

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

СЕПТЕМБАР 1 - 30.08.2024. године

Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В

Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци ОБАВЕЗНО попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а)-д):

а) [1п] линеарни омотач (линеал) скупа вектора $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$;

б) [1п] база векторског простора V ;

в) [1п] линеарно пресликавање $L : U \rightarrow W$;

г) [1п] сопствена вредност матрице A ;

д) [1п] унитарни векторски простор;

ђ) [2п] Одредити једначину нормале из тачке $A(0, 0)$ на праву $p : x + 2y - 2024 = 0$;

е) [3п] Израчунати запремину тетраедра са теменима $A(1, 0, 0)$, $B(1, -2, 1)$, $C(-3, -2, 1)$ и $D(2, 2, 2)$.

2. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ и нека је $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA + X^T A^{-1} = 0\}$.

а) [3п] Доказати да је U векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) [3п] Одредити бар једну базу за U , као и димензију тог простора.

в) [4п] Ако је $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + b = c + d \right\}$, испитати да ли је $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

3. а) [7п] У зависности од реалног параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ наћи минимални полином $\mu_A(\lambda)$ матрице

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 \\ -2\alpha - 5 & 2\alpha - 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

б) [3п] За $\alpha = 1$ одредити сопствени вектор који одговара најмањој сопственој вредности.

4. На векторском простору $\mathbb{R}^4$ дато је пресликавање $\langle, \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_4 y_4.$$

а) [3п] Доказати да је $\langle, \rangle$ скаларни производ на $\mathbb{R}^4$.

б) [3п] Ако је $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = 0, -x - 2y + 3z + 5t = 0, -x - 2y - z - 7t = 0\}$ одредити бар једну базу простора $U^\perp$.

в) [4п] Ком од простора U и $U^\perp$ је вектор $v = (1, -1, -3, 3)$ ближи?

5. Дате су праве $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$ и $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}$ и тачка $A(3, -4, 5)$.

а) [5п] Наћи једначину равни α која је паралелна правама p и q и садржи тачку A .

б) [5п] Одредити ортогоналну пројекцију праве p на раван α .

6. [10п] Нека је L линеарно пресликавање векторског простора V са базом $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Доказати да је пресликавање L инвертибилно ако и само ако су вектори $L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)$ линеарно независни.