ЛААГ - септ1 - 2024

а) - д) виђено

1 б) $A(0,0) \in n,\ n \perp P: x+2y-2024=0 \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_P = (1,2)$

$\Rightarrow n: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} \Rightarrow \boxed{n: y = 2x}$

е) $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -2 \\ -4 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -2-8+2-16 = -24 \Rightarrow V = \frac{1}{6}|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| \Rightarrow \boxed{V = 4}$

2 $U = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA + X^T A^{-1} = 0 \}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

а) 1) $0 \in U$ јер $0A + 0^T A^{-1} = 0$ ✓

2) $X, Y \in U \Rightarrow (X+Y)A + (X+Y)^T A^{-1} = \overset{=0}{XA + X^T A^{-1}} + \overset{=0}{YA + Y^T A^{-1}} = 0 \Rightarrow X+Y \in U$

3) $\alpha \in \mathbb{R}, X \in U \Rightarrow (\alpha X)A + (\alpha X)^T A^{-1} = \alpha(\underbrace{XA + X^T A^{-1}}_{=0}) = 0 \Rightarrow \alpha X \in U$

$\Rightarrow U \leq M_2(\mathbb{R})$

б) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & -a+b \\ c & -c+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} 2a = 0 \\ b+c = 0 \\ 2d+b-c = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} a = 0 \\ b = -c \\ d = c \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & c \end{bmatrix} \right\} = \boxed{\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)}$

в) $W = \left\{ \begin{bmatrix} c+d-b & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} a = 0,\ b = -c,\ d = c \\ a = c+d-b \end{matrix} \Rightarrow 0 = c+c+c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = 0$

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 1+3-0 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$ (или $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b+x \\ c-x & d-x \end{bmatrix}$, $x = \frac{a+b-c-d}{3}$) ■

3 а) $\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\alpha-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & -\alpha-\lambda & 0 \\ -2\alpha-5 & 2\alpha-1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(\alpha+\lambda)^2 - \alpha^2\right]$

$= -(\lambda-2)\left[(\alpha+\lambda-\alpha)(\alpha+\lambda+\alpha)\right] = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+2\alpha)$

1) $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq -1 \Rightarrow \varphi_A$ нема вишеструке нуле $\Rightarrow \mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2\alpha)$

2) $\alpha = 0 \Rightarrow \varphi_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-2) \Rightarrow$ проверои $\Rightarrow \mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$

3) $\alpha = -1 \Rightarrow \varphi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2 \Rightarrow$ провером $\Rightarrow \mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$

б) $\alpha = 1 \Rightarrow \varphi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+2) \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \boxed{\lambda_3 = -2}$

$(A - \lambda_3 E)v = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a+b=0 \\ -7a+b+4c=0 \\ \hline b=-a \\ c=2a \end{matrix} \Rightarrow \boxed{v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4$

4 а) 1) $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$ (лако се провери)

2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ 3) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

б) $U = \left\{(x,y,z,t) \;\middle|\; \begin{array}{l} x+2y-z+t=0 \\ -x-2y+3z+5t=0 \\ -x-2y-z-7t=0 \end{array}\right\} = \left\{(x,y,z,t) \;\middle|\; \begin{array}{l} x+2y-z+t=0 \\ z=-3t \end{array}\right\}$

$= \{(-2y-4t, y, -3t, t)\} = \boxed{\mathcal{L}(\overbrace{(-2,1,0,0)}^{u_1}, \overbrace{(-4,0,-3,1)}^{u_2})}$

$U^\perp = \{\overbrace{(a,b,c,d)}^{v} \mid v\circ u_i = 0\} = \{(a,b,c,d) \mid -2a+2b=0, -4a-3c+2d=0\}$

$= \{(a,b,c,d) \mid b=a,\ d=2a-\frac{3}{2}c\} = \boxed{\mathcal{L}((1,1,0,2),(0,0,1,-\frac{3}{2}))}$

в) $v=(1,-1,-3,3) = \alpha(-2,1,0,0)+\beta(-4,0,-3,1)+v_2 \quad /\circ u_1 \quad /\circ u_2$

$-4 = 6\alpha + 8\beta \quad /\cdot(-4) \qquad 49 = 49\beta \Rightarrow \boxed{\beta=1}$

$11 = 8\alpha + 27\beta \quad /\cdot 3 \qquad \boxed{\alpha=-2}$

$\Rightarrow v_1 = -2u_1+u_2 = \boxed{(0,-2,-3,1)\in U}$

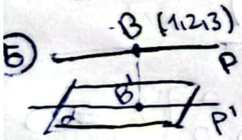
$v_2 = v - v_1 = \boxed{(1,1,0,2)\in U^\perp}$

$d(v,U) = \|v_2\| = \sqrt{1+2\cdot 1+0+2\cdot 4} = \sqrt{11}$

$d(v,U^\perp) = \|v_1\| = \sqrt{0+2\cdot 4+9+2\cdot 1} = \sqrt{19}$ $\Rightarrow$ $\boxed{v \text{ ближи } U}$

5 а) $\vec{n}_\alpha = \vec{p}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,0) \Rightarrow \alpha: 1(x-3)+1(y+4)+0(z-5)=0$

$\parallel (1,1,0)$ $\qquad \boxed{\alpha:\ x+y+1=0}$

б) 

1) n т.д. $B\in n$, $n\perp\alpha$

$\Rightarrow n: \begin{array}{l} x=t+1 \\ y=t+2, \ t\in\mathbb{R} \\ z=3 \end{array}$

2) $B' = n\cap\alpha$

$t+1+t+2+1=0 \Rightarrow \boxed{t=-2}$

$\Rightarrow \boxed{B'(-1,0,3)}$

3) p' т.д. $B'\in p'$, $p'\parallel p$

$\Rightarrow \vec{p'} = \vec{p} = (0,0,-1) \Rightarrow \boxed{p': \frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{-1}}$

6 ($\Rightarrow$) L инвертибилно $\Rightarrow$ $L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)$ лин. независни?

$\alpha_1L(e_1)+\alpha_2L(e_2)+\dots+\alpha_nL(e_n)=0 \overset{L \text{ лин}}{\Leftrightarrow} L(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n)=0$

L инв $\Rightarrow \ker L = \{0\} \Rightarrow \alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n=0 \overset{e_i \text{ БАЗА}}{\Rightarrow} \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

($\Leftarrow$) $L(e_1),\dots,L(e_n)$ лин. нез $\Rightarrow$ L инвертибилан?

L 1-1: $L(x)=L(y) \overset{e_i \text{ БАЗА}}{\Rightarrow} L(x_1e_1+\dots+x_ne_n) = L(y_1e_1+\dots+y_ne_n)$

$\Rightarrow (x_1-y_1)L(e_1)+\dots+(x_n-y_n)L(e_n)=0 \overset{\text{лин. нез}}{\Rightarrow} x_i=y_i, \forall i \Rightarrow x=y$

L НА: $L(e_1),\dots,L(e_n)$ лин. нез $\Rightarrow$ чине базу в.п. V

$\Rightarrow (\forall y\in V) \Rightarrow y = \alpha_1L(e_1)+\dots+\alpha_nL(e_n) = L(\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n)$

$\Rightarrow \alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$ се слика у $y\in V \Rightarrow$ L НА

L 1-1 и НА $\Rightarrow$ L инв.