3$                        | $n$     | $n$     | $n$           | $L_1 = L_2 = L_3 \implies n$      |

Преостаје да израчунамо и број страна  $F$ . У овом случају то су сви 2-симплекси које наравно геометријски визуализујемо као троуглове. Поделићемо их у две класе:

$$T_I = \{\{v, v + l_1, v + l_1 + l_2\} \mid v \in \mathbb{Z}_n\},$$

$$T_{II} = \{v, v + l_2, v + l_1 + l_2\} \mid v \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Приметимо да је друга класа добијена од прве релацијом инверзије, односно симетрије у односу на осу  $\{v, v + l_1 + l_2\}$ .

**Тврђење 3.2.1** ([4]). 1) Уколико је  $l_1 = l_2 = l_3$ , њага је  $F = \frac{n}{3}$ ,

2) Уколико је  $l_1 < l_2 < l_3$ , њага је  $F = 2n$ ,

3) Уколико је  $l_1 = l_2 < l_3$  или  $l_1 < l_2 = l_3$ , њага је  $F = n$ .

**Доказ:**

1) У овом случају имамо само једну класу  $T = \{\{v, v + l_1, v + 2l_1\} \mid v \in \mathbb{Z}_n\}$ , а тврђење директно следи из форме троугла  $\{v, v + l_1, v + 2l_1\}$ . Тако састављен, он представља један косет  $v + \langle l_1 \rangle$  у  $\mathbb{Z}_n$ , јер је  $3l_1 \equiv_n 0$ . Како је  $l_1 = \frac{n}{3}$ , следи да таквих косета има  $\frac{n}{3}$ .

2) Доказ смо већ спровели у 3.1.2 када смо показали да је  $Ton^{n,3}$  тријангулација торуса.

3) Нека је прво  $l_1 = l_2 < l_3$ . Очигледно су обе класе троуглова исте, јер је разлика у класи само оријентација, тј. да ли додајемо прво  $l_1$  или  $l_2$ , а како су те дужине исте, класе су подударне. Исто важи и за случај  $l_1 < l_2 = l_3$ , само га треба видети уз одговарајућу транслацију елемената сваке класе. Заиста, посматрајмо  $\{v, v + l_1, v + l_1 + l_2\}$ . Желимо да имамо

бољи увид у дужине  $l_2$  и  $l_3$ , с тога ћемо транслатирати темена за  $l_2 + l_3$ , те добијамо  $\{v + l_2 + l_3, v + l_1 + l_2 + l_3, v + l_1 + l_2 + l_2 + l_3\} \equiv_n \{v + l_2 + l_3, v, v + l_2\} = \{v, v + l_2, v + l_2 + l_3\}$ . Слично, када  $\{v, v + l_2, v + l_1 + l_2\}$  транслирамо за  $l_3$ , добијамо  $\{v, v + l_3, v + l_2 + l_3\}$ . Закључујемо да су класе и у овом случају подударне.

Класа даје  $n$  различитих троуглова, доказ је као у делу под 2), а с обзиром да су класе подударне, то је и њихов укупан број.  $\square$

Допунимо сада табелу са свим информацијама из којих директно рачунамо Ојлерову карактеристику:

| случајеви                                | $V$ | $E$            | $F$           | $\chi$        |
|------------------------------------------|-----|----------------|---------------|---------------|
| $l_1 < l_2 < l_3$ и $l_3 \neq l_1 + l_2$ | $n$ | $3n$           | $2n$          | $0$           |
| $l_1 < l_2 < l_3$ и $l_3 = l_1 + l_2$    | $n$ | $\frac{5n}{2}$ | $2n$          | $\frac{n}{2}$ |
| $l_1 = l_2 < l_3$ и $l_3 \neq l_1 + l_2$ | $n$ | $2n$           | $n$           | $0$           |
| $l_1 = l_2 < l_3$ и $l_3 = l_1 + l_2$    | $n$ | $\frac{3n}{2}$ | $n$           | $\frac{n}{2}$ |
| $l_1 < l_2 = l_3$                        | $n$ | $2n$           | $n$           | $0$           |
| $l_1 = l_2 = l_3$                        | $n$ | $n$            | $\frac{n}{3}$ | $\frac{n}{3}$ |

Када применимо теорему о класификацији површи добија се следећа табела која приказује како изгледа једна компонента повезаности тонца којег разматрамо.

| случајеви                                                 | компонента повезаности тонца $T(L)$                        |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $l_1 < l_2 < l_3$ и $l_3 \neq l_1 + l_2$                  | торус                                                      |
| $l_1 < l_2 < l_3$ и $l_1 + l_2 = l_3 = \frac{n}{2}$       | циклус од $\frac{l_1 + l_2}{(l_1, l_2)}$ граница тетраедра |
| $l_1 = l_2 < l_3$ и $l_3 \neq l_1 + l_2$ , $n$ је парно   | цилиндар                                                   |
| $l_1 = l_2 < l_3$ и $l_3 \neq l_1 + l_2$ , $n$ је непарно | Мебијусова трака                                           |
| $l_1 = l_2 < l_3$ и $l_1 + l_2 = l_3 = \frac{n}{2}$       | граница тетраедра                                          |
| $l_1 < l_2 = l_3$ и $n$ је парно                          | цилиндар                                                   |
| $l_1 < l_2 = l_3$ и $n$ је непарно                        | Мебијусова трака                                           |
| $l_1 = l_2 = l_3$                                         | 2-симплекс                                                 |

Напоменимо да када вектор  $L$  није редукован и генерички, комплекс тонца не само да не мора да буде тополошки једнак торусу, већ не мора да буде ни повезан, те смо у табели посматрали само једну компоненту повезаности.

### 3.3 Хомологија тонца

Желимо да покажемо да је Тонац тополошки једнак тријангулацији торуса и то за произвољан избор поделе лествице на  $n$  делова и димензију  $k$ , односно број тонова у акорду. Да бисмо стигли до таквог закључка потребно је да прво испитамо одређена тополошка својства Тонца, те ћемо их у овом поглављу прво дефинисати, а потом и описати у терминима Тонца.

**Дефиниција 3.3.1** (фундаментална група). Нека је  $X$  тополошки простор и нека је  $x_0 \in X$  произвољно одабрана тачка. **Фундаментална група** простора  $X$  у базној тачки  $x_0$ , у ознаци  $\pi_1(X, x_0)$ , дефинише се као скуп свих класа хомотопије затворених путева у  $X$  који почињу и завршавају се у  $x_0$ .

$$\pi_1(X, x_0) = \{ [\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X, \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \} / \simeq,$$

где је  $\gamma_1 \simeq \gamma_2$  ако постоји пресликавање  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  које континуално деформише пут  $\gamma_1$  у пут  $\gamma_2$ , тако да важи:

$$H(t, 0) = \gamma_1(t), \quad H(t, 1) = \gamma_2(t), \quad H(0, s) = H(1, s) = x_0.$$

Затворене путеве  $\gamma$  називамо **петљама**. Операција групе је дата у виду узастопног спајања петљи, односно њихових класа  $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1\gamma_2]$ . Неутрални елемент је класа константне петље  $c_{x_0} : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $c_{x_0}(t) = x_0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . Инверз петље  $\gamma$  је петља  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ .

Погледајмо сада како геометријски визуализујемо петље и фундаменталну групу симплицијалних комплекса, а одмах потом и тонца  $T_1 = Ton^{12,3}(3, 4, 5)$ .

**Дефиниција 3.3.2** (фундаментална група комплекса). Нека је  $K$  симплицијални комплекс, а  $|K|$  његова геометријска реализација. **Фундаментална група комплекса**  $\pi_1(K)$  дефинише се као фундаментална група тополошког простора  $|K|$ , односно

$$\pi_1(K) := \pi_1(|K|).$$

Сваку петљу у  $|K|$  можемо хомотописати у 1-скелет  $|K^{(1)}|$ , тако да генератори фундаменталне групе потичу од ивица  $K^{(1)}$ , док релације међу њима одговарају границама свих 2-симплекса у  $K$ . Стога је фундаментална група одређена 2-скелетом комплекса:

$$\pi_1(K) \cong \langle \text{ивице } K^{(1)} \mid \partial(\sigma), \sigma \in K^{(2)} \rangle.$$

Разлог за узимање само 1-скелета је тај што све петље у комплексу могу бити репрезентоване ивицама, а виши симплекси уводе само релације између тих петљи. Комбинаторно,  $\pi_1(K)$  се може описати на следећи начин:

генератори су оријентисане ивице  $\alpha_{ij} = (v_i, v_j)$ , а релације потичу из сваког оријентисаног 2-симплекса  $(v_i, v_j, v_k)$  у облику  $\alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ik}^{-1} = 1$ . Ово значи да је сваки троугао контрактибилан унутар комплекса.

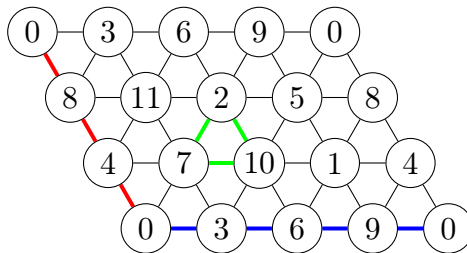
Означимо са  $\alpha_i$  ивицу  $(v, u)$  којој је додељена дужина  $l_i$  тако да је  $u = v + l_i$ . Тада сваку петљу можемо једнозначно означити са  ${}_v\alpha_i^{r_i}$ , где  $v$  представља теме од ког полазимо, а  $\alpha_i$  тип стране по којој се непрекидно крећемо у истом правцу  $r_i$  пута.

**Тврђење 3.3.1.** *Циклови  ${}_v\alpha_i^{r_i}$  и  ${}_u\alpha_i^{r_i}$  припадају истој хомолошкој класи.*

Доказ: Потребно је показати да се ова два циклуса разликују за тривијалан циклус. Ако је  $u = v$ , доказ је завршен. Претпоставимо да је  $v = u + l_j$ , тј. да се од темена  $u$  до темена  $v$  долази страницом  $\alpha_j$ . Тада је  ${}_u(\alpha_j)_v(\alpha_i^{r_i})_v(\alpha_j^{-1})_u$  један циклус који је хомологан циклусу  ${}_v\alpha_i^{r_i}$ , јер се од њега разликује за тривијалан циклус  ${}_u(\alpha_j)_v(\alpha_j^{-1})_u$ .

Међутим, уочени циклус је хомологан и циклусу  ${}_u\alpha_i^{r_i}$ , јер је  ${}_u(\alpha_j)_v(\alpha_i^{r_i})_v(\alpha_j^{-1})_u = {}_u(\alpha_i^{r_i})_u(\alpha_j)_v(\alpha_j^{-1})_u = {}_u\alpha_i^{r_i}$ . Добијамо да је у овом случају  ${}_vE^r \approx {}_u\alpha_i^{r_i}$ .

Пошто је у доказу да је тонац повезана многострукост показано да се од било ког темена до било ког другог стиже линеарном комбинацијом страница, итеративним спровођењем овог поступка долазимо до краја доказа за било која два темена  $u$  и  $v$ .



Слика 3.2: Тонац  $T_1 = T^{12,3}(3, 4, 5)$  и пример на ком видимо разлику између његових генераторских и тривијалних петљи.

**Пример 3.3.1.** На слици 3.2 видимо тонац  $Ton^{12,3}(L)$ . Подсетимо се да овакву мрежу тонца јасно сагледавамо као тријангулацију која се састоји од 24

троуглова који представљају све дурске и молске акорде у хроматској лествици. Како је сваки од бројева  $v \in \mathbb{Z}_n$  тачно једном садржан у оваквој мрежи (на границама су идентификована темена), ово ће бити баш и фундаментални домен тонца  $T_1$ . Хоризонтални ред темена, рецимо  $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 0$ , представља петљу  $\gamma_h$ . Вертикална колона, рецимо  $0 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 0$ , представља петљу  $\gamma_v$ . Петља која обилази било који троугао (2-симплекс), нпр.  $\{7, 10, 2\}$ , је граница 2-симплекса и тиме тривијална у  $\pi_1(T)$ , јер се континуалном деформацијом кроз симплекс може контраховати у тачку. Петље  $\gamma_h$  и  $\gamma_v$  нису границе 2-симплекса, па представљају нетривијалне елементе фундаменталне групе.

$$\pi_1(T_1) \cong \langle \gamma_h, \gamma_v \mid \gamma_h \gamma_v \gamma_h^{-1} \gamma_v^{-1} = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Ово показује да су генератори  $\gamma_h$  и  $\gamma_v$  довољни да опишу све петље у фундаменталној групи.

**Хомогеност генерализованог тонца.** Хомогеност нам интуитивно представља својство да је свака тачка површи налик на било коју другу тачке те површи. Формалније, тонац је хомоген у  $n$ -симплексима ако за свака два  $n$ -симплекса  $\sigma$  и  $\sigma'$  постоји аутоморфизам који пресликава  $\sigma$  у  $\sigma'$ .

Хомогеност међу темама видимо одмах, јер је  $T_{j-i}(i) = j$ , где је  $T_{j-i}$  транспозиција која теме  $v_i$  пресликава у  $v_j$  и обрнуто. Ово нам показује да је довољно анализирати било које теме да бисмо описали сва остала темена тонца.

Слично важи и за 2-симплексе (максималне  $k - 1$  симплексе), јер се користећи елементе групе  $T/I$ , односно транслације и инверзије, лако долази од једног до било ког другог максималног симплекса. Нека су  $\sigma$  и  $\sigma'$  два 2-симплекса. Уколико су исте оријентације, довољна је примена транслације. Ако су различите оријентације, инверзијом се  $\sigma$  пресликава у  $-\sigma$ , симплекс супротне оријентације; како су онда  $-\sigma$  и  $\sigma'$  исте оријентације, примењујемо транслацију на  $-\sigma$  и долазимо до  $\sigma'$ . У последњем поглављу ћемо то формално и показати.

**Тврђење 3.3.2.** *Када је  $L$  вектор генерички и редукван, тада је фундаментална група генерализованог тонца  $\pi_1(\text{Ton}^{n,k}(L))$  абелова.*

Доказ: Без обзира у којој се димензији налазили, можемо да опишемо тонац, односно све петље на тонцу, локално — преко 2-симплекса (мреже тријангулације)

и 1-симплекса (скелета тонца који нам описује путеве). Све релације у  $\pi_1(Ton^{n,k}(L))$  настају из локалних петљи које се затварају унутар истог 2-симплекса тј. троугла, па се целокупна структура фундаменталне групе може описати преко тих локалних конфигурација. Свака петља  $\gamma$  из  $\pi_1(Ton^{n,k}(L))$  има свој локални помак који се огледа на неком 2-симплексу, односно троуглу, и ако посматрамо симплекс  $\{v_i, v_j, v_k\}$ , нека су ти локални помераји трију петљи означени са  $\alpha_{ij} = v_i \rightarrow v_j$ ,  $\alpha_{jk} = v_j \rightarrow v_k$  и  $\alpha_{ik} = v_i \rightarrow v_k$ . Посебно, ако посматрамо троугао  $\{v_i, v_j, v_k\}$  који представља један 2-симплекс тонца, онда локалне петље  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{jk}$  и  $\alpha_{ik}$  задовољавају релацију

$$\alpha_{ij}\alpha_{jk} \simeq \alpha_{ik},$$

што одговара сабирању вектора у  $\mathbb{Z}^k$ . Овакве локалне релације довољне су да опишу фундаменталну групу целог тонца, без потребе да се разматрају све могуће глобалне петље у комплексу.  $\square$

Приметимо да, по дефиницији мреже тонца, када се полазећи од неког темена  $v_0$  крећемо у истом правцу страницом дужине  $l_i$ , после коначног броја страница, тачније после  $r_i$  страница, враћамо се у почетно теме  $v_0$ . Управо тај пут представља један цикл који није граница, тј. цикл који припада хомолошкој групи  $H_1$  тонца.

Број  $r_i \in [12]$  је ред броја  $l_i$  у  $n$ , тј. најмањи такав да важи  $l_i \cdot r = 0 \pmod{12}$  и  $r \neq 0$ .

**Дефиниција 3.3.3** ( $p$ -цикл и  $p$ -граница). Нека је  $K$  симплицијални комплекс,  $p$ -ланчани простор  $C_p(K)$  је векторски простор над  $\mathbb{Z}$  чију базу чине оријентисани  $p$ -симплекси комплекса  $K$ .

$$C_p(K) = \left\{ \sum_i a_i \sigma_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i \text{ оријентисани } p\text{-симплекси} \right\}.$$

Елементе простора  $C_p(K)$  називамо  $p$ -ланцима.

Нека је дат  $p$ -симплекс  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ , **гранично пресликавање**  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  дефинишемо са

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p],$$

где  $\hat{v}_i$  означава да је теме  $v_i$  изостављено.

Ланац  $c \in C_p(K)$  називамо **цикл** уколико је  $\partial_p(c) = 0$ . Скуп свих  $p$ -циклова

означавамо са  $Z_p(K) = \ker \partial_p$ .

Ланац  $b \in C_p(K)$  називамо **граница** ако постоји  $a \in C_{p+1}(K)$  са  $\partial_{p+1}(a) = b$ .

Скуп свих  $p$ -граница означавамо са  $B_p(K) = \text{im } \partial_{p+1}$ .

Увек важи да је  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ . Из претходног, свака  $p$ -граница је такође и  $p$ -цикл, јер је  $B_p(K)$  подгрупа групе  $Z_p(K)$ .

Поједностављено, цикл је „затворени“ ланчани елемент, а граница је „цикл који је граница нечега већег“. Фундаментални резултат  $\partial^2 = 0$  осигурава да је свака граница цикл:  $B_p(K) \subseteq Z_p(K)$ .

**Дефиниција 3.3.4** ( $p$ -та хомолошка група).  $p$ -та хомолошка група симплицијалног комплекса  $K$  је количничка група

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K).$$

**Пример 3.3.2** (Хомологија тонца). За класични Тонац  $T(3, 4, 5)$ ,  $H_0(T(3, 4, 5)) \cong \mathbb{Z}$ , а  $H_1(T(3, 4, 5)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , што одговара типичној хомологији торуса.

Важи да је  $C_p(K)$  увек слободна Абелова група. Одговарајући елементарни ланци чине базу за  $C_p(K)$ . Ако је  $f_p$  број  $p$ -симплекса у  $K$ , тада важи да је  $C_p(K) = \mathbb{Z}^{f_p}$ .

**Пример 3.3.3** (Пример  $p$ -ланаца у  $T_1$ ). Погледајмо фундаментални домен тонца  $T_1$ . 1-ланац видимо као низ ивица које формирају пут кроз суседна темена. На пример, хоризонтална „змијица“ кроз прва четири реда темена:  $c_1 = \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_9 + \alpha_0$ , где је  $\alpha_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  хоризонтална ивица у фундаменталном домену. Ово је 1-ланац  $c_1 \in C_1(T(3, 4, 5))$ . Ако ланац почиње и завршава на истом темену, граница  $\partial_1(c_1)$  може бити нула (цикл) или дати нетривијалан елемент  $H_1(T(3, 4, 5))$  ако не постоји троугао који затвара те ивице.

2-ланац је скуп суседних троуглова у фундаменталном домену. На пример, три суседна троугла која чине малу површ:  $c_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , где су  $\sigma_i$  2-симплекси са теменима  $\sigma_1 = \{0, 3, 8\}$ ,  $\sigma_2 = \{3, 6, 11\}$ ,  $\sigma_3 = \{6, 9, 2\}$ . Ово је 2-ланац  $c_2 \in C_2(T(3, 4, 5))$ . Граница  $\partial_2(c_2)$  је ланац од ивица које чине границу тих троуглова.

**Ојлерова карактеристика тонца  $Ton^{n,k}(L)$** 

Покажимо сада да својство Ојлерове карактеристике 0 има и тонац произвољне димензије  $k - 1$ .

**Тврђење 3.3.3** ([1]). *Ојлерова карактеристика тонца  $Ton^{n,k}(L)$  је 0, под условом да је вектор  $L$  генерички и редукван.*

**Доказ:** Означимо  $T = Ton^{n,k}(L)$  и нека је  $f(T) = (f_0, f_1, \dots, f_{k-1})$   $f$ -вектор тонца, тада је

$$f_{m-1} = n \frac{P(k, m)}{m} = n \frac{m!}{m} S(k, m),$$

где је  $P(k, m)$  број уређених партиција  $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m = [n]$ , а  $S(k, m)$  Стирлингов број друге врсте. Заиста, у доказу теореме 2.4.1 смо већ показали да је број  $(m-1)$ -симплекса у звезди  $star(v)$  једнак  $m!S(k, m)$  за неко произвољно теме  $v$  тонца  $T$ . Да бисмо добили укупан број  $(m-1)$ -симплекса у читавом комплексу тонца, број симплекса у произвољној звезди морамо помножити са  $n$ , тј. бројем свих темена у тонцу, а потом поделити са  $m$ , јер је то број темена  $(m-1)$ -симплекса, а не желимо више пута да бројимо исти симплекс.

Ојлерова карактеристика тонца тада износи

$$\chi(T) = n \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m+1} m!}{m} S(k, m).$$

Користећи својство Стирлинговог броја, важи:

$$S(k, m) = mS(k-1, m) + S(k, m-1),$$

сада имамо

$$\begin{aligned} \chi(T) &= n \left( \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m+1} m!}{m} mS(k-1, m) + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m+1} m!}{m} S(k, m-1) \right) \\ &= n \left( \sum_{m=1}^k (-1)^{m+1} m! S(k-1, m) + \sum_{q=0}^{k-1} (-1)^{q+1} q! S(k-1, q) \right) \\ &= n \left( (-1)^{k+1} k! S(k-1, k) - S(k, 0) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

### 3.4 Генерализовани тонац $Ton^{n,k}(L)$ је тријангулација торуса

**Теорема 3.4.1** ([1]). *Нека је колекција  $L = \{l_i\}_{i=1}^k$  генеричка и редукована. Генерализовани тонац  $Ton^{n,k}(L)$  представља тријангулацију  $(k - 1)$ -димензионог торуса*

$$T^{k-1} := (S^1)^{k-1}.$$

Главна идеја у доказу ове теореме јесте да идентификујемо тријангулисани торус  $T^{k-1} \cong \mathbb{R}^{k-1}/\Lambda$  као комбинациони Јакобијан, односно као слику дискретног Абел–Јакоби пресликавања

$$J : Ton^{n,k}(L) \longrightarrow \mathbb{R}^{k-1}/\Lambda,$$

где је  $\Lambda \cong \mathbb{A}_{k-1}^*$  хермитоведарска решетка.

До сада смо показали да је генерализовани тонац  $Ton^{n,k}(L)$  повезана, комбинаторна многострукост чија је Ојлерова карактеристика једнака нули. Показали смо и да је његова фундаментална група Абелова, те је она једнака његовој првој хомолошкој групи  $H_1(Ton^{n,k}, \mathbb{Z})$ . Све то наравно важи под условом да је  $L$  редукован и генерички вектор. Сви ови кораци у доказу ове теореме нас приближавају структури торуса  $(S^1)^{k-1}$ .

Детаљан опис Абел–Јакоби пресликавања са којим успостављамо жељени хомеоморфизам, као и комплетан доказ да је тонац тријангулација торуса, у овом раду не излажемо у целости - он се може наћи у [1].

## Глава 4

# Алгебарска структура тонаца

Испоставља се да за трозвучне акорде и хроматску лествицу постоје и друге торус мреже које описују акорде, различите од класичних молских и дурских структура. У математичком смислу то значи да за  $Ton^{n,k}(L)$ , када је  $n = 12$  и  $k = 3$ , поред  $T_1 = Ton^{12,3}(3, 4, 5)$ , постоји још тонаца који задовољавају услов да је дужински вектор  $L$  редукован и генерички, а сви они се могу свести на следећих пет облика:

$$L_1 = (3, 4, 5), \quad L_2 = (2, 3, 7), \quad L_3 = (1, 4, 7), \quad L_4 = (1, 3, 8), \quad L_5 = (1, 2, 9),$$

док њима одговарајуће тонце означавамо са:

$$T_i = Ton^{12,3}(L_i), \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Посебно је занимљиво то што је један од ових тонаца  $T_i$ ,  $i \neq 1$ , изоморфан класичном Ојлеровом тонцу  $T_1$ , над којим је вековима грађена и постављена традиционална музичка теорија.

Резултати изложени у овом поглављу заснивају се на самосталном истраживању аутора овог рада и представљају допринос теми генерализованих тонаца.

### 4.1 Изоморфизми између тонаца

**Дефиниција 4.1.1** (симплицијално пресликавање). Нека су  $K_1$  и  $K_2$  два симплицијална комплекса. **Симплицијално пресликавање** комплекса  $K_1$  у комплекс  $K_2$  јесте функција

$$f : V(K_1) \rightarrow V(K_2),$$

таква да за сваки симплекс  $\sigma \in K_1$  важи  $f(\sigma) \in K_2$ .

Другим речима, пресликавање је симплицијално уколико се форма симплекса чува при том пресликавању, односно уколико симплексе слика у симплексе.

Приметимо да дефинисано симплицијално пресликавање не мора да чува димензију симплекса, па се симплекс више димензије може пресликати у симплекс ниже димензије. Да бисмо то избегли, уводимо:

**Дефиниција 4.1.2** (симплицијални изоморфизам). Нека су  $K_1$  и  $K_2$  два симплицијална комплекса, и нека је  $f : V(K_1) \rightarrow V(K_2)$  симплицијално пресликавање. Кажемо да је  $f$  **симплицијални изоморфизам**, односно да је комплекс  $K_1$  изоморфан комплексу  $K_2$  ( $K_1 \cong K_2$ ), ако је  $f$  бијекција и њен инверз  $f^{-1}$  је такође симплицијално пресликавање.

Нека су  $T$  и  $T'$  два изоморфна  $k$ -димензиона тонца. Да би бијективна функција  $f \in S_{\mathbb{Z}_n}$ ,  $f : V(T) \rightarrow V(T')$  између тонаца  $T$  и  $T'$  била симплицијални изоморфизам, потребно је и довољно да она услови јединствено пресликавање  $h : L \rightarrow L'$  са којим ће се дужински вектор  $L$  тонца  $T$  пресликати у дужински вектор  $L'$  њему изоморфног тонца  $T'$ . Заиста, у доказу о томе да је тонац комбинаторна многострукост, показали смо да је структура сваког симплекса једнозначно одређена партицијама из  $[k]$ , односно партицијама скупа  $L$ . Самим тим, како структуру симплекса одређује искључиво скуп  $L$  то ће бијективним пресликавањем она бити пренета и у  $T'$ .

Опишимо још нека својства које треба да задовољи изоморфизам  $f$ . Темена се морају бијективно пресликати, што је дефинисано, те за следећи потребан услов можемо да узмемо то да се ма који 1-симплекс преслика поново у 1-симплекс, односно да се два суседна темена  $v$  и  $v + l$  која су образовала ивицу тонца  $T$ , пресликају поново у два суседна темена која ће сачинити ивицу и у тонцу  $T'$ . Овакав услов можемо задати тиме да за свако  $v \in \mathbb{Z}_n$  и за свако  $l \in L$ , разлика  $f(v + l) - f(v)$  мора бити једнака некој дужини из  $L'$ , односно по претходном, неком  $l' = h(l)$ .

**Дефиниција 4.1.3** (фамилија  $\mathcal{F}_L^n$ ). Нека је  $L = \{l_1, \dots, l_k\}$  редукован и генерички скуп дужина за које важи  $l_1 + \dots + l_k = n$ . Дефинишимо:

$$\mathcal{F}_L^n := \{ f \in S_{\mathbb{Z}_n} \mid (\exists h : L \rightarrow \mathbb{Z}_n)(\forall l \in L)(\forall v \in \mathbb{Z}_n) f(v + l) - f(v) = h(l) \}.$$

На овакав начин добијамо све бијективне функције  $h : L \rightarrow \mathbb{Z}_n$  које су кандидати да се дужински вектор  $L$  преслика у дужински вектор  $L'$ , те

самим тим добијамо и кандидате  $f \in \mathcal{F}_L^n$  за симплицијални изоморфизам између тонаца  $T$  и  $T'$ .

Скуп  $\mathcal{F}_L^n$  је подскуп скупа свих пермутација  $S_{\mathbb{Z}_n}$ , те је за сада број његових елемената ограничен бројем  $n!$ , што је за веће вредности  $n$  изузетно велики број. Међутим, испоставља се да је број чланова скупа  $\mathcal{F}_L^n$  много мањи.

Дефинисања и основна тврђења апстрактне алгебре која користимо у раду се могу наћи у [8].

**Дефиниција 4.1.4** (мултипликативна група модула  $n$ ). Нека је  $n \in \mathbb{N}$ . **Мултипликативна група модула  $n$** , у ознаци  $\mathbb{Z}_n^\times$ , је скуп свих инвертибилних елемената у прстену  $\mathbb{Z}_n$ ,

$$\mathbb{Z}_n^\times := \{ a \in \mathbb{Z}_n \mid \text{НЗД}(a, n) = 1 \}.$$

Овај скуп са операцијом множења по модулу  $n$  чини абелову групу и број елемената ове групе називамо **Ојлеровом функцијом**  $\varphi(n) := |\mathbb{Z}_n^\times|$ .

Функција  $\varphi(n)$  је мултипликативна. За прост број  $p$  важи  $\varphi(p) = p - 1$  и  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$ . За велике бројеве, њу најлакше рачунамо директно као  $\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ , где је  $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ .

**Дефиниција 4.1.5.** (афина група) Група свих пермутација  $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$  које чувају цикличну структуру групе  $\mathbb{Z}_n$  је **афина група**

$$Aff(\mathbb{Z}_n) := \{ f_{s,t} \in S_{\mathbb{Z}_n} \mid f_{s,t}(v) = sv + t, s \in \mathbb{Z}_n^\times, t \in \mathbb{Z}_n \}.$$

Број елеменат групе увек износи  $|Aff(\mathbb{Z}_n)| = n\varphi(n)$ .

Функцију идентитета  $\mathbb{I}(x) = x$  можемо да означимо са  $f_{1,0}$ , док је инверзна функција од  $f_{s,t}$  најчешће  $f_{s^{-1}, -s^{-1}t}$ . Када је јасно о којој функцији  $f_{s,t}$  је реч, често пишемо само  $f$ .

Афину групу видимо и као семидиректан производ група  $Aff(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_n^\times$ , јер је  $f_{s_1, t_1} \circ f_{s_2, t_2} = f_{s_1 s_2, s_1 t_2 + t_1}$ .

**Тврђење 4.1.1** (група  $Aff(\mathbb{Z}_{12})$ ).  $|Aff(\mathbb{Z}_{12})| = 48$  и важи:

$$Aff(\mathbb{Z}_{12}) = \langle \tau, s_i, s_j \mid \tau^{12} = id, s_i^2 = s_j^2 = id, s_i \tau s_i = \tau^i, s_j \tau s_j = \tau^j, s_i s_j = s_j s_i \rangle.$$

**Доказ:** Мултипликативна група  $\mathbb{Z}_{12}^\times = \{1, 5, 7, 11\}$  има један тривијалан елемент реда 1 и три елемента реда 2, те је изоморфна Клајновој групи  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Добијамо да је  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_n^\times = \mathbb{Z}_n \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ , те закључујемо да је  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_{12})$  генерисана са три различите функције, а одговарајуће релације међу њима дате су са:

$$\text{Aff}(\mathbb{Z}_{12}) = \langle \tau, s_i, s_j \mid \tau^{12} = id, s_i^2 = s_j^2 = id, s_i \tau s_i = \tau^i, s_j \tau s_j = \tau^j, s_i s_j = s_j s_i \rangle,$$

где најчешће узимамо  $\tau(v) = v + 1$ ,  $s_i(v) = iv$ ,  $s_j(v) = jv$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{5, 7, 11\}$ .

Заиста, нека су без умањења општости  $\tau(x) = x + 1$ ,  $s_1(x) = 5x$  и  $s_2(x) = 11x$ . Онда  $\langle \tau, s_1, s_2 \rangle$  садржи све транслације  $x \mapsto x + t$  и све трансформације  $x \mapsto sx + t$ ,  $s \in \{1, 5, 11\}$ . Остаје да се покаже да су и трансформације са  $s = 7$  садржане у овој групи. За свако  $t \in \mathbb{Z}_{12}$  важи  $(t \circ (s_1 \circ s_2))(x) = t(55x) = 55x + t \equiv_{12} 7x + t$ . Дакле, сваки елемент облика  $7x + t$  се добија као композиција  $t$  и  $(s_1 \circ s_2)$ , што показује да је  $\langle \tau, s_1, s_2 \rangle = \text{Aff}(\mathbb{Z}_{12})$ . Такође, приметимо да овакав избор генератора није јединствен.

Кардиналност групе  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_{12})$  лако видимо из облика њених функција и претходне анализе, међутим већ смо рекли да број њених елемената можемо сачунати као  $12\varphi(12) = 12 \cdot 4 = 48$ .  $\square$

Тврдимо да је скуп  $\mathcal{F}_L^n$  група и то баш једнака дефинисаној афиној групи.

**Теорема 4.1.1.** *Нека је  $L = \{l_1, \dots, l_k\}$  редукован и генерички скуп дужина за које важи  $l_1 + \dots + l_k = n$ . Тада је:  $\mathcal{F}_L^n = \text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ .*

**Доказ:** Покажимо прво  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_n) \subseteq \mathcal{F}_L^n$ . Нека је  $f \in \text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ , тј. нека је  $f(v) = sv + t$ , где су  $s \in \mathbb{Z}_n^\times, t \in \mathbb{Z}_n, v \in \mathbb{Z}_n$ . Желимо да покажемо да израз  $f(v + l) - f(v)$  зависи само од  $l$ . Заиста,

$$f(v + l) - f(v) = (s(v + l) + t) - (sv + t) = sl,$$

а познато је и својство да су функције афине групе бијекције, с обзиром да  $s \in \mathbb{Z}_n^\times$ .

Покажимо сада обрнуто, да је  $\mathcal{F}_L^n \subseteq \text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ . Нека је  $f \in \mathcal{F}_L^n$ , тада постоји функција  $h : L \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $h(l) = f(v + l) - f(v)$ . Желимо да покажемо да је  $f(v) = sv + t$ , за неке  $s \in \mathbb{Z}_n^\times, t \in \mathbb{Z}_n$ , те када би узели  $t = f(0)$ , преостало би да покажемо да је  $f(v) - f(0) = sv$ , за неко  $s \in \mathbb{Z}_n^\times$ . Дефинишимо зато  $g(v) := f(v) - f(0)$ . Тада је  $g(v + l) - g(v) = f(v + l) - f(v) = h(l)$  и  $g(0) = 0$ .

Покажимо да је  $h$  један хомоморфизам. Заиста,

$$f(v + l_1 + l_2) - f(v) = (f(v + l_1 + l_2) - f(v + l_1)) + (f(v + l_1) - f(v)) = h(l_2) + h(l_1),$$

те добијамо да је  $h$  хомоморфизам над својим доменом  $L$ . Проширимо сада  $h$  на целу цикличну групу, тј. нека је  $h(k) = f(v + k) - f(v)$ , за  $k \in \mathbb{Z}_n$ . Како  $L$  генерише групу  $\mathbb{Z}_n$ , добијамо да је  $h$  хомоморфизам и над целом  $\mathbb{Z}_n$ . Сваки хомоморфизам цикличне групе  $h : (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$  је облика  $h(k) = sk$ ,  $s \in \mathbb{Z}_n$ , па за свако  $k \in \mathbb{Z}_n$  имамо

$$g(k) = g(0) + \sum_{i=1}^k (g(i) - g(i-1)) = \sum_{i=1}^k h(1) = k \cdot h(1) = ks,$$

те имамо  $g(v) = sv$ , за свако  $v \in \mathbb{Z}_n$ . Како је  $g$  бијекција, функција  $v \mapsto sv$  мора бити инјективна, што значи да је  $s$  такво да  $\text{НЗД}(s, n) = 1$ , тј.  $s \in \mathbb{Z}_n^\times$ . Коначно,

$$f(v) = g(v) + f(0) = sx + t,$$

те  $f \in \text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ , а самим тим и  $\mathcal{F}_L^n \subseteq \text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$  што нам заједно са првом инклузијом даје једнакост.  $\square$

Показано тврђење не само да нам је дало то да је фамилија  $\mathcal{F}_L^n$  група, већ нам је показало и да ова фамилија по само једној компоненти зависи од вектора  $L$ , а то је број  $n$ . Број  $n$  представља поделу октаве на  $n$  једнаких делова и одређује збир интервалских дужина из  $L$ . У складу са овим запажањем, када не желимо да истакнемо вектор  $L$ , користимо ознаку  $\mathcal{F}^n$  уместо  $\mathcal{F}_L^n$ .

**Последица 4.1.1.** Нека је  $L_1 = \{3, 4, 5\}$ . Група  $\mathcal{F}_{L_1}^n$  је генерисана функцијама  $\tau(x) = x + 1$ ,  $s_1(x) = 5x$  и  $s_2(x) = 11x$ , за које важи:

$$\mathcal{F}_{L_1}^n = \langle \tau, s_1, s_2 \mid \tau^{12} = id, s_1^2 = id, s_2^2 = id, \rangle$$

и број њених елемената износи  $|\mathcal{F}_{L_1}^n| = 48$ .

**Доказ:** Према управо доказаној теорему важи да је  $\mathcal{F}_{L_1}^n = \text{Aff}(\mathbb{Z}_{12})$ , а по показаном тврђењу 4.1.1 важи све остало.  $\square$

Ова последица нам говори да је број симплицијалних изоморфизама, који тонац  $T_1$  сликају у неки њему изоморфан тонац, једнак 48. Међу тим бројем су и сви аутоморфизми када се тонац слика сам у себе, те је следећа секција посвећена управо њиховом препознавању.

## 4.2 Група $\text{Aut}(Ton^{n,k}(L))$

**Дефиниција 4.2.1** (диедарска група). **Диедарска група**  $D_n$  је група која има тачно  $2n$  елемената и садржи елемент  $\tau$  реда  $n$  и елемент  $s$  реда 2, тако да важи релација  $s\tau s = \tau^{-1}$ . Она се експлицитно може записати као:

$$D_n = \langle \tau, s \mid \tau^n = id, s^2 = id, s\tau s = \tau^{-1} \rangle.$$

**Дефиниција 4.2.2** (орбита и стабилизатор). Уколико група  $G$  делује на скуп  $X$ , тада дефинишемо орбиту елемента  $x \in X$ , у ознаци  $\mathcal{O}(x)$ , као:

$$\mathcal{O}(x) = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X,$$

а стабилизатор елемента  $x$ , у ознаци  $\text{Stab}(x)$ , као:

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\} \leq G.$$

Кажемо да група  $G$  транзитивно делује на скупу  $X$  уколико постоји елемент  $x \in X$  такав да је  $\mathcal{O}(x) = X$ .

**Теорема 4.2.1** (Теорема о орбити и стабилизатору). *Нека коначна група  $G$  делује на скупу  $X$ , тада је за  $x \in X$*

$$|\mathcal{O}(x)| = [G : \text{Stab}(x)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}.$$

**Тврђење 4.2.1.** *Аутоморфизми тонца  $T_1 = T(3, 4, 5)$  чине групу*

$$\text{Aut}(T_1) = \langle \tau, s \mid \tau^{12} = id, s^2 = id, s\tau s = \tau^{-1} \rangle,$$

*иј. диедралну групу  $D_{12}$  реда 24. Група је генерисана транслацијом  $\tau(x) = x+1$  и рефлексijом  $s(x) = -x$ .*

**Доказ:** Доказ ћемо спровести применом теореме о орбити и стабилизатору. Све транслације  $\tau(x) = x + t$ ,  $t \in \mathbb{Z}_{12}$  чувају структуру тонца, па је група транслација  $\mathcal{T}$  подгрупа групе аутоморфизама. Такође, она елемент нпр. 0 пресликава јединствено у све друге елементе групе  $\mathbb{Z}_{12}$ , те нам даје и читаву орбиту елемента 0 и имамо  $|\mathcal{O}(0)| = |\mathcal{T}| = 12$ .

Размотримо сада инверзију  $s(x) = -x$ . Лако се проверава да она пресликава оба типа 2-симплекса

$$T_m = \{v, v+3, v+7\}, \quad T_d = \{v, v+4, v+7\}$$

један у други, те да је и  $s \in \text{Aut}(T)$ . Покажимо то. Нека је  $\{v, v+3, v+7\}$  симплекс молског типа, тада је  $s(\{v, v+3, v+7\}) = \{-v, -v-3, -v-7\} \equiv_{12} \{12-v, 9-v, 5-v\} = \{(5-v)+7, (5-v)+4, 5-v\} = \{v_1, v_1+4, v_1+7\}$ , за  $v_1 = 5-v$ . Аналогно се показује и пресликавање симплекса дурског типа у симплекс молског типа.

Покажимо сада да је стабилизатор темена 0 у  $\text{Aut}(T)$  баш подгрупа  $\{id, s\}$ . Прво, јасно је да аутоморфизми  $id$  и  $s$  јесу из групе стабилизатора елемента 0, јер је  $id(0) = 0$  и  $s(0) = -0 \equiv_{12} 0$ . Даље, звезду  $star(0)$  чине само они симплекси у тонцу који садрже теме 0, те је сагледавамо као шестоугао који се састоји од шест троуглова. Како тражимо све могуће пермутације из групе  $\text{Stab}(0)$ , јасно је да се троуглови из звезде  $star(0)$  сликају једни у друге, те праволинијским и рачунским испитивањем свих могућих комбинација добијамо да су једини елементи стабилизатора  $\text{Stab}(0) = \{id, s\}$ .

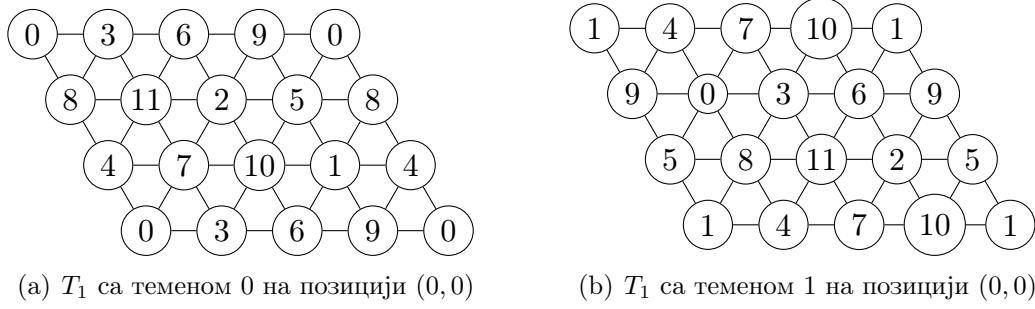
По теореме о орбити и стабилизатору важи да је

$$|\text{Aut}(T)| = |\mathcal{O}(0)| \cdot |\text{Stab}(0)| = 12 \cdot 2 = 24.$$

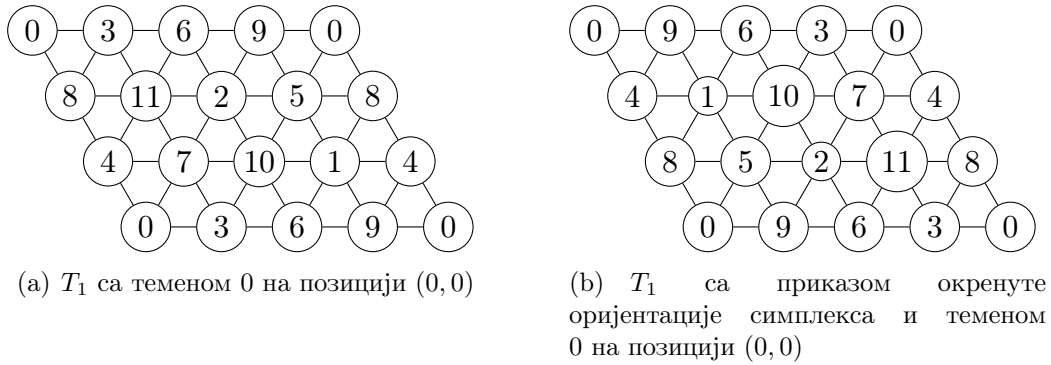
Релације између  $\tau$  и  $s$  су стандардне диедралне, дакле аутоморфизми формирају  $D_{12}$ . □

Добијене функције аутоморфизме ћемо обележавати са  $a_{s,t}$ , те за свако  $v \in \mathbb{Z}_{12}$  имамо  $\text{Aut}(T_1) = \{a_{1,t} : v \mapsto v+t \mid t \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{a_{-1,t} : v \mapsto -v+t \mid t \in \mathbb{Z}_n\}$ . На овај начин смо експлицитно поделили скуп свих аутоморфизама тонца  $T_3$  на оне који не мењају оријентацију симплекса, тј. када је  $s = 1$  и на оне који мењају оријентацију симплекса и тада је  $s = 11 \equiv_{12} -1$ . Функције стабилизатори из доказа су  $id = a_{1,0}$  и  $s = a_{-1,0}$ . Симетрија коју образују све функције је врло лепа и занимљива, те је можемо видети у следећој табlici. Илустративно, све аутоморфизме лако можемо да пребројимо и „дешке”, а да при том сликовито видимо која темена се сликају у која, служећи се следећом техником:

- 1) Аутоморфизме  $a_{1,t}$  цртамо тако што први тонац (из домена) увек остављамо фиксним са теменом 0 на позицији  $(0,0)$ , а други (из слике) ротирамо по хоризонталним и вертикалним петљама тако да теме  $t$  падне на позицију  $(0,0)$ . Пример је на слици 4.1.

Слика 4.1: Аутоморфизам  $a_{1,1}$  тонца  $T_1$ 

- 2) Аутоморфизам  $a_{-1,t}$  добијамо слично, с тим што тонац из слике цртамо са измењеном оријентацијом симплекса, тј. тако да вектор дужина  $L$  више нема помераје ”десно” за 3, ”горе лево” за 4 и ”доле лево” за 5 (видети геометријску визуелизацију вектора  $L$  у примеру 1.3), већ су помераји редом за  $9 \equiv_{12} -3$ ,  $8 \equiv_{12} -4$  и  $7 \equiv_{12} -5$ . На тај начин добијамо да темена симплекса из прве класе оријентације падну на позиције темена симплекса из друге класе оријентације, те се мења оријентација симплекса. Пример је на слици 4.2.

Слика 4.2: Аутоморфизам  $a_{-1,0}$  тонца  $T_1$ 

У музичком смислу, прва група аутоморфизама, тј. она која чува оријентацију, даје модулације у свих дванаест тоналитета. Док аутоморфизми друге групе скалу шаљу у њој ретроградну и транслирану. На крају овог рада дајемо табелу свих ових аутоморфизама из које се веома лако и брзо чита пресликавање темена, те композитори са лакоћом могу да је користе.

Слично се показује да је и група аутоморфизама сваког од тонаца  $T_2 = \text{Ton}^{12,3}(2, 3, 7)$ ,  $T_4 = \text{Ton}^{12,3}(1, 3, 8)$  и  $T_5 = \text{Ton}^{12,3}(1, 2, 9)$  такође диедрална група  $\mathcal{D}_{12}$ . Међутим, за тонац  $T_3 = \text{Ton}^{12,3}(1, 4, 7)$  је ситуација нешто другачија.

**Тврђење 4.2.2.** *Нека је  $T = \text{Ton}^{n,k}(L)$ . Важи да је  $\text{Aut}(T) \leq \text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ , као и да је  $\text{Aut}(T)$  стабилизатор тонца  $T$  у групи  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ , њ.*

$$\text{Aut}(T) = \text{Stab}(T).$$

**Доказ:** Сваки  $f \in \text{Aut}(T)$  је симплицијални изоморфизам  $f : V(T) \rightarrow V(T)$ , па припада групи  $\mathcal{F}^n$ , дакле  $\text{Aut}(T) \subseteq \mathcal{F}^n$ . Даље,  $\mathcal{F}^n$  делује на тонац  $T$  тако што чувајући структуру симплекса пермутује темена у симплексима, те је стабилизатор тонца  $T$  за то дејство управо  $\text{Stab}(T) = \{f \in \mathcal{F}^n \mid f(T) = T\} = \text{Aut}(T)$ . По општем својству групних дејстава, стабилизатор неког елемента, у овом случају читавог тонца  $T$ , је подгрупа, што завршава доказ, јер је  $\mathcal{F}^n = \text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ .  $\square$

**Тврђење 4.2.3.** *Нека је  $T_3 = \text{Ton}^{12,3}(1, 4, 7)$ . Група аутоморфизама тонца  $\text{Aut}(T_3)$  је цела афина група,*

$$\text{Aut}(T_3) = \text{Aff}(\mathbb{Z}_{12}).$$

која има  $|\mathbb{Z}_{12}^\times| \cdot |\mathbb{Z}_{12}| = 48$  елемената.

**Доказ:** Посматрајмо сада групу  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_{12})$  као скуп који садржи све функције облика  $f(v) = sv + t$ ,  $v \in \mathbb{Z}_{12}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_{12}^\times = \{1, 5, 7, 11\}$ ,  $t \in \mathbb{Z}_{12}$ .

Оријентацију симплекса чувају сви аутоморфизми који шаљу  $L_3 \mapsto L_3$ , тј. функције када је  $s = 1$  или  $s = 7$ . Заиста, за  $s = 1$  је тривијално, а за  $s = 7$  важи  $s \cdot L_3 = s \cdot (1, 4, 7) = (s, 4s, 7s) = (7, 28, 49) \equiv_{12} (7, 4, 1)$ , те поново имамо исти скуп разлика  $L_3 = \{1, 4, 7\}$ .

Међутим, тонац  $T_3$  је специфичан по томе што његов дужински вектор  $L_3$ , за преостале две јединице  $s = 5$  и  $s = 11$ , садржи исти скуп дужина  $\{1, 4, 7\}$  само ређаних у тону тако да вектор  $L_3$  буде супротне оријентације, те се мења оријентација симплекса. То видимо из тога што, нпр. за  $s = 5$  важи  $s \cdot L_3 = s \cdot (1, 4, 7) = 5 \cdot (1, 4, 7) \equiv_{12} (5, 8, 11) = (-7, -4, -1) = -(7, 4, 1)$ , дакле  $5 \cdot L_3 = -L_3$  (није нам важно на којој координати су величине). Аналогно важи и да је  $11 \cdot L_3 = -L_3$ . Тонац који образује дужински вектор  $L_3$  исти је као и онај

који образује дужински вектор  $-L_3$ , те су такве функције аутоморфизми, али са битном разликом што ће такве функције мењати оријентацију симплекса.

Све функције афине групе  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_{12})$  су:

$$\begin{aligned} s = 1 : & \quad x \mapsto x + b, \quad t = 0, \dots, 11, \\ s = 5 : & \quad x \mapsto 5x + b, \quad t = 0, \dots, 11, \\ s = 7 : & \quad x \mapsto 7x + b, \quad t = 0, \dots, 11, \\ s = 11 : & \quad x \mapsto 11x + b, \quad t = 0, \dots, 11, \end{aligned}$$

а оне су уједно и све из групе  $\text{Aut}(T_3)$  па укупно имамо  $|\mathbb{Z}_{12}^\times| \cdot |\mathbb{Z}_{12}| = 12 \cdot 4 = 48$  функција.  $\square$

Ова подела јасно показује који аутоморфизми чувају оријентацију, а који не. То нам је у музичком смислу веома важно, јер ће при аутоморфизмима који чувају оријентацију прва класа акорда ићи у прву класу акорда, а друга класа акорда у другу класу акорда, док ће код оних аутоморфизама који мењају ротацију прва класа акорда одлазити у другу и обрнуто. Транслације увек чувају оријентацију тонца, док мултипликатори  $\{1, 7\}$  стабилизују  $L_3 = \{1, 4, 7\}$ , а мултипликатори  $\{5, 11\}$  пресликавају  $L_3$  у  $-L_3$ . Тако се група  $\text{Aut}(T_3)$  од 48 елемената дели на 24 аутоморфизма који чувају оријентацију и на 24 који је не чувају.

### 4.3 Изоморфизам $T_1 \cong T_4$

У овој секцији описујемо све изоморфизме између тонаца  $T_i$ ,  $i \in [5]$ , а који нису аутоморфизми. Показано је да сваки симплицијални изоморфизам између тонца  $T = \text{Ton}^{n,k}(L)$  и њему изоморфног тонца мора бити афино пресликавање, односно  $f \in \text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ . Пошто је  $\text{Aut}(T)$  подгрупа групе  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_n)$ , преостале изоморфизме тражимо у разлици  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_n) \setminus \text{Aut}(T)$ . Самим тим, скуп свих симплицијалних изоморфизама који тонац  $T$  пресликавају у тонац  $T'$  није група, јер не садржи идентитет, међутим јесте косет групе  $\text{Aut}(T)$ .

**Тврђење 4.3.1** (Косет групе аутоморфизама). *Нека су даћи тонци  $T$  и  $T'$ . Претпоставимо да постоји бар један изоморфизам  $\varphi_0: T \rightarrow T'$ . Тада је скуп свих изоморфизама*

$$\text{Isom}(T, T') := \{\varphi: T \rightarrow T' \mid \varphi \text{ је изоморфизам}\}$$

леви косети групе аутоморфизама  $\text{Aut}(T)$ ,  $\bar{u}j$ .

$$\text{Isom}(T, T') = \varphi_0 \circ \text{Aut}(T) = \{\varphi_0 \circ \psi \mid \psi \in \text{Aut}(T)\},$$

где косети  $\text{Isom}(T, T')$  не зависи од избора изоморфизма  $\varphi_0$ . Посебно важи:

$$|\text{Isom}(T, T')| = |\text{Aut}(T)|.$$

**Доказ:** Размотримо групу  $\text{Aut}(T)$  свих аутоморфизама комплекса  $T$ . Ако је  $\psi \in \text{Aut}(T)$ , онда је композиција  $\varphi_0 \circ \psi$  поново изоморфизам  $T \rightarrow T'$ , па је  $\varphi_0 \circ \text{Aut}(T) \subseteq \text{Isom}(T, T')$ . Обрнуто, нека је  $\varphi \in \text{Isom}(T, T')$  произвољно и нека је  $\psi := \varphi_0^{-1} \circ \varphi$ . Пошто је  $\varphi_0^{-1} : T' \rightarrow T$  изоморфизам, композиција  $\psi$  је аутоморфизам комплекса  $T$ , дакле  $\psi \in \text{Aut}(T)$ . Из тога следи  $\varphi = \varphi_0 \circ \psi$ , показујући да је  $\text{Isom}(T, T') \subseteq \varphi_0 \circ \text{Aut}(T)$ , те добијамо тражену једнакост скупова. Независност од избора  $\varphi_0$  следи из тога што за било које друго  $\varphi_1 \in \text{Isom}(T, T')$ , важи да је  $\varphi_1 = \varphi_0 \circ (\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1) \in \varphi_0 \circ \text{Aut}(T)$ , јер  $\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1 \in \text{Aut}(T)$ .

За тврдњу о једнаким кардиналностима скупова имамо да је група  $\text{Aut}(T)$  преко пресликавања  $\psi \mapsto \varphi_0 \circ \psi$  у бијекцији са левим косетом  $\varphi_0 \circ \text{Aut}(T)$ , па њихове кардиналности морају бити једнаке. Према доказаној једнакости скупова добијамо и  $|\text{Isom}(T, T')| = |\text{Aut}(T)|$ .  $\square$

Скуп  $\text{Isom}(T, T')$  је такође и десни косет, али групе аутоморфизама  $\text{Aut}(T')$ :

$$\text{Isom}(T, T') = \text{Aut}(T') \circ \varphi_0 = \{\psi \circ \varphi_0 \mid \psi \in \text{Aut}(T')\}.$$

**Последица 4.3.1.** Нека је  $T'_1$  тонац који је изоморфан тону  $T_1$ . Тада је

$$|\text{Isom}(T_1, T'_1)| = |\text{Aut}(T_1)| = 24.$$

**Доказ:** Применом претходног тврђења и показаног да је  $\text{Aut}(T_1) = \mathcal{D}_{12}$  добијамо тражени резултат.  $\square$

Из ове последице следи да постоји тачно један тонац  $T'_1$ , различит од  $T_1$ , а који му је изоморфан.

Ова појава је и те како занимљива, јер је Ојеров тонац у музичком свету јединствен: он се састоји од дурских и молских трозвука, најконсонантнијих структура које су обележиле готово све музичке жанрове, а сувишно је говорити колику примену имају у класичној музици.

Подсетимо се да у дводимензионом тону дужине  $l_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  представљају интервале између тонова које су додељене страницама троугла,

односно представљају разлику између темена. Пратећи генераторску петљу која је дефинисана величином  $l_i$ , добијамо

$$(v, v + l_i, v + 2l_i, \dots, v + (r_i - 1)l_i, v),$$

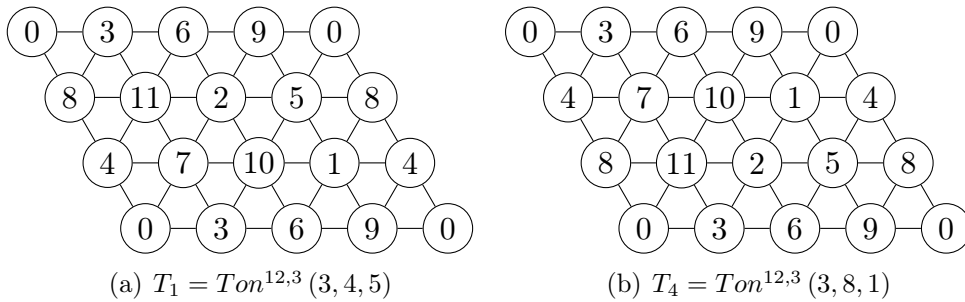
где  $r_i = r(l_i)$  означава ред елемента  $l_i$  у групи  $\mathbb{Z}_n$ .

Да би се формирао фундаментални домен тонца  $T_1$ , довољно је реализовати обе генераторске петље. Како вектор  $L_1 = (3, 4, 5)$  садржи три дужине, од којих свака може дефинисати петљу, за креирање домена бирамо нпр. оне са најмањим редовима. У овом случају то су  $l_1 = 3$  и  $l_2 = 4$ , јер важи  $r(l_1) = 4$ ,  $r(l_2) = 3 < r(l_3) = 12$ . Тако је добијен тонац  $T_1$  са фундаменталним доменом у облику паралелограма (слика 4.3(a)).

Пошто изоморфни тонац мора имати исту комбинаторну структуру, аналоган фундаментални домен постоји и за њега. Посматрајмо дужински вектор  $L_4 = (3, 8, 1)$  тонца  $T_4$ . Вектори  $L_1 = (3, 4, 5)$  и  $L_4 = (3, 8, 1)$  деле исте редове својих координата у  $\mathbb{Z}_{12}$ :

$$r(3) = r(3) = 4, \quad r(4) = r(8) = 3, \quad r(5) = r(1) = 12.$$

Из тога следи да су тонци  $T_1$  и  $T_4$  изоморфни, што се јасно види и на слици 4.3.



Слика 4.3: Тонац  $T_1$  је изоморфан тонцу  $T_4$

Афина функција која индукује изоморфизам приказан на слици је

$$f_{5,0} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 10 & 3 & 8 & 1 & 6 & 11 & 4 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

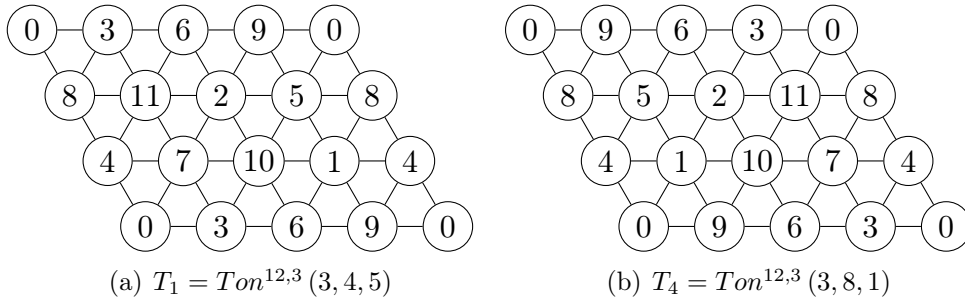
а краће је означавамо са  $f = (1, 5)(2, 10)(4, 8)(7, 11)$ , где овај запис истиче транспозиције (на пример, 1 се пресликава у 5 и обрнуто). Када је неки елемент изостављен, подразумева се да се он слика сам у себе — у овом

случају то су 0, 3, 6 и 9, јер смо тонац поставили тако да се хоризонтална генераторска петља  $0 - 3 - 6 - 9 - 0$  пресликава идентитета по овој функцији. Како важи  $5(L_1) = L_4$ , функција  $f_{5,0}$  не мења оријентацију симплекса.

Да би се добио пример функције која мења оријентацију, можемо узети било коју афину функцију облика  $f_{7,t}$ ,  $t \in \mathbb{Z}_{12}$ , јер важи

$$7(L_1) = (21, 28, 35) \equiv_{12} (9, 4, 11) \equiv_{12} (-3, -8, -1) = -L_4.$$

Стога афина функција са коефицијентом  $s = 7$  мења оријентацију симплекса, док задржава комбинаторну структуру тонца.



Слика 4.4: Пример функције која мења оријентацију симплекса у  $T_4$

На слици је приказан изоморфизам који индукује функција  $f_{7,0}$ . Промену оријентације симплекса можемо уочити на примеру симплекса  $\sigma = \{0, 1, 9\}$  коме на слици 4.3(b) додељујемо негативну оријентацију  $\sigma_1 = (0, 1, 9)$ , те на слици 4.4(b) има позитивну оријентацију  $\sigma_1 = (1, 0, 9)$ .

**Теорема 4.3.1.** *Скуп свих симплицијалних изоморфизама којима се тонац  $T_1$  пресликава у тонац  $T_4$  је*

$$\text{Isom}(T_1, T_4) = \{f_{5,t} \mid t \in \mathbb{Z}_{12}\} \cup \{f_{7,t} \mid t \in \mathbb{Z}_{12}\}.$$

**Доказ:** Према тврђењу 4.3.1, скуп свих симплицијалних изоморфизама који пресликавају  $T_1$  у  $T_4$  чини један косет групе  $\text{Aut}(T_1)$ , а за произвољан изоморфизам  $\varphi_0 : T_1 \rightarrow T_4$ , можемо узети  $\varphi_0 = f_{5,0}$ . Добијамо:

$$\text{Isom}(T_1, T_4) = \{f_{5,0} \circ a_{s,t} \mid a_{s,t} \in \text{Aut}(T_1)\}.$$

Функције  $f_{5,0} \circ a_{s,t}$  генеришу све симплицијалне изоморфизме. На пример,  $f_{7,0}$  добијамо као  $f_{5,0} \circ a_{11,0} \equiv_{12} f_{7,0}$ . Транслаторни део добијамо као  $f_{5,0} \circ a_{1,t} =$

$f_{5 \cdot 1, 5t+0} = f_{5, 5t}$ . Пошто је 5 инвертибилни елемент у  $\mathbb{Z}_{12}$ , када  $t$  пролази кроз  $\mathbb{Z}_{12}$  добијамо све могуће транслације. Слично важи за  $s = 7$ . Други изоморфизми нису могући, јер је увек  $s = 5 \circ 1 \equiv_{12} 5$  или  $s = 5 \circ 11 \equiv_{12} 7$ .

### Изоморфизам $T_2 \cong T_5$

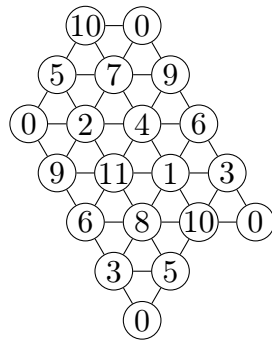
Након што смо утврдили да сви симплицијални изоморфизми  $f \in \text{Aff}(\mathbb{Z}_{12})$  над тонцем  $T_3$  представљају само његове аутоморфизме, остаје да испитамо преостала два тонца  $T_2$  и  $T_5$ .

Вектори  $L_2 = (2, 3, 7)$  и  $L_5 = (2, 9, 1)$  припадају истој класи еквиваленције у односу на редове дужина  $l_i$ , јер важи

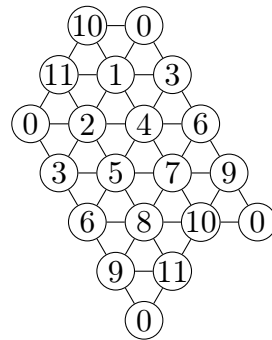
$$r(2) = r(2) = 6, \quad r(3) = r(9) = 4, \quad r(7) = r(1) = 12.$$

Када бисмо њихову тонац мрежу представили као паралелограм, по узору на тонце  $T_1$  и  $T_4$ , она би садржала најмање 24 темена и 48 троуглова, што не би чинило фундаментални домен. Ово следи из двоструко већих редова за дужине вектора  $L$  и чињенице да је  $2 \cdot r(2) \cdot r(3) = 2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ . С обзиром на последицу 4.3.1 и наведено разматрање, закључујемо да тонци  $T_2$  и  $T_5$  нису изоморфни тонцима  $T_1$  и  $T_4$ , међутим испоставља се да јесу међусобно изоморфни.

Изоморфизам између њих илустрован је на слици 4.5.



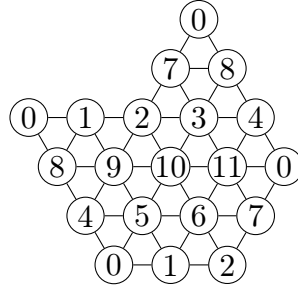
(a)  $T_2 = \text{Ton}^{12,3}(2, 3, 7)$



(b)  $T_5 = \text{Ton}^{12,3}(2, 9, 1)$

Слика 4.5: Тонац  $T_2$  је изоморфан тонцу  $T_5$ .

За крај, иако је тонац  $T_3$  једино сам себи изоморфан, дајмо пример и његовог фундаменталног домена.

Слика 4.6: Фундаментални домен тонца  $T_3 = Ton^{12,3}(1, 4, 7)$ 

### Дегенерисани облици тонца

Уколико се изостави услов редукованости и генеричности вектора  $L = (l_1, l_2, l_3)$ , за  $n = 12$ , добија се још неколико могућих комбинација дужинског вектора:

$$\begin{aligned} L_6 &= (1, 1, 10), & L_7 &= (1, 5, 6), & L_8 &= (2, 2, 8), & L_9 &= (2, 4, 6), \\ L_{10} &= (2, 5, 5), & L_{11} &= (3, 3, 6), & L_{12} &= (4, 4, 4). \end{aligned}$$

Њихове тонце означавамо са  $T_i(l_1, l_2, l_3)$ ,  $i \in \{6, \dots, 12\}$  и они представљају дегенерисане облике тонца, који нису хомеоморфни торусу, већ другим познатим површинама, које смо већ описали у 3.2, те ћемо само допунити табелу:

| тонац             | релације међу $l_i$              | комплекс                               |
|-------------------|----------------------------------|----------------------------------------|
| $T_6(1, 1, 10)$   | $1 = 1 < 10 \neq \frac{12}{2}$   | цилиндар                               |
| $T_7(1, 5, 6)$    | $1 + 5 = \frac{12}{2}$           | циклус од 6 граница тетраедра          |
| $T_8(2, 2, 8)$    | $2 = 2 < 8 \neq \frac{12}{2}$    | 2 дисјунктна цилиндра                  |
| $T_9(2, 4, 6)$    | $2 + 4 = 6 = \frac{12}{2}$       | 2 дисј. циклуса од 3 граница тетраедра |
| $T_{10}(2, 5, 5)$ | $2 < 5 = 5$                      | цилиндар                               |
| $T_{11}(3, 3, 6)$ | $3 = 3 < 6$ и $6 = \frac{12}{2}$ | граница тетраедра                      |
| $T_{12}(4, 4, 4)$ | $4 = 4 = 4$                      | 4 дисјунктна 2-симплекса               |

Међу њима имамо још један изоморфан пар тонаца, а то су тонци  $T_6$  и  $T_{10}$ . Они су изоморфни као цилиндри, а изоморфизам међу њима смо могли да наслутимо и посматрајући редове дужина у њиховим дужинским векторима  $L_6$  и  $L_{10}$ .

## 4.4 Компоновање у тонцу

Ради музичке илустрације применимо наше изоморфизме на један препознатљив пример из музичке праксе. С обзиром на значај који је Бах дао развоју једнакостемперованог система, избор композитора је очигледан. Одабрали смо Бахову *Двогласну инвенцију у С-дуру*, те прикажимо прва два и по такта композиције, као јасан и звучно препознатљив мотив на коме се могу показати све трансформације у тонцу.



Слика 4.7: *Ј. С. Бах, Двогласна инвенција у С-дуру, бр. 1.*

Да бисмо разумели како се музичка структура тоналитета мења у оквиру тонца, применимо сада неки од аутоморфизама над њим. Аутоморфизми  $a_{1,t}$  представљају најједноставнији случај — они врше чисту транспозицију, односно померају целу инвенцију за одређени интервал  $t$ . Погледајмо исту Бахову инвенцију, на пример транслирану аутоморфизмом  $a_{1,4}$ . Сви интервали између тонова и акордски односи остају очувани. Резултат је познат и поново се чује „класичан“ звук, али сада у потпуности *Е*-дура.



Слика 4.8: *Модулација инвенције у Е-дур, добијена аутоморфизмом  $a_{1,4}$ .*

Размотримо сада аутоморфизме  $a_{-1,t}$  који мењају оријентацију симплекса. Као пример, узећемо онај који задржава тон *С* и све остале интервалске односе инвертује у односу на њега као центар инверзије, то је аутоморфизам

$a_{-1,0}$ . Овакво пресликавање производи ретроградну верзију композиције: узлазни и силазни смер у низању тонова се обрћу, али су величине интервала између суседних тонова исте и у домену и у слици. Тиме ова трансформација делује као огледало хармонског простора. Звучно, и даље осећамо присуство класичне хармоније, јер инверзни интервали припадају истој класи консонантности као и полазни.



Слика 4.9: Ретроградна трансформација инвенције аутоморфизмом  $a_{-1,0}$ .

За крај, посматрајмо изоморфизме којима се тонац  $T_1$  слика у тонац  $T_4$ . Сваки дурски квинтакорд је сачињен од велике терце, мале терце и квинте као оквира, овим пресликавањима прелази у скуп тонова који сада имају изразито дисонантан интервал, а то је велика септима! Као пример, узећемо функцију  $f_{5,8}$ , која сваки тон  $v$  пресликава у  $5v + 8$  у  $\mathbb{Z}_{12}$ . На тај начин, тон  $C$  прелази у  $G\sharp$ ,  $E$  у  $C$ ,  $G$  у  $D\sharp$ , итд. Имамо да се  $C$ -дур акорд  $\{C, E, G\} = \{0, 4, 7\}$  слика у акорд  $\{G\sharp, E, G\} = \{8, 4, 7\}$ , те јасно видимо интервал велике септима  $\{G\sharp, G\}$ .



Слика 4.10: Инвенција трансформисана изоморфизмом  $f_{5,8} : T_1 \rightarrow T_4$ .

Слушни резултат је звучно упадљиво другачија верзија инвенције. Она открива дубоку везу између музике и математике — показујући да и најдисонантнији акорд може бити само друга перспектива исте хармонске структуре. Да ли, онда, савремена музика заиста нарушава хармонију, или је само слушамо из другог тонца?

## Таблице изоморфизама

За крај, дајемо листу свих функција афине групе  $Aff(\mathbb{Z}_{12})$ . Издајамо их у виду аутоморфизама тонца  $T_1$  и у виду свих изоморфизама које тонац  $T_1$  сликају у тонац  $T_4$ . Као што смо видели, ове функције природно налазе примену у анализи музичких композиција, али и у компоновању.

1) Аутоморфизми  $a_{s,t}: T_1 \rightarrow T_1$ 

|                                                           |                                                      |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $a_{1,0} = Id$                                            | $a_{-1,0} : (1, 11)(2, 10)(3, 9)(4, 8)(5, 7)$        |
| $a_{1,1} : (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$        | $a_{-1,1} : (0, 1)(2, 11)(3, 10)(4, 9)(5, 8)(6, 7)$  |
| $a_{1,2} : (0, 2, 4, 6, 8, 10)(1, 3, 5, 7, 9, 11)$        | $a_{-1,2} : (0, 2)(3, 11)(4, 10)(5, 9)(6, 8)$        |
| $a_{1,3} : (0, 3, 6, 9)(1, 4, 7, 10)(2, 5, 8, 11)$        | $a_{-1,3} : (0, 3)(1, 2)(4, 11)(5, 10)(6, 9)(7, 8)$  |
| $a_{1,4} : (0, 4, 8)(1, 5, 9)(2, 6, 10)(3, 7, 11)$        | $a_{-1,4} : (0, 4)(1, 3)(5, 11)(6, 10)(7, 9)$        |
| $a_{1,5} : (0, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7)$        | $a_{-1,5} : (0, 5)(1, 4)(2, 3)(6, 11)(7, 10)(8, 9)$  |
| $a_{1,6} : (0, 6)(1, 7)(2, 8)(3, 9)(4, 10)(5, 11)$        | $a_{-1,6} : (0, 6)(1, 5)(2, 4)(7, 11)(8, 10)$        |
| $a_{1,7} : (0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5)$        | $a_{-1,7} : (0, 7)(1, 6)(2, 5)(3, 4)(8, 11)(9, 10)$  |
| $a_{1,8} : (0, 8, 4)(1, 9, 5)(2, 10, 6)(3, 11, 7)$        | $a_{-1,8} : (0, 8)(1, 7)(2, 6)(3, 5)(9, 11)$         |
| $a_{1,9} : (0, 9, 6, 3)(1, 10, 7, 4)(2, 11, 8, 5)$        | $a_{-1,9} : (0, 9)(1, 8)(2, 7)(3, 6)(4, 5)(10, 11)$  |
| $a_{1,10} : (0, 10, 8, 6, 4, 2, 0)(1, 11, 9, 7, 5, 3, 1)$ | $a_{-1,10} : (0, 10)(1, 9)(2, 8)(3, 7)(4, 6)$        |
| $a_{1,11} : (0, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$    | $a_{-1,11} : (0, 11)(1, 10)(2, 9)(3, 8)(4, 7)(5, 6)$ |

2) Изоморфизми  $f_{s,t}: T_1 \rightarrow T_4$ 

|                                                     |                                                     |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $f_{5,0} : (1, 5)(2, 10)(4, 8)(7, 11)$              | $f_{7,0} : (1, 7)(3, 9)(5, 11)$                     |
| $f_{5,1} : (0, 1, 6, 7)(2, 11, 8, 5)(3, 4, 9, 10)$  | $f_{7,1} : (0, 1, 8, 9, 4, 5)(2, 3, 10, 11, 6, 7)$  |
| $f_{5,2} : (0, 2)(1, 7)(3, 5)(4, 10)(6, 8)(9, 11)$  | $f_{7,2} : (0, 2, 4, 6, 8, 10)(1, 9, 5)(3, 11, 7)$  |
| $f_{5,3} : (0, 3, 6, 9)(1, 8, 7, 2)(4, 11, 10, 5)$  | $f_{7,3} : (0, 3)(1, 10)(2, 5)(4, 7)(6, 9)(8, 11)$  |
| $f_{5,4} : (0, 4)(1, 9)(3, 7)(6, 10)$               | $f_{7,4} : (0, 4, 8)(1, 11, 9, 7, 5, 3)(2, 6, 10)$  |
| $f_{5,5} : (0, 5, 6, 11)(1, 10, 7, 4)(2, 3, 8, 9)$  | $f_{7,5} : (0, 5, 4, 9, 8, 1)(2, 7, 6, 11, 10, 3)$  |
| $f_{5,6} : (0, 6)(1, 11)(2, 4)(3, 9)(5, 7)(8, 10)$  | $f_{7,6} : (0, 6)(2, 8)(4, 10)$                     |
| $f_{5,7} : (0, 7, 6, 1)(2, 5, 8, 11)(3, 10, 9, 4)$  | $f_{7,7} : (0, 7, 8, 3, 4, 11)(1, 2, 9, 10, 5, 6)$  |
| $f_{5,8} : (0, 8)(2, 6)(3, 11)(5, 9)$               | $f_{7,8} : (0, 8, 4)(1, 3, 5, 7, 9, 11)(2, 10, 6)$  |
| $f_{5,9} : (0, 9, 6, 3)(1, 2, 7, 8)(4, 5, 10, 11)$  | $f_{7,9} : (0, 9)(1, 4)(2, 11)(3, 6)(5, 8)(7, 10)$  |
| $f_{5,10} : (0, 10)(1, 3)(2, 8)(4, 6)(5, 11)(7, 9)$ | $f_{7,10} : (0, 10, 8, 6, 4, 2)(1, 5, 9)(3, 7, 11)$ |
| $f_{5,11} : (0, 11, 6, 5)(1, 4, 7, 10)(2, 9, 8, 3)$ | $f_{7,11} : (0, 11, 4, 3, 8, 7)(1, 6, 5, 10, 9, 2)$ |

# Литература

- [1] Ф. Јевтић, Р. Живаљевић, *Generalized Tonetz and discrete Abel-Jacobi map*, arXiv:2002.09184 [math.MG], 2020.
- [2] J. Gallier, D. Xu, *A Guide to the Classification Theorem of Compact Surfaces*, Birkhäuser, 2013.
- [3] A. S. Crans, T. M. Fiore, R. Satyendra, *Musical Actions of Dihedral Groups*, *American Mathematical Monthly* 116 (jun 2009).
- [4] M. Catanzaro, *Generalized Tonetze*, *Journal of Mathematics and Music* 5 (2011).
- [5] J. Gallier, *Notes on Convex Sets, Polytopes, Polyhedra, Combinatorial Topology, Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulation*, University of Pennsylvania, 2009.
- [6] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer, 1995.
- [7] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [8] J. J. Rotman, *A First Course in Abstract Algebra*, Pearson, 2003.