



1. [12п] У зависности од реалних параметара $a, b \in \mathbb{R}$ решити систем једначина:

$$\begin{aligned} ax - y + 3z &= 2 \\ (1 - 2a)x + 2y - z &= b \\ -ax + z &= a. \end{aligned}$$

▲ [I НАЧИН] КРАМЕР

$$\Delta = 5a + 1, \Delta_x = -5a + b + 4, \Delta_y = -5a^2 + 9a + 4ab - 2, \Delta_z = 5a + ab$$

1) $a \neq -1/5 \Rightarrow$ јед. решење 2) $a = -1/5 \rightarrow b \neq -5 \Rightarrow$ нема решења ...
 $\rightarrow b = -5 \Rightarrow$ ГАУС (БЕСК. РЕШЕЊА)

II НАЧИН ГАУС

$$\begin{aligned} ax - y + 3z &= 2 \cdot 2 & ax - y + 3z &= 2 & ax - y + 3z &= 2 \\ (1 - 2a)x + 2y - z &= b \quad + \Rightarrow x & + 5z &= b + 4 & \Rightarrow -ax & + z = a \\ -ax + z &= a. & -ax & + z &= a \quad / \cdot 5 & (5a + 1)x &= -5a + b + 4 \end{aligned}$$

1) $a \neq -1/5 \Rightarrow x = \frac{-5a + b + 4}{5a + 1} \Rightarrow z = a + a \cdot x = \frac{5a^2 + a - 5a^2 + ab + 4a}{5a + 1} \quad b \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow z = \frac{5a + ab}{5a + 1} \Rightarrow y = ax + 3z - 2 = \frac{-5a^2 + ab + 4a + 15a + 3ab - 10a - 2}{5a + 1} = \frac{-5a^2 + 9a + 4ab - 2}{5a + 1}$

2) $a = -1/5$
 $-1/5 x - y + 3z = 2 \quad / \cdot 5$
 $1/5 x + z = -1/5 \quad / \cdot 5$
 $0 = b + 5$
 $a = -1/5, b = -5$
 $\Rightarrow (x, y, z) = (-5d - 1, 4d - 9/5, d), d \in \mathbb{R} \text{ (БЕСК. Р.)}$

$b \neq -5 \Rightarrow$ нема решења
 $a = -1/5$
 $-x - 5y + 15z = 10$
 $x + 5z = -1 \Rightarrow$
 $0 = 0$
 $z = d, d \in \mathbb{R}$
 $x = -5d - 1$
 $5y = 5d + 1 + 15d - 10$
 $y = 4d - 9/5$

2. [11п] Нека је $U \leq \mathbb{R}^5$ генерисан векторима $e_1 = (1, 3, -3, -1, -4)$, $e_2 = (1, 4, -1, -2, -2)$, $e_3 = (2, 9, 0, -5, -2)$, а $W \leq \mathbb{R}^5$ генерисан са $f_1 = (1, 6, 2, -2, 3)$, $f_2 = (2, 8, -1, -6, -5)$, $f_3 = (1, 3, -1, -5, -6)$.
Одредити димензије за U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

▲ ЗАД. 4.23 са вежби $\Rightarrow \dim U = 2, \dim W = 3, \dim U + W = 3 \Rightarrow \dim U \cap W = 2$

3. [12п] Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање такво да је

$$L(\overset{a_1}{1}, \overset{b_1}{-1}, \overset{c_1}{1}) = (\overset{a_2}{0}, \overset{b_2}{2}, \overset{c_2}{1}), \quad L(\overset{a_2}{2}, \overset{b_2}{0}, \overset{c_2}{3}) = (\overset{a_3}{-2}, \overset{b_3}{13}, \overset{c_3}{3}), \quad L(\overset{a_3}{-1}, \overset{b_3}{2}, \overset{c_3}{0}) = (\overset{a_4}{-2}, \overset{b_4}{5}, \overset{c_4}{-1}).$$

Наћи формулу за $L(x, y, z)$ а затим одредити бар по једну базу за $\text{Ker } L$ и $\text{Im } L$.

▲ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ лин. нез $\Rightarrow$ чине базу $\mathbb{R}^3$
 $\Rightarrow \exists$ јед. лин. L која испуњава услов

$(x, y, z) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(2, 0, 3) + \gamma(-1, 2, 0)$
 $\alpha + 2\beta - \gamma = x \rightarrow \alpha - \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma = x \Rightarrow \alpha = -6x - 3\gamma + 4z$
 $-\alpha + 2\gamma = y \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}y \Rightarrow \gamma = -3x - \gamma + 2z$
 $\alpha + 3\beta = z \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}z \Rightarrow \beta = 2x + \gamma - z$

$L(x, y, z) \stackrel{\text{лин.}}{=} \alpha L(1, -1, 1) + \beta L(2, 0, 3) + \gamma L(-1, 2, 0)$
 $= (-6x - 3\gamma + 4z) \cdot (0, 2, 1) + (2x + \gamma - z) \cdot (-2, 13, 3) + (-3x - \gamma + 2z) \cdot (-2, 5, -1)$
 $= (2x - 2z, -x + 2\gamma + 5z, 3x + \gamma - z)$
 $L(x, y, z) = (2x - 2z, -x + 2\gamma + 5z, 3x + \gamma - z)$

$$\text{Ker } L = \{ (x, y, z) \mid L(x, y, z) = 0 \} = \{ (x, -2x, x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1, -2, 1))$$

$$2x - 2z = 0 \quad 3x + y - z = 0 \Rightarrow y = -3x + x = -2x$$

$$-x + 2y + 5z = 0 \quad -7x + 7z = 0 \Rightarrow z = x$$

$$3x + y - z = 0 \quad 2x - 2z = 0 \Rightarrow z = x$$

$$\dim \text{Ker } L = 1$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \text{Im } L = \mathcal{L}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 13 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Im } L = \mathcal{L}(b_3, b_2)$$

$$\dim \text{Im } L = 2$$

$$4. [12\text{п}] \text{ Нека је дата матрица } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице A .

б) Одредити сопствени вектор који одговара највећој сопственој вредности.

в) Ако је $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1$, израчунати $f(A)$.

$$\Delta \text{ а) } \varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_A^1(\lambda) = \lambda(\lambda-1) \quad \text{и} \quad \mathcal{M}_A^2(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2 = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$$

$$\mathcal{M}_A^1(A) = A(A-E) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{M}^2 \text{ је мин полином}$$

$$\text{б) } \lambda = 1 \text{ највећа} \Rightarrow (A-E)u = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow b=0 \Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow u_1 = (1, 0, 0) \Rightarrow E_1 = \mathcal{L}((1, 0, 0))$$

$$\text{в) Како је } \mathcal{M}_A^2(A) = A^3 - 2A^2 + A = 0$$

$$\Rightarrow f(A) = A(\underbrace{A^3 - 2A^2 + A}_{=0}) + A - E = A - E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$5. [11\text{п}] \text{ Дат је векторски потпростор } W \subset \mathbb{R}^4 \text{ решења једначине } x + y + z + t = 0.$$

а) Наћи базу као и димензију векторских простора W и $W^\perp$ у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$.

б) Ком од потпростора W и $W^\perp$ је вектор $v = (3, -2, 4, 3)$ ближи?

$$\Delta \text{ а) } W = \{ (x, y, z, t) \mid (1, 1, 1, 1) \cdot (x, y, z, t) = 0 \} = \mathcal{L}((1, 1, 1, 1))^\perp$$

$$\Rightarrow W^\perp = \mathcal{L}((1, 1, 1, 1)) \quad W = \{ (x, y, z, -x-y-z) \} = \mathcal{L}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$$

$$\text{б) } u = w_1 + w_2, w_1 \in W, w_2 \in W^\perp$$

$$(3, -2, 4, 3) = w_1 + \alpha(1, 1, 1, 1) \quad / \cdot (1, 1, 1, 1) \Rightarrow 8 = \alpha \cdot 4 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\Rightarrow w_2 = (2, 2, 2, 2) \Rightarrow w_1 = u - w_2 = (1, -4, 2, 1)$$

$$d(u, W) = \|w_2\| = \sqrt{16} = 4 < d(u, W^\perp) = \|w_1\| = \sqrt{22} \Rightarrow \text{ближи } W$$

$$6. [12\text{п}] \text{ Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних правих}$$

$$p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{и} \quad q: \frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+5}{3}.$$

$$\Delta \text{ } P(1, t+4, -2t-1) \in p \text{ произв, } Q(-\lambda-3, -2, 3\lambda-5) \in q \text{ произв.}$$

$$\vec{n} = \vec{PQ} = (-\lambda-4, -6-t, 3\lambda+2t-4), \quad \vec{p} = (0, 1, -2), \quad \vec{q} = (-1, 0, 3)$$

$$1) \vec{n} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow -6-t-6\lambda-4t+8=0 \Rightarrow -5t-6\lambda=-2 \quad / \cdot 6, \quad 14\lambda=28$$

$$2) \vec{n} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow \lambda+4+9\lambda+6t-12=0 \Rightarrow 6t+10\lambda=8 \quad / \cdot 5, \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow t=-2$$

$$\Rightarrow P(1, 2, 3), Q(-5, -2, 1) \Rightarrow \vec{PQ} = (6, 4, 2) \parallel (3, 2, 1)$$

$$\Rightarrow n: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} \quad d(p, q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

ЗА РАСТОЈАЊЕ МОРА (6, 4, 2)

ЗА ПРАВАМ ЈЕ ДОВОЉНО (3, 2, 1) !