



1. [12п] У зависности од реалног параметра $p \in \mathbb{R}$ решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 4x + (p+1)y + z &= 0 \\ (p+3)x + 6y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

▲ $\Delta = -(p+4)(p-3)$, $\Delta_x = -(p+4)$, $\Delta_y = p+4$, $\Delta_z = -(p+4)(p-3)$

1) $p \neq 3, p \neq -4 \Rightarrow \Delta \neq 0 \xrightarrow{\text{КРАМЕР}} \text{јединствено решење}$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{p-3}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{p-3}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1$$

2) $p = 3 \Rightarrow \Delta = 0$ али $\Delta_x = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{нема решења}$

3) $p = -4 \Rightarrow \Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \Rightarrow \text{ГЛУС}$

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 0 \\ -x + 6y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - 4y &= -1 \\ -3x + 4y &= 1 \end{aligned} \Rightarrow 0=0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{4\alpha - 1}{3} \\ y &= \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z &= 1 - \frac{4\alpha}{3} + \frac{1}{3} - \alpha = \frac{4 - 7\alpha}{3} \end{aligned} \quad \text{бесконечно решења}$$

2. [11п] Дати су

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}, \quad \text{где је } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

и

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a \leq b, c = a + d \right\}.$$

а) Испитати да ли су U и W векторски потпростори од $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити базу и димензију за U . 0) $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U, W \checkmark$

а) U 1) $A_1, A_2 \in U \Rightarrow (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2) \Rightarrow A_1 + A_2 \in U$

2) $\alpha \in \mathbb{R}, A \in U \Rightarrow (\alpha A)B = \alpha AB = \alpha BA = B(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U \checkmark \Rightarrow U \leq M_2(\mathbb{R})$

W) 1) $\checkmark$ 2) КОНТРАПРИМЕР $-1 \in \mathbb{R}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in W$ али $(-1) \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \notin W$ јер $-1 \not\leq -2 \Rightarrow W \not\leq M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{б) } U &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{aligned} a &= a + 2c, & 2a - b &= b + 2d \\ c &= -c, & 2c - d &= -d \end{aligned} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid c=0, d=a-b \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \quad \dim U = 2 \end{aligned}$$

3. [12п] Дата су линеарна пресликавања

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = (x - y, x, 3x - y),$$

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G(x, y, z) = (x - 2y + z, -x + y + z, 2x - 3y + z).$$

а) Одредити матрице пресликавања F и G у односу на канонске базе.

б) Одредити (уколико постоје) пресликавања $F \circ G$ и $G \circ F$.

в) Одредити базу и димензију за $\text{Ker} F$ и $\text{Im} F$.

а) $F(e_1) = (1, 1, 3)$, $F(e_2) = (-1, 0, -1) \Rightarrow [F] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $G(e_1) = (1, -1, 2)$, $G(e_2) = (-2, 1, -3)$, $G(e_3) = (1, 1, 1) \Rightarrow [G] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

б) $[G \circ F] = [G] \cdot [F] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $[F \circ G] = [F] \cdot [G]$ није дефинисано

$$\Rightarrow G \circ F(x, y) = (2x - 2y, 3x, 2x - 3y) \quad , \quad F \circ G \text{ не постоји} \quad \dim \ker F = 0$$

$$b) \ker F = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \mid x - y = 0, x = 0, 3x - y = 0\} = \{(0, 0)\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(e_1, e_2) \Rightarrow \operatorname{Im} F = \mathcal{L}(Fe_1, Fe_2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dim \operatorname{Im} F = 2 \\ \operatorname{Im} F = \mathcal{L}(Fe_1, Fe_2) \end{cases}$$

4. [12п] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице A .

б) Одредити сопствене векторе и сопствене вредности матрице A .

в) Ако је $f(x) = x^{2026} - 2x^{2025} - x^{2024} + 2x^{2023} + 2025x - 2025$, израчунати $f(A)$.

а) $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \dots = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \Rightarrow \mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

б) $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_0 = (-1, 0, 1), u_1 = (0, 1, 0), u_2 = (1, 2, 1)$

в) $\mu_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda \Rightarrow A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \quad \textcircled{*}$

$$f(x) = (x^{2026} - 3x^{2025} + 2x^{2024}) + (x^{2025} - 3x^{2024} + 2x^{2023}) + 2025x - 2025$$

$$\Rightarrow f(A) = A^{2023} \underbrace{(A^3 - 3A^2 + 2A)}_{\textcircled{*}=0} + A^{2022} \underbrace{(A^3 - 3A^2 + 2A)}_{\textcircled{*}=0} + 2025(A - E)$$

$$\Rightarrow f(A) = 2025(A - E) = 2025 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2025 \\ 2025 & 0 & 2025 \\ 2025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. [11п] Нека је векторски простор W генерисан векторима

$$w_1 = (0, 0, 1), \quad w_2 = (1, 1, 2), \quad w_3 = (-1, 1, -1), \quad w_4 = (-4, 2, -3).$$

Користећи Грам-Шмитов поступак ортогонализације одредити ортонормирану базу W .

Приметимо наизглед $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$.

$$e_1 = w_1 = (0, 0, 1)$$

$$e_2 = w_2 - \frac{w_2 \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1} e_1 = (1, 1, 2) - \frac{2}{1} (0, 0, 1) = (1, 1, 0)$$

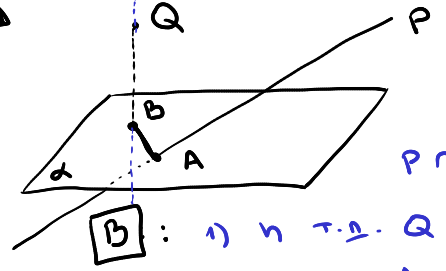
$$e_3 = w_3 - \frac{w_3 \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1} e_1 - \frac{w_3 \cdot e_2}{e_2 \cdot e_2} e_2 = (-1, 1, -1) - \frac{-1}{1} (0, 0, 1) - 0 = (-1, 1, 0)$$

$\Rightarrow$ ортогонална база $(e_1 = (0, 0, 1), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (-1, 1, 0))$

$\Rightarrow$ ортонормирана база $(\hat{e}_1 = (0, 0, 1), \hat{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \hat{e}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0))$

6. [12п] Дате су тачка $Q(1, 0, 2)$, права $p: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-2}$ и раван $\alpha: x + y + z = 6$.

Ако је тачка A продор праве p кроз раван α и тачка B пројекција тачке Q на раван α , израчунати дужину дужи AB .



$A = p \cap \alpha$: $p: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$p \cap \alpha: t + 2t - 2t + 5 = 6 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow A(1, 2, 3)$

B : 1) $n \perp \alpha, Q \in n, n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$

$\Rightarrow n: \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda + 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

2) $B = n \cap \alpha: \lambda + 1 + \lambda + \lambda + 2 = 6 \Rightarrow \lambda = 1$

$\Rightarrow B(2, 1, 3)$

$|AB| = \|\vec{AB}\| = \|(1, -1, 0)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$