



1. [12п] У зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$ решити систем једначина:

$$x + y + z = 3$$

$$-ax + y + 4z = 2$$

$$6x + 2y + (2-a)z = 7.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2-a \end{vmatrix} = -(a-3)(a+4), \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2-a \end{vmatrix} = 3-a$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -a & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 2-a \end{vmatrix} = -3(a-3)(a+4), \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -a & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = a-3$$

1) $a \neq 3, a \neq -4 \Rightarrow \Delta \neq 0 \xrightarrow{\text{КРАМЕР}} \text{јединствено решење}$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{a+4}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 3, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{a+4}$$

2) $a = -4 \Rightarrow \Delta = 0$ али $\Delta_x = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{НЕМА РЕШЕЊА}$

3) $a = 3 \Rightarrow \Delta = 0 = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -3x + y + 4z = 2 \\ 6x + 2y - z = 7 \end{cases} \xrightarrow{\substack{+ \\ +}} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -4x + 3z = -1 \\ 4x - 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -4x + 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} - x = \frac{11}{4} - \frac{7}{4}x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3x+1}{4}$$

$\Rightarrow$ БЕСКОНАЧНО РЕШЕЊА $(x, y, z) = \left(\frac{3x+1}{4}, \frac{11-7x}{4}, x \right), x \in \mathbb{R}$

2. [12п] Нека су

$$U = \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

и

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a - b + 2c - d = 0, 7a + 2b - c - d = 0 \right\}$$

потпростори векторског простора $M_2(\mathbb{R})$. Одредити бар по једну базу, као и димензије векторских потпростора $U, W, U \cap W$ и $U + W$.

У СТАНДАРДНОЈ БАЗИ ПРОСТОРА $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -10 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{\substack{+ \\ +}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -3 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ +}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3) \\ \dim U = 3 \end{cases}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{cases} a - b + 2c - d = 0 \\ 7a + 2b - c - d = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} d = 5a + b \\ 6a + 3b - 3c = 0 \Rightarrow c = 2a + b \end{cases} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2a+b & 5a+b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \dim W = 2$$

$$U + W: \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -10 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ + \\ +}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -3 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ + \\ +}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ + \\ +}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = 3w_1 + 12w_2 \\ w_1 - u_1 + u_3 - 4w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim U + W = 4, U + W = \mathcal{L}(u_1, u_2, w_1, w_2)$$

$$\Rightarrow U \cap W = \mathcal{L}(u_1 + u_2) = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \right), \dim U \cap W = 1$$

3. [11п] Дато је линеарно пресликавање $L: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2[x]$ са

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c+2d)x^2 + (-2a+b+c-2d)x + a+b+c+d.$$

а) Одредити бар по једну базу као и димензију за $\text{Ker} L$ и $\text{Im} L$.

б) Одредити матрицу пресликавања L у односу на канонске базе простора $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^2[x]$.

а) $\text{Ker } L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2b & -b \\ -b & -2b \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right)$

$a+b-c+2d=0$
 $-2a+b+c-2d=0$
 $a+b+c+d=0$

$a+b-c+2d=0 \Rightarrow c=-b$
 $-2a+b+c-2d=0 \Rightarrow -2a+2b-2d=0 \Rightarrow a=b-d$
 $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b-b-d+d=0 \Rightarrow a=0$
 $a=b-d \Rightarrow b-d=0 \Rightarrow d=b$
 $c=-b$
 $d=b$
 $\dim \text{Ker } L = 1$

$M_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \Rightarrow \text{Im } L = \mathcal{L}(L(E_i), i=1,4)$

$L(E_1) = x^2 - 2x + 1$, $L(E_2) = x^2 + x + 1$, $L(E_3) = -x^2 + x + 1$, $L(E_4) = 2x^2 - 2x + 1$

у стандардној бази $F = (x^2, x, 1)$ простора $\mathbb{R}^2[x]$ имамо

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 + R_1, R_4 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2, R_4 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1/3), R_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{Im } L = \mathcal{L}(p_1, p_3, p_4)$
 $\dim \text{Im } L = 3$

б) $[L]_F^F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. [12п] Нека је $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$. Наћи A^{2025} .

$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 2 \\ 1 & -\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[- \lambda^2 - \lambda] = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$

$\lambda_1 = -1$

$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$

$-a+5b+7c=0$
 $a+b-c=0$
 $-a+b+3c=0$

$a+b-c=0$
 $6b+6c=0$
 $2b+2c=0$
 $c=-b \Rightarrow a=-2b$

$U_1 = (-2, 1, -1)$

$\lambda_2 = 0$

$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$

$-2a+5b+7c=0$
 $a-c=0$
 $-a+b+2c=0$

$c=a$
 $5b+5a=0$
 $b+a=0$
 $c=a, b=-a$

$U_2 = (1, -1, 1)$

$\lambda_3 = 1$

$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$

$-3a+5b+7c=0$
 $a-b-c=0$

$a-b-c=0$
 $2b+4c=0$
 $b=-2c, a=-c$

$U_3 = (-1, -2, 1)$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

НЕ МОРАМО
 РАЧУНАМО
 АКО
 ПРИМЕТИМО

$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$A = P D P^{-1} \Rightarrow A^{2025} = P D^{2025} P^{-1} = P D P^{-1} = A$ јер је $D^{2025} = D$!

5. [11п] У векторском простору $\mathbb{R}^4$ са стандардним скаларним производом дат је векторски потпростор V генерисан векторима $v_1 = (2, 1, 0, -1)$ и $v_2 = (0, 1, 1, 0)$.

а) Одредити бар једну базу потпростора $V^\perp$.

б) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $w = (4, -2, -1, 2)$ на V и $V^\perp$.

▲ а) $V^\perp = \{v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot v_1 = 0, v \cdot v_2 = 0\}$

$$\begin{aligned} 2a + b - d &= 0 \Rightarrow d = 2a + b \\ b + c &= 0 \Rightarrow c = -b \end{aligned} \Rightarrow V^\perp = \{(a, b, -b, 2a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathbb{R}((1, 0, 0, 2), (0, 1, -1, 1))$$

б) $w = w_1 + w_2, w_1 \in V, w_2 \in V^\perp$
 $w = \alpha v_1 + \beta v_2 + w_2$

$$\begin{aligned} / \cdot v_1 &\Rightarrow 4 = 6\alpha + \beta \\ / \cdot v_2 &\Rightarrow -3 = \alpha + 2\beta \end{aligned} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = -2$$

$$\Rightarrow w_1 = v_1 - 2v_2 = (2, -1, -2, -1), w_2 = w - w_1 = (2, -1, 1, 3)$$

6. [12п] Дате су права $p: \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ и раван $\alpha: x + 3y - z + 4 = 0$.

а) Одредити пресечну тачку A праве p и равни α , као и угао између њих.

б) Одредити једначину праве q која садржи тачку A , припада равни α и нормална је на праву p .

▲ а) $p: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
 $p \cap \alpha: 2t + 3 + 6t - t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1$
 $p \cap \alpha = A(1, -2, -1)$
 $\vec{p} = (2, 2, 1), \vec{n}_\alpha = (1, 3, -1)$
 $\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{p}|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{p}\|} = \frac{7}{\sqrt{11} \cdot 3} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{7}{3\sqrt{11}}$

б) $A(1, -2, -1) \in q$ ✓
 $q \subset \alpha \Rightarrow \vec{q} \perp \vec{n}_\alpha$
 $q \perp p \Rightarrow \vec{q} \perp \vec{p}$

$$\Rightarrow \vec{q} = \vec{n}_\alpha \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (5, -3, -4) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow q: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{-4}$$