



1. [12п] Дати су вектори

$$\vec{a} = (1, 0, k+2), \quad \vec{b} = (k, 3, -1), \quad \vec{c} = (2, -2, 2), \quad \vec{d} = (1, 0, 3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

а) За које вредности параметра k су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно зависни?

б) Доказати да за $k = -3$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$, а затим вектор $\vec{d}$ представити као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

а) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лчн. зависни $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ копланарни

$$\Rightarrow \underline{0} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ k & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2k^2 - 4k - 6k - 12 - 2 = -2k^2 - 10k - 8$$

$$\Rightarrow \underline{k = -1 \vee k = -4}$$

б) $k = -3 \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -4 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лчн. нез. $\Rightarrow$ чине базу $\mathbb{R}^3$

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$(1, 0, 3) = x(1, 0, -1) + y(-3, 3, -1) + z(2, -2, 2)$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ -4y + 4z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}}$$

2. [11п] Нека су U и W различити петодимензиони потпростори векторског простора V димензије 7. Одредити могуће вредности за $\dim(U+W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од тих вредности.

$$U \neq W, \quad U, W \subseteq V, \quad \dim U = \dim W = 5, \quad \dim V = 7.$$

$$* \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \dim(U \cap W) = \underbrace{\dim U}_5 + \underbrace{\dim W}_5 - \underbrace{\dim(U+W)}_{\leq 7} \Rightarrow \boxed{\dim(U \cap W) \geq 3}$$

$$* U \cap W \subseteq U \Rightarrow \dim(U \cap W) \leq 5 \Rightarrow \underline{3 \leq \dim(U \cap W) \leq 5}$$

$$* \text{Ако је } \dim(U \cap W) = 5$$

$$\left. \begin{matrix} U \cap W \subseteq U \\ U \cap W \subseteq W \end{matrix} \right\} \Rightarrow U = W \quad \downarrow \Rightarrow \underline{\dim(U \cap W) \neq 5}$$

$$\dim U = \dim W = 5$$

Примери

$$1) \dim(U \cap W) = 3$$

$$V = \mathbb{R}^7$$

$$U = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$$

$$W = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_6, e_7)$$

$$U \cap W = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$$

$$U+W = \mathbb{R}^7$$

$$2) \dim(U \cap W) = 4$$

$$V = \mathbb{R}^7$$

$$U = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$$

$$W = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_6)$$

$$U \cap W = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$U+W = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

3. [12п] Нека је пресликавање $L: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ дато са

$$L(X) = X \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\text{tr}(X) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да је пресликавање L линеарно.

б) Одредити бар по једну базу за $\text{Ker } L$ и $\text{Im } L$, као и ранг и дефект пресликавања L .

② $L(X) = XA - 2\text{tr}(X) \cdot B$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $L: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$
 L линеарно?

1) $L(X+Y) = (X+Y)A - 2\text{tr}(X+Y) \cdot B = XA + YA - 2\text{tr}(X)B - 2\text{tr}(Y)B$
 $= L(X) + L(Y)$, користили смо $\text{tr}(X+Y) = \text{tr}(X) + \text{tr}(Y)$

2) $L(\alpha X) = (\alpha X)A - 2\text{tr}(\alpha X)B = \alpha XA - 2\alpha \text{tr}(X)B = \alpha L(X)$

зато је $\text{tr}(\alpha X) = \alpha \text{tr}(X) \Rightarrow L$ је линеарно

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2(a+d) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a & -2a & 4a \\ 2c & -2c & 4c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a+2d & -2a-2d & 4a+4d \\ -2a-2d & 2a+2d & -4a-4d \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2d & 2d & -4d \\ 2(a+c+d) & -2(a+c+d) & 4(a+c+d) \end{bmatrix}$$

* $\text{Ker } L = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid L(X) = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} d=0 \\ a+c+d=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} d=0 \\ c=-a \end{matrix} \right\}$
 $= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \Rightarrow \dim(L) = 2$

* $\text{Im } L = \mathcal{L}(L(E_1), L(E_2), L(E_3), L(E_4))$

$$L(E_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, L(E_2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L(E_3) = L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, L(E_4) = L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(Од овде се може видети $E_1, E_3 \in \text{Ker } L$, $E_2 \in \text{Ker } L$)

$$\Rightarrow \text{Im } L = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \dim(L) = 2$$

4. [12п] Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{R_4 + R_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(2-\lambda)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3-\lambda & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)(2-\lambda)(-2+3\lambda-\lambda^2) = \boxed{(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}$$

$$-(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$(A - E)\varphi = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$$(A - 2E)\varphi = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{rcl}
 a+b-c-2d & = & 0 \quad /- \\
 a+2b-c-3d & = & 0 \quad /+ \\
 -a & + & c+d = 0 \quad /+ \\
 a+b-c-2d & = & 0 \\
 \hline
 a+b-c-2d & = & 0 \\
 b & - & d = 0 \quad /- \\
 b & - & d = 0 \quad /+ \\
 \hline
 0 & = & 0 \\
 \hline
 a+b-c-2d & = & 0 \\
 b & - & d = 0 \\
 \hline
 \Rightarrow d = b \\
 \Rightarrow c = a-b \\
 \Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \\ b \end{pmatrix} = \lambda \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl}
 b-c-2d & = & 0 \\
 a+b-c-3d & = & 0 \quad /- \\
 -a & + & d = 0 \quad /+ \\
 a+b-c-3d & = & 0 \\
 \hline
 a+b-c-3d & = & 0 \\
 b-c-2d & = & 0 \\
 0 & = & 0 \\
 0 & = & 0 \\
 \hline
 \Rightarrow b = c+2d \\
 a = d \\
 \Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} d \\ c+2d \\ c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 4 сопствена вектора
 $\Rightarrow$ јесте дијагоналног типа

5. [11п] Ако је на простору $\mathbb{R}^2[x]$ полинома степена ≤ 2 скаларни производ дефинисан са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0),$$

и $W = \{p \in \mathbb{R}^2[x] \mid p(1) + p(-1) = 0\}$, одредити ком од потпростора W и $W^\perp$ је полином $p(x) = x^2 + 2x + 9$ ближи.

$$\begin{aligned}
 W &= \{ax^2 + bx + c \mid a+b+c+a-b+c=0\} = \{ax^2 + bx + c \mid c = -a\} \\
 &= \{a(x^2-1) + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \lambda(x^2-1, x) \text{ означимо } \vec{p} = (p(0), p'(0), p''(0))
 \end{aligned}$$

$$p_1(x) = x^2 - 1 \Rightarrow p_1'(x) = 2x \Rightarrow p_1''(x) = 2 \Rightarrow \vec{p}_1 = (-1, 0, 2)$$

$$p_2(x) = x \Rightarrow p_2'(x) = 1 \Rightarrow p_2''(x) = 0 \Rightarrow \vec{p}_2 = (0, 1, 0)$$

$$p(x) = x^2 + 2x + 9 \Rightarrow p'(x) = 2x + 2 \Rightarrow p''(x) = 2 \Rightarrow \vec{p} = (9, 2, 2)$$

$$p(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x), \quad \alpha_1 \in W, \quad \alpha_2 \in W^\perp$$

$$p(x) = \alpha \cdot p_1(x) + \beta p_2(x) + \alpha_2(x) \quad / \circ p_1 \quad / \circ p_2$$

$$\begin{aligned}
 \vec{p} \circ \vec{p}_1 &= -5 \\
 \vec{p} \circ \vec{p}_2 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_1 \circ \vec{p}_1 &= 5 \\
 \vec{p}_2 \circ \vec{p}_2 &= 1 \\
 \vec{p}_1 \circ \vec{p}_2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow -5 &= 5\alpha \Rightarrow \alpha = -1 \\
 2 &= \beta \quad \beta = 2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_1(x) = -(x^2-1) + 2x = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \alpha_1' = -2x + 2, \quad \alpha_1'' = -2$$

$$\alpha_2(x) = p(x) - \alpha_1(x) = 2x^2 + 8 \Rightarrow \alpha_2' = 4x, \quad \alpha_2'' = 4$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_1 = (1, 2, -2) \quad \vec{\alpha}_2 = (8, 0, 4)$$

$$d(p, W) = \|\alpha_2\| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}, \quad d(p, W^\perp) = \|\alpha_1\| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$\nearrow$ Ближи $W^\perp$

6. [12п] Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних правах

$$p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{и} \quad q: \frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+5}{3}.$$

$P(1, t+4, -2t-1) \in p$ произв, $Q(-\Delta-3, -2, 3\Delta-5) \in q$ произв.

$$\vec{n} = \vec{PQ} = (-\Delta-4, -6-t, 3\Delta+2t-4), \quad \vec{p} = (0, 1, -2) \quad \vec{q} = (-1, 0, 3)$$

$$1) \vec{n} \circ \vec{p} = 0 \Rightarrow -6-t-6\Delta-4t+8=0 \Rightarrow -5t-6\Delta=-2 \quad /6 \quad 14\Delta=28$$

$$2) \vec{n} \circ \vec{q} = 0 \Rightarrow \Delta+4+9\Delta+6t-12=0 \Rightarrow 6t+10\Delta=8 \quad /5 \Rightarrow \Delta=2 \Rightarrow t=-2$$

$$\Rightarrow P(1, 2, 3), \quad Q(-5, -2, 1) \Rightarrow \vec{PQ} = (6, 4, 2) \parallel (3, 2, 1)$$

$$\Rightarrow n: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

$$d(p, q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

ЗА РАСТОЈАЊЕ МОРА (6, 4, 2)

ЗА ПРАВАХ ЈЕ ДОВОЉНО (3, 2, 1) !