



1. [12п] Дати су вектори

$$\vec{a} = (2k - 1, 2, k + 2), \quad \vec{b} = (3, k - 1, -1), \quad \vec{c} = (p, 1, 3), \quad k, p \in \mathbb{R}, \quad p \leq 0.$$

а) Одредити вредност параметара k и p тако да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ буду ортогонални и да је $\|\vec{c}\| = \sqrt{26}$.

б) Доказати да су тада вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ копланарни, а затим вектор $\vec{a}$ представити као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 6k - 3 + 2k - 2 - k - 2 = 0 \Rightarrow 7k - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 1}$

$\sqrt{26} = \|\vec{c}\| = \sqrt{p^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{p^2 + 10} \Rightarrow p^2 = 16 \Rightarrow p = \pm 4 \stackrel{p \leq 0}{\Rightarrow} \boxed{p = -4}$

$\Rightarrow \vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (3, 0, -1), \quad \vec{c} = (-4, 1, 3)$

② $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{matrix} = 0 + 8 + 9 - 0 + 1 - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ копланарни}}$

$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \Rightarrow (1, 2, 3) = (3x, 0, -x) + (-4y, y, 3y)$

$\Rightarrow 3x - 4y = 1 \quad 3x - 8 = 1 \Rightarrow x = 3$

$y = 2 \Rightarrow y = 2$

$-x + 3y = 3 \quad -3 + 3 \cdot 2 = 3 \checkmark$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = 3\vec{b} + 2\vec{c}}$

2. [11п] Дати су векторски потпростори

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b - c = 0, -a + b + c = 0\}$$

и

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + 2b + 3c + 4d = 0\}.$$

Одредити базу и димензију за просторе U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ c = a \end{matrix} \Rightarrow U = \{(a, 0, a, d) \mid a, d \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$
 $\dim U = 2$

$a + 2b + 3c + 4d = 0 \Rightarrow a = -2b - 3c - 4d \Rightarrow W = \{(-2b - 3c - 4d, b, c, d) \mid b, c, d \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1))$
 $\dim W = 3$

$U \cap W = \{(a, b, c, d) \mid \begin{matrix} c = a \\ a = -2b - 3c - 4d \end{matrix}\} = \{(a, 0, a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, 0, 1, -1))$
 $\Rightarrow d = -a$
 $\dim U \cap W = 1$

$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2 + 3 - 1 = 4$

$\Rightarrow \boxed{\dim U + W = 4 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^4}$ (можемо узети станд. базу $\mathbb{R}^4$ нпр)

3. [12п] Нека је пресликавање $L: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ дато са

$$L(A) = A \begin{matrix} \text{"B"} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} - \begin{matrix} \text{"C"} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} A^T.$$

а) Доказати да је пресликавање L линеарно.

б) Одредити базу и димензију за $\text{Ker } L$ и $\text{Im } L$.

в) Одредити матрицу пресликавања L у односу на канонску базу простора $M_2(\mathbb{R})$.

① $L(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)B - C(A_1 + A_2)^T = A_1B - CA_1^T + A_2B - CA_2^T = L(A_1) + L(A_2)$

② $L(\alpha A) = \alpha AB - C(\alpha A)^T = \alpha(AB - CA^T) = \alpha L(A)$

①, ② $\Rightarrow \boxed{L \text{ је линеарно}}$

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a-b \\ c+d & 2c-d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b & c+d \\ -2a+b & -2c+d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2a-b-c-d \\ 2a-b+c+d & 4c-2d \end{bmatrix}$$

$$\text{Ker } L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} 2a-b-c-d=0 \\ 2a-b+c+d=0 \\ 4c-2d=0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4a-2b=0 \Rightarrow b=2a \\ -2c-2d=0 \Rightarrow c=-d \\ -6d=0 \Rightarrow d=0 \Rightarrow c=0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } L = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \dim \text{Ker } L = 1 = \mathcal{S}(L)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(E_1, E_2, E_3, E_4) \Rightarrow \text{Im } L = \mathcal{L}(LE_1, LE_2, LE_3, LE_4)$$

$$L(E_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, L(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, L(E_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, L(E_4) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Im } L = \mathcal{L}(LE_1, LE_3, LE_4) \Rightarrow \dim \text{Im } L = 3 = \mathcal{S}(L)$$

4. [12п] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити карактеристични и минимални полином матрице A . За $a = 0$ испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(a-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = a, \lambda_3 = 1$$

1) $a \neq 0, a \neq 1 \Rightarrow \varphi_A$ има три различите нуле $\Rightarrow M_A(\lambda) = \lambda(\lambda-a)(\lambda-1)$

2) $a = 0 \Rightarrow \varphi_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-1) \Rightarrow M_A^1(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$ или $M_A^2(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)$

$$A(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$$

3) $a = 1 \Rightarrow \varphi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^2 \Rightarrow M_A^1(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$ или $M_A^2(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$

$$A(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow M_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$$

* За $a = 0$ $M_A(\lambda)$ нема вишеструке нуле $\Rightarrow A$ дијагон. типа

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A\vec{v} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -b+c=0 \Rightarrow c=b$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow (A-I)\vec{v} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$-a-2b+2c=0$$

$$b=0 \Rightarrow a=2c$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. [11п] Ако је на простору $\mathbb{R}^2[x]$ полинома степена ≤ 2 скаларни производ дефинисан са

$$p \circ q = 4p(0)q(0) + 2p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0),$$

и $W = \{p \in \mathbb{R}^2[x] \mid p'(1) + p(-1) = 0\}$, одредити ком од потпростора W и $W^\perp$ је полином $p(x) = -x^2 + 3x - 7$ ближи.

$$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p'(x) = 2ax + b$$

$$p'(1) + p(-1) = 2a + b + a - b + c = 0 \Rightarrow c = -3a$$

$$W = \{ax^2 + bx + c \mid c = -3a\} = \{a(x^2 - 3) + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(x^2 - 3, x)$$

обележимо са $\vec{p} = (p(0), p'(0), p''(0))$

$$q_1(x) = x^2 - 3 \Rightarrow q_1'(x) = 2x \Rightarrow q_1''(x) = 2 \Rightarrow \vec{q}_1 = (-3, 0, 2)$$

$$q_2(x) = x \Rightarrow q_2'(x) = 1 \Rightarrow q_2''(x) = 0 \Rightarrow \vec{q}_2 = (0, 1, 0)$$

$$p(x) = -x^2 + 3x - 7 \Rightarrow p'(x) = -2x + 3 \Rightarrow p''(x) = -2 \Rightarrow \vec{p} = (-7, 3, -2)$$

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x), \quad P_1 \in W, \quad P_2 \in W^\perp$$

$$\Rightarrow P(x) = \alpha q_1(x) + \beta q_2(x) + P_2(x) \quad / \circ q_1 \quad / \circ q_2$$

$$P \circ q_1 = \alpha q_1 \circ q_1 + \beta q_2 \circ q_1 + P_2 \circ q_1$$

$$P \circ q_2 = \alpha q_1 \circ q_2 + \beta q_2 \circ q_2 + P_2 \circ q_2$$

$$80 = 40\alpha \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow P_1(x) = 2q_1(x) + 3q_2(x)$$

$$6 = 2\beta \Rightarrow \beta = 3$$

$$P_1(x) = 2x^2 + 3x - 6$$

$$P_2(x) = P(x) - P_1(x) = -3x^2 - 1$$

$$P_1(x) = 2x^2 + 3x - 6 \Rightarrow P_1'(x) = 4x + 3 \Rightarrow P_1''(x) = 4 \Rightarrow \vec{P}_1 = (-6, 3, 4)$$

$$P_2(x) = -3x^2 - 1 \Rightarrow P_2'(x) = -6x \Rightarrow P_2''(x) = -6 \Rightarrow \vec{P}_2 = (-1, 0, -6)$$

$$d(P, W) = \|P_2\| = \sqrt{4 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$$

$$d(P, W^\perp) = \|P_1\| = \sqrt{4 \cdot (-6)^2 + 2 \cdot 3^2 + 4^2} = \sqrt{178}$$

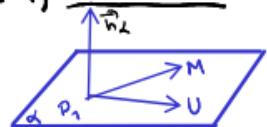
$\Rightarrow P$ $\notin W$ $\checkmark$

6. [12п] Дате су тачке

$$P_1(1, 1, 1), \quad U(2, 1, -1), \quad M(-1, 0, 2), \quad P_2(1, 1, -1), \quad A(-1, -1, 1), \quad J(-2, 4, 2).$$

Ако је B тачка симетрична тачки J у односу на раван троугла P_1UM и C тачка симетрична тачки J у односу на праву P_2A , одредити дужину дужи BC .

1) РАВАН α



$$P_1(1, 1, 1) \in \alpha$$

$$\vec{P_1U} \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{P_1U} = (1, 0, -2)$$

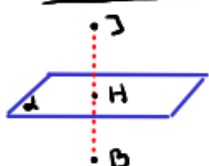
$$\vec{P_1M} \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{P_1M} = (-2, -1, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{P_1U} \times \vec{P_1M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 3, -1)$$

$$\Rightarrow \alpha: -2(x-1) + 3(y-1) - 1(z-1) = 0$$

$$\alpha: -2x + 3y - z = 0$$

2) ТАЧКА B



$$* \text{ н т.д. } J \in n, n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (-2, 3, -1)$$

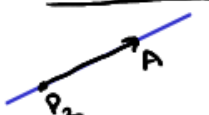
$$\Rightarrow n: \begin{cases} x = -2t - 2 \\ y = 3t + 4 \\ z = -t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$* H = n \cap \alpha: 4t + 4 + 9t + 12 - t - 2 = 0$$

$$14t + 14 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(0, 1, 3)$$

$$* J: t = 0, H: t = -1 \Rightarrow B: t = -2 \Rightarrow B(2, -2, 4)$$

3) ПРАВА P



$$P_2(1, 1, -1) \in P$$

$$\vec{P} = \vec{P_2A} = (-2, -2, 2) \parallel (-1, -1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$* B \text{ т.д. } J \in P, P \perp P \Rightarrow \vec{n}_P = \vec{P} \Rightarrow P: -(x+2) - (y-4) + (z-2) = 0$$

$$P: -x - y + z = 0$$

$$* Q = P \cap P$$

$$\lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow Q(0, 0, 0)$$

$$* J(-2, 4, 2), Q(0, 0, 0) \Rightarrow C(2, -4, -2)$$

5) ДУЖИНА BC

$$|BC| = \|\vec{BC}\| = \|(0, -2, -6)\| = \sqrt{0 + 4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$