



1. [12п] У зависности од реалног параметра $b \in \mathbb{R}$ решити систем једначина:

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 3 \\ -x + (b-3)y + 4z &= 5 \\ -2x + 6y + (b-1)z &= b+4. \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & b-3 & 4 \\ -2 & 6 & b-1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & b-3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -(b^2 - 4b + 3) - 8 - 6 = -b^2 + 7b + 2b - 6 + 24 + b - 1 = \boxed{-b(b-7)}$$

$$\Rightarrow \Delta_x = \boxed{2b(b-7)}, \Delta_y = \boxed{b}, \Delta_z = \boxed{-b(b-6)}$$

1) $\boxed{b \neq 0, b \neq 7} \Rightarrow \Delta \neq 0 \xrightarrow{\text{КРАМЕР}} \text{јединствено решење}$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -2, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{7-b}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{b-6}{b-7}$$

2) $\boxed{b=7} \Rightarrow \Delta = 0$ али $\Delta_y = 7 \neq 0 \xrightarrow{\text{КРАМЕР}} \text{НЕМА РЕШЕЊА}$

3) $\boxed{b=0} \Rightarrow \Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \Rightarrow \text{НЕ ДАЈЕ ОДГ. КРАМЕР}$

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 3 \\ -x - 3y + 4z &= 5 \\ -2x + 6y - z &= 4 \end{aligned} \xrightarrow{\substack{+ \\ +}} \begin{aligned} -x + y + z &= 3 \\ -4y + 3z &= 2 \\ 4y - 3z &= -2 \end{aligned} \xrightarrow{+} \begin{aligned} x &= \frac{7}{4}\alpha - \frac{7}{2} \\ z &= \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ y &= \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{БЕСКОЊЧНО РЕШЕЊА}$$

2. [12п] Дати су скупови

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c + d = 0\}$$

и

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid 2a + b - 2d = 0, a + b - c = 0, 3a - 2b + c - d = 0\}.$$

а) Доказати да су U и W векторски потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$.

б) Одредити базу и димензију векторских простора U и W .

в) Испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = U + W$. Да ли је сума директна?

$$\Delta \textcircled{6} U = \{(a, b, c, -a-b-c)\} = \mathcal{L}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$$

$$\begin{aligned} W: \begin{cases} 2a + b - 2d = 0 \\ a + b - c = 0 \\ 3a - 2b + c - d = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{+ \\ +}} \begin{cases} 2a + b - 2d = 0 \\ 4a - b - d = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 2a + b - 2d = 0 \\ 6a - 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 2a \\ \Rightarrow W = \{(a, 2a, 3a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, 2, 3, 2)) \end{aligned}$$

$$\dim U = 3 \quad \dim W = 1$$

$$\textcircled{a} \textcircled{u}: 1) u_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \in U, u_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2) \in U$$

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \in U \text{ јер } \underline{a_1 + a_2} + \underline{b_1 + b_2} + \underline{c_1 + c_2} + \underline{d_1 + d_2} = 0 \checkmark$$

$$2) \alpha \in \mathbb{R}, u_1 \in U \Rightarrow \alpha u_1 = (\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1, \alpha d_1) \in U \text{ јер } \alpha(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = 0 \checkmark$$

$$\textcircled{w} 1) w_1 = (a, 2a, 3a, 2a) \quad w_2 = (b, 2b, 3b, 2b) \Rightarrow w_1 + w_2 = (a+b, 2(a+b), 3(a+b), 2(a+b)) \in W$$

$$2) \alpha \in \mathbb{R}, w_1 \in W \Rightarrow \alpha w_1 = (\alpha a, 2(\alpha a), 3(\alpha a), 2(\alpha a)) \in W \checkmark$$

$$\textcircled{b} U \cap W: \begin{cases} 2a + b - 2d = 0, a + b - c = 0, 3a - 2b + c - d = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 2a + b - 2d = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} a + b + c + d = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow U \cap W = \{0\} \quad \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \dim U + W = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^4 = U + W \quad \mathbb{R}^4 = U \oplus W$$

3. [11п] Дато је линеарно пресликавање $L: \mathbb{R}^2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2[x]$ са

$$L(ax^2 + bx + c) = (-2a + b - c)x^2 + (a - b + c)x - a - 2b + c.$$

Испитати да ли је L инвертибилно и уколико јесте одредити формулу за L^{-1} .

$$\begin{aligned} \Delta \text{ Ker } L &= \{ ax^2 + bx + c \mid \begin{matrix} -2a + b - c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ -a - 2b + c = 0 \end{matrix} \} \Rightarrow \begin{matrix} a - b + c = 0 \\ -a & = 0 \\ -2a - b & = 0 \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \rightarrow c = 0 \\ \Rightarrow a = 0 \\ \downarrow \rightarrow b = 0 \end{matrix} \\ \Rightarrow \text{Ker } L &= \{0\} \Rightarrow \underline{L \text{ јесте инвертибилан}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(ax^2 + bx + c) &= (-2a + b - c)x^2 + (a - b + c)x - a - 2b + c = u x^2 + v x + w \quad / L^{-1} \\ \Rightarrow \begin{cases} -2a + b - c = u \\ a - b + c = v \\ -a - 2b + c = w \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a - b + c = v \\ -a & = u + v \\ -2a - b & = w - v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = v + u + v + 2u + 3v - w \\ a = -u - v \\ b = 2u + 2v - w + v \end{cases} \\ &\Rightarrow b = 2u + 3v - w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L^{-1}(u x^2 + v x + w) = (-u - v) x^2 + (2u + 3v - w) x + 3u + 5v - w$$

4. [12п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & -3 \\ -2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & \lambda-3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(2-\lambda)(1-\lambda)(\lambda-3) \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \chi_A(\lambda) &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \Rightarrow \begin{matrix} A \text{ је дијагон. типа јер} \\ \chi_A(\lambda) \text{ нема вишеструке нуле} \end{matrix} \\ \lambda_1 &= 1 & \lambda_2 &= 2 & \lambda_3 &= 3 \\ v_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} & v_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & v_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. [11п] Нека је дат векторски потпростор

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$$

векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $A \circ B = \text{tr}(A^T B)$.

а) Одредити базу векторског простора $W^\perp$.

б) Којем од потпростора W и $W^\perp$ је ближа матрица $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$?

$$\begin{aligned} \Delta \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & -a+2b \\ c & -c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} \\ \Rightarrow a &= a, \quad -a+2b=b, \quad c=2a+3c, \quad -c+2d=2b+3d \\ &\Rightarrow b=a, \quad \Rightarrow c=-a, \quad \Rightarrow d=a-2a=-a \\ \text{а) } W^\perp &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \right\} \\ \Rightarrow \text{tr} \left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) &= a-c+b-d=0 \Rightarrow d=a-c+b \\ \Rightarrow W^\perp &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

6) $M = M_1 + M_2, M_1 \in W, M_2 \in W^\perp$
 $M = \alpha A + M_2 \quad / \circ A$
 $\Rightarrow 8 = 4\alpha \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow M_1 = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2 = M - M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $d(M, W) = d(M, M_1) = \|M_2\| = \sqrt{\text{tr}(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})} = \sqrt{2}$
 $d(M, W^\perp) = d(M, M_2) = \|M_1\| = \sqrt{\text{tr}(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix})} = \sqrt{16} = 4$
 $d(M, W) = \sqrt{2} < 4 = d(M, W^\perp) \Rightarrow \boxed{M \text{ је ближа } W}$

6. [12п] Дате су тачка $Q(-4, 1, 1)$, права $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ и раван $\alpha: 2x + y - 3z + 2025 = 0$.
 а) Одредити једначину праве n која садржи тачку Q и нормална је на раван α .
 б) Одредити једначину праве q која садржи тачку Q , сече праву p и паралелна је са α .

а) н т.д. $Q(-4, 1, 1) \in n, n \perp \alpha: 2x + y - 3z + 2025 = 0$
 $\Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -3)$

$$\Rightarrow n: \frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

б) q т.д. $Q \in q, q \parallel \alpha, q$ сече p

ОБЈАШЊЕНО НА ТРИ НАЧИНА НА ЧАСУ, УРАДИЋУ НА II НАЧИН

$x = 3t + 1$
 $p: y = 2t + 2, t \in \mathbb{R} \Rightarrow P(3t+1, 2t+2, t+3) \in p$ произв.
 $z = t + 3$

$q = PQ \Rightarrow Q \in q, P \in q \Rightarrow q$ сече p

$q \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{q} = \vec{PQ} = (-5-3t, -1-2t, -2-t)$

$\Rightarrow \vec{n}_\alpha \circ \vec{PQ} = 0$

$\Rightarrow -10 - 6t - 1 - 2t + 6 + 3t = 0$

$-5t - 5 = 0 \Rightarrow t = -1$

$\Rightarrow P(-2, 0, 2) \Rightarrow \vec{PQ} = (-2, 1, -1)$

$\Rightarrow q: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

I НАЧИН

$q: \frac{x+4}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$

1) $q \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \circ \vec{q} = 0 \Rightarrow 2a + b - 3c = 0$

2) q сече $p \Rightarrow [\vec{q}, \vec{p}, \vec{PQ}] = 0$

$P(1, 2, 3) \in p$
 $Q(-4, 1, 1) \in q \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3a + b + 7c = 0$

$\Rightarrow 2a + b - 3c = 0 \quad / -1 \Rightarrow 2a + b - 3c = 0 \quad \uparrow \quad b = -c$
 $-3a + b + 7c = 0 \quad \leftarrow \quad -5a + 10c = 0 \Rightarrow a = 2c$

$\Rightarrow \vec{q} = (2c, -c, c) \parallel (2, -1, 1) \Rightarrow q: \frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$