



1. [12п] Дати су вектори

$$\vec{a} = (7, 6, -6), \quad \vec{b} = (6, 2, 9), \quad \vec{c} = (-6, 9, 2), \quad \vec{d} = (19, -1, 1).$$

а) Доказати да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некопланарни.

б) Доказати да је паралелепипед разапет векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коцка и израчунај њену запремину.

в) Вектор $\vec{d}$ представити као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

а) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некопланарни $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 7 & 6 & -6 \\ 6 & 2 & 9 \\ -6 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 28 - 324 - 324 - 72 - 567 - 72 = -620 - 144 - 567 = -1331 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ некоплан.}$$

б) $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 1331$ коцка $\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\|$ и $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}$

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\| &= \sqrt{7^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{121} = 11 & \vec{a} \cdot \vec{b} &= 42 + 12 - 54 = 0 \\ \|\vec{b}\| &= \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{121} = 11 & \vec{a} \cdot \vec{c} &= -42 + 54 - 12 = 0 \\ \|\vec{c}\| &= \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + 2^2} = \sqrt{121} = 11 & \vec{b} \cdot \vec{c} &= -36 + 18 + 18 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ разапичу коцку}$$

в) $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$$(19, -1, 1) = (7x, 6x, -6x) + (6y, 2y, 9y) + (-6z, 9z, 2z)$$

$$\begin{aligned} 7x + 6y - 6z &= 19 & 6x + 2y + 9z &= -1 \\ 6x + 2y + 9z &= -1 & -33z &= 22 \Rightarrow -x - 3z = 2 \quad / \cdot 6 \Rightarrow -11z = 11 \\ -6x + 9y + 2z &= 1 & 66x &+ 77z = -11 \Rightarrow 6x + 7z = -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \quad \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

2. [11п] Дати су векторски потпростори

$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A^T \right\}$$

и

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + 2b = 0 \right\}.$$

а) Одредити базу и димеизију за U и W .

б) Испитати да ли је $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

$$\text{а) } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} b = 2a \\ c = 0, d = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow U = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \dim U = 1$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} -2b & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \dim W = 3$$

$$\text{б) } U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} b = 2a, c = 0 \\ a = -2b, d = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim U \cap W = 0$$

$$\Rightarrow \dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 1 + 3 - 0 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$$

3. [12п] Дата су пресликавања

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x - 2y + 1, x + y),$$

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G(x, y, z) = (-x + y + 2z, y - z, x - 2y - z).$$

а) Испитати да ли су пресликавања F и G линеарна.

б) Одредити базу и димензију за $\text{Ker } G$ и $\text{Im } G$.

в) Одредити матрицу пресликавања G у односу на базу

$$S = \{f_1 = (1, 0, 1), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 1, 1)\}.$$

а) $F(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0) \Rightarrow F$ није линеарно

$$1) G(u_1 + u_2) = G(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\begin{aligned} u_1 = (x_1, y_1, z_1) &\rightarrow (-x_1 - x_2 + y_1 + y_2 + 2z_1 + 2z_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2, x_1 + x_2 - 2y_1 - 2y_2 - z_1 - z_2) \\ u_2 = (x_2, y_2, z_2) &\rightarrow (-x_1 + y_1 + 2z_1, y_1 - z_1, x_1 - 2y_1 - z_1) + (-x_2 + y_2 + 2z_2, y_2 - z_2, x_2 - 2y_2 - z_2) \\ &= G(u_1) + G(u_2) \end{aligned}$$

$$2) G(\alpha u) = G(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (-\alpha x + \alpha y + 2\alpha z, \alpha y - \alpha z, \alpha x - 2\alpha y - \alpha z)$$

$$= \alpha(-x + y + 2z, y - z, x - 2y - z) = \alpha G(u) \stackrel{1, 2)}{\Rightarrow} G \text{ линеарно}$$

$$\textcircled{б} \text{Ker } G = \{(x, y, z) \mid G(x, y, z) = 0\} = \{(3z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((3, 1, 1))$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} -x + y + 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{aligned} \right\} + \left. \begin{aligned} -x + y + 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 3z \\ y &= z \end{aligned} \Rightarrow \dim \text{Ker } G = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3) \Rightarrow \text{Im } G = \mathcal{L}(Ge_1, Ge_2, Ge_3) = \mathcal{L}((-1, 0, 1), (1, 1, -2))$$

$$\begin{aligned} Ge_1 &= (-1, 0, 1) \\ Ge_2 &= (1, 1, -2) \\ Ge_3 &= (2, -1, -1) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dim \text{Im } G = 2$$

$$\textcircled{в} (a, b, c) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= a \\ y + z &= b \\ x + z &= c \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= a \\ y &= b - c + a \\ z &= c - a \end{aligned} \Rightarrow (a, b, c)_E = (a, a + b - c, -a + c)_S$$

$$G(f_1) = (1, -1, 0)_E = (1, 0, -1)_S$$

$$G(f_2) = (1, 1, -2)_E = (1, 4, -3)_S$$

$$G(f_3) = (3, 0, -3)_E = (3, 6, -6)_S$$

$$\Rightarrow [G]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

4. [11п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$\Rightarrow \mu_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2b + 2c = 0 \quad b = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$-a - 2b + 2c = 0 \quad -b + c = 0 \Rightarrow b = c \Rightarrow a = 0$$

$$-2a - 2b + 2c = 0 \quad b = 0 \Rightarrow a = c, b = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. [12п] Ако је на простору $\mathbb{R}^2[x]$ полинома степена ≤ 2 скаларни производ дефинисан са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0),$$

и $W = \{p \in \mathbb{R}^2[x] \mid p(1) + p(-1) = 0\}$, одредити ком од потпростора W и $W^\perp$ је полином $p(x) = x^2 + 2x + 9$ ближи.

$\Delta W = \{ax^2 + bx + c \mid a+b+c + a-b+c = 0\} = \{ax^2 + bx + c \mid c = -a\}$
 $= \{a(x^2 - 1) + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(x^2 - 1, x)$ означимо $\vec{p} = (p(0), p'(0), p''(0))$
 $p_1(x) = x^2 - 1 \Rightarrow p_1'(x) = 2x \Rightarrow p_1''(x) = 2 \Rightarrow \vec{p}_1 = (-1, 0, 2)$
 $p_2(x) = x \Rightarrow p_2'(x) = 1 \Rightarrow p_2''(x) = 0 \Rightarrow \vec{p}_2 = (0, 1, 0)$
 $p(x) = x^2 + 2x + 9 \Rightarrow p'(x) = 2x + 2 \Rightarrow p''(x) = 2 \Rightarrow \vec{p} = (9, 2, 2)$
 $p(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x), \alpha_1 \in W, \alpha_2 \in W^\perp$
 $p(x) = \alpha \cdot p_1(x) + \beta p_2(x) + \alpha_2(x) \quad / \circ p_1 \quad / \circ p_2$
 $\vec{p} \circ \vec{p}_1 = -5 \quad \vec{p}_1 \circ \vec{p}_1 = 5$
 $\vec{p} \circ \vec{p}_2 = 2 \quad \vec{p}_2 \circ \vec{p}_2 = 1$
 $\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2 = 0$
 $\Rightarrow -5 = 5\alpha \Rightarrow \alpha = -1$
 $2 = \beta \quad \beta = 2$
 $\Rightarrow \alpha_1(x) = -(x^2 - 1) + 2x = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \alpha_1' = -2x + 2, \alpha_1'' = -2$
 $\alpha_2(x) = p(x) - \alpha_1(x) = 2x^2 + 8 \Rightarrow \alpha_2' = 4x, \alpha_2'' = 4$
 $\Rightarrow \vec{\alpha}_1 = (1, 2, -2) \quad \vec{\alpha}_2 = (8, 0, 4) \Rightarrow p \text{ ближи } W^\perp$
 $d(p, W) = \|\alpha_2\| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}, d(p, W^\perp) = \|\alpha_1\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$

6. [12п] Дате су тачке

$$P_1(-1, -2, 1), \quad U(2, -5, 3) \quad M(7, -4, 1), \quad P_2(3, 0, -3), \quad A(2, -3, 1), \quad J(0, 5, -1).$$

а) Одредити једначину праве l која сече праве P_1U и MP_2 и која садржи тачку A .

б) Одредити тачку B која је пројекција тачке J на праву P_1U .

Δ а) Нека је $\vec{e} = (a, b, c)$. Како $A \in e \Rightarrow e: \frac{x-2}{a} = \frac{y+3}{b} = \frac{z-1}{c}$
1) e сече $P_1U \Rightarrow 0 = [\vec{e}, \vec{P_1U}, \vec{P_1A}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 2a + 6b + 6c = 0$
2) e сече $MP_2 \Rightarrow 0 = [\vec{e}, \vec{MP_2}, \vec{MA}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -4 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 4a + 20b + 16c = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} a + 3b + 3c = 0 \\ a + 5b + 4c = 0 \end{cases}$
 $\begin{matrix} a + 3b + 3c = 0 \\ a + 5b + 4c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -3b + 6c \\ 2b + c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -3b + 6(-2b) = -15b \\ c = -2b \end{matrix} \Rightarrow \vec{e} = (3b, b, -2b) \parallel (3, 1, -2)$
 $\Rightarrow e: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}$

б) $P_1U: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow P_1U: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -3t - 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
 $J(0, 5, -1)$
1) Δ т.д. $J \in \Delta, \Delta \perp P_1U \Rightarrow \vec{n}_\Delta = \vec{P_1U} = (3, -3, 2)$
 $\Rightarrow \Delta: 3(x-0) - 3(y-5) + 2(z+1) = 0$
 $\Delta: 3x - 3y + 2z + 17 = 0$
2) $B = \Delta \cap P_1U \Rightarrow 3(3t-1) - 3(-3t-2) + 2(2t+1) + 17 = 0$
 $22t + 22 = 0 \Rightarrow t = -1$
 $\Rightarrow B(-4, 1, -1)$