



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета - група задатака, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. [6п] Гаус-Жордановом методом, користећи проширену матрицу, решити систем једначина

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 &= -7, \\ 5x_1 - 8x_2 - x_3 + 17x_4 &= 31, \\ x_1 + x_2 + 11x_3 + 7x_4 &= 21.\end{aligned}$$

2. [8п] Нека су

$$\begin{aligned}U_1 &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + d = 0, b = a \cdot c\}, \\ U_2 &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + d = 0, -a + b - d = 0\}, \\ U_3 &= \mathcal{L}\{(1, 0, -1, 2), (-2, 0, 1, 1), (0, 0, -2, 10), (1, 0, -2, 7)\}.\end{aligned}$$

- а) Испитати да ли је $U_1 \leq \mathbb{R}^4$?
б) Одредити базу и димензију за U_2 и U_3 .
в) Испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = U_2 + U_3$. Да ли је сума директна?

3. [7п] Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ пресликавање дато са $L(X) = AX + X^T A$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

- а) Доказати да је L линеарно пресликавање.
б) Проверити које од следећих матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -2024 \\ -2024 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

се налазе у језгру а које у слици пресликавања L ?

- в) Одредити базу и димензију $\text{Im} L$ и $\text{Ker} L$.

4. [6п] Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$, решити

$$\begin{aligned}a^2 x + 2ay &= 1, \\ 2ax + a^2 y &= -1.\end{aligned}$$

5. [8п] Нека је $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ база за V и $L : V \rightarrow V$ линеарно пресликавање за које важи

$$L(v_1) = 2v_1 - v_2 + 2v_3, \quad L(v_2) = v_1 + v_3, \quad L(v_3) = -v_1 + 2v_2 + v_3.$$

Нека је $S' = \{w_1, w_2, w_3\}$ друга база за V где је

$$w_1 = 2v_1 + 4v_2 + 5v_3, \quad w_2 = -3v_1 - 5v_2 - 7v_3, \quad w_3 = v_1 + 2v_2 + 3v_3.$$

Без коришћења матрице преласка са једне базе на другу одредити матрицу пресликавања L у бази S' . *Решење коришћењем матрице преласка носи 4 поена.



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета - група задатака, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. [6п] Гаус-Жордановом методом, користећи проширену матрицу, решити систем једначина

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 18, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 &= -20, \\ 5x_1 - 8x_2 - x_3 + 17x_4 &= 76, \\ x_1 + x_2 + 11x_3 + 7x_4 &= 52.\end{aligned}$$

2. [8п] Нека су

$$\begin{aligned}W_1 &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0, d = a \cdot c\}, \\ W_2 &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + c + d = 0, -a + c - d = 0\}, \\ W_3 &= \mathcal{L}\{(1, -1, 0, 2), (-2, 1, 0, 1), (0, -1, 0, 5), (-1, 0, 0, 3)\}.\end{aligned}$$

- а) Испитати да ли је $W_1 \leq \mathbb{R}^4$?
б) Одредити базу и димензију за W_2 и W_3 .
в) Испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = W_2 + W_3$. Да ли је сума директна?

3. [7п] Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ пресликавање дато са $L(X) = BX + X^T B$, где је $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- а) Доказати да је L линеарно пресликавање.
б) Проверити које од следећих матрица

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 2024 \\ 2024 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

се налазе у језгру а које у слици пресликавања L ?

- в) Одредити базу и димензију $\text{Im}L$ и $\text{Ker}L$.

4. [6п] Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалног параметра $b \in \mathbb{R}$, решити

$$\begin{aligned}3bx + b^2y &= -1, \\ b^2x + 3by &= 1.\end{aligned}$$

5. [8п] Нека је $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ база за V и $L : V \rightarrow V$ линеарно пресликавање за које важи

$$L(v_1) = 2v_1 - v_2 + 2v_3, \quad L(v_2) = v_1 + v_3, \quad L(v_3) = -v_1 + 2v_2 + v_3.$$

Нека је $S' = \{w_1, w_2, w_3\}$ друга база за V где је

$$w_1 = v_1 + 2v_2 + 3v_3, \quad w_2 = 2v_1 + 4v_2 + 5v_3, \quad w_3 = -3v_1 - 5v_2 - 7v_3.$$

Без коришћења матрице преласка са једне базе на другу одредити матрицу пресликавања L у бази S' . *Решење коришћењем матрице преласка носи 4 поена.