



1. [8п] Нека је $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$. Наћи A^{2025} .

$$\Delta \quad \varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{+} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{+} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 2 \\ 1 & -\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[- \lambda^2 - \lambda] = \underline{-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -a + 5b + 7c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ -a + b + 3c = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 6b + 6c = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$c = -b \Rightarrow a = -2b$$

$$u_1 = (-2, 1, -1)$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2a + 5b + 7c = 0 \\ a - c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} c = a \\ 5b + 5a = 0 \\ b + a = 0 \end{cases}$$

$$c = a, b = -a$$

$$u_2 = (1, -1, 1)$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -3a + 5b + 7c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} a - b - c = 0 \\ 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$b = -2c, a = -c$$

$$u_3 = (-1, -2, 1)$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

НЕ МОРАМО
ПРА
РАЧУНАМО
АКО
ПРИМЕТИМО

$$A = P D P^{-1} \Rightarrow A^{2025} = P D^{2025} P^{-1} = P D P^{-1} = A \text{ јер је } D^{2025} = D!$$

2. [7п] У векторском простору $\mathbb{R}^4$ са стандардним скаларним производом дат је векторски потпростор V генерисан векторима $v_1 = (2, 1, 0, -1)$ и $v_2 = (0, 1, 1, 0)$.

а) Одредити бар једну базу потпростора $V^\perp$.

б) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $w = (4, -2, -1, 2)$ на V и $V^\perp$.

$$\Delta \quad \text{а) } V^\perp = \{ u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid u \cdot v_1 = 0, u \cdot v_2 = 0 \}$$

$$\begin{cases} 2a + b - d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2a + b \\ c = -b \end{cases} \Rightarrow V^\perp = \{ (a, b, -b, 2a + b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

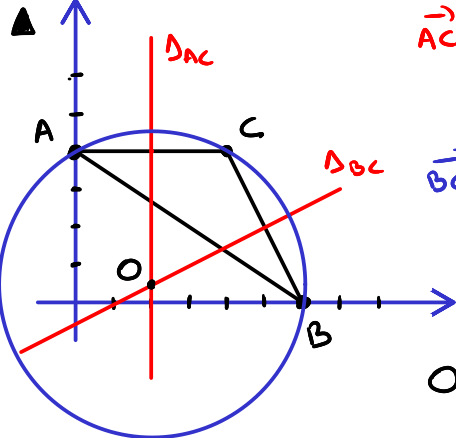
$$= \mathbb{R}((1, 0, 0, 2), (0, 1, -1, 1))$$

б) $w = w_1 + w_2, w_1 \in V, w_2 \in V^\perp$

$$w = \alpha v_1 + \beta v_2 + w_2 \quad \begin{cases} / \cdot v_1 \Rightarrow 4 = 6\alpha + \beta \\ / \cdot v_2 \Rightarrow -3 = \alpha + 2\beta \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 4 = 6\alpha + \beta \\ -11 = -11\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \beta = -2$$

$$\Rightarrow w_1 = v_1 - 2v_2 = (2, -1, -2, -1), w_2 = w - w_1 = (2, -1, 1, 3)$$

3. [6п] Дат је троугао са теменима $A(0, 4)$, $B(6, 0)$ и $C(4, 4)$. Одредити координате центра и полупречник круга описаног око $\triangle ABC$.



$$\vec{AC} = (4, 0) \parallel (1, 0) \Rightarrow \vec{\Delta}_{AC} = (0, 1), S(AC) = B_1(2, 4) \in \Delta_{AC}$$

$$\Rightarrow \Delta_{AC}: \frac{x-2}{0} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow \boxed{\Delta_{AC}: x = 2}$$

$$\vec{BC} = (-2, 4) \Rightarrow \vec{\Delta}_{BC} = (2, 1), S(BC) = A_1(5, 2) \in \Delta_{BC}$$

$$\Rightarrow \Delta_{BC}: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow \Delta_{BC}: x-5 = 2y-4$$

$$\boxed{\Delta_{BC}: x-2y = 1}$$

$$O = \Delta_{AC} \cap \Delta_{BC}: \begin{matrix} x=2 \\ x-2y=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ 2y=1 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{O(2, 1/2)}$$

$$R = d(O, A) = \|\vec{OA}\| = \left\| \left(-2, \frac{7}{2}\right) \right\| = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{65}}{2}}$$

4. [8п] Дате су права $p: \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ и раван $\alpha: x+3y-z+4=0$.

а) Одредити пресечну тачку A праве p и равни α , као и угао између њих.

б) Одредити једначину праве q која садржи тачку A , припада равни α и нормална је на праву p .

а) $p: \begin{matrix} x=2t+3 \\ y=2t \\ z=t \end{matrix}, t \in \mathbb{R}$ $p \cap \alpha: 2t+3+6t-t+4=0 \Rightarrow t=-1$

$p \cap \alpha = A(1, -2, -1)$ $\vec{p} = (2, 2, 1), \vec{n}_\alpha = (1, 3, -1)$

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{p}|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{p}\|} = \frac{7}{\sqrt{11} \cdot 3} \Rightarrow \boxed{\varphi = \arcsin \frac{7}{3\sqrt{11}}}$$

б) $A(1, -2, -1) \in q$ ✓

$q \subset \alpha \Rightarrow \vec{q} \perp \vec{n}_\alpha$
 $q \perp p \Rightarrow \vec{q} \perp \vec{p}$ } $\Rightarrow \vec{q} = \vec{n}_\alpha \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (5, -3, -4)$ ✓

$$\Rightarrow \boxed{q: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{-4}}$$

5. [6п] Доказати да пресликавање $\langle, \rangle: \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисано са

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + \frac{p'(0)q'(0)}{4} + \frac{p''(0)q''(0)}{9} + \frac{p'''(0)q'''(0)}{25}$$

представља скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$ полинома степана ≤ 3 .

▲ 1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, p, q, r \in \mathbb{R}^3[x]$

$$\langle \alpha p + \beta q, r \rangle = (\alpha p(0) + \beta q(0))r(0) + \frac{(\alpha p'(0) + \beta q'(0)) \cdot r'(0)}{4} + \frac{(\alpha p''(0) + \beta q''(0)) \cdot r''(0)}{9} + \frac{(\alpha p'''(0) + \beta q'''(0)) \cdot r'''(0)}{25} = \dots = \alpha \langle p, r \rangle + \beta \langle q, r \rangle \quad \checkmark$$

$$2) \langle q, p \rangle = q(0)p(0) + \frac{q'(0)p'(0)}{4} + \frac{q''(0)p''(0)}{9} + \frac{q'''(0)p'''(0)}{25} = \langle p, q \rangle \quad \checkmark$$

$$3) \langle p, p \rangle = \underbrace{(p(0))^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{(p'(0))^2}{4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{(p''(0))^2}{9}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{(p'''(0))^2}{25}}_{\geq 0} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\langle p, p \rangle = 0 \Leftrightarrow p(0) = 0, p'(0) = 0, p''(0) = 0, p'''(0) = 0$$

Нека је $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow 0 = p(0) = d$

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow 0 = p'(0) = c$$

$$p''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 0 = p''(0) = 2b$$

$$p'''(x) = 6a \Rightarrow 0 = p'''(0) = 6a$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow p = 0$$