

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
СЕПТЕМБАР 3 - 05.11.2025. године
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. [12п] Дати су вектори

$$\vec{a} = (1, 0, k + 2), \quad \vec{b} = (k, 3, -1), \quad \vec{c} = (2, -2, 2), \quad \vec{d} = (1, 0, 3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

- а) За које вредности параметра k су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно зависни?
б) Доказати да за $k = -3$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$, а затим вектор $\vec{d}$ представити као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
2. [11п] Нека су U и W различити петодимензиони потпростори векторског простора V димензије 7. Одредити могуће вредности за $\dim(U + W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од тих вредности.
3. [12п] Нека је пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ дато са

$$L(X) = X \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\text{tr}(X) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- а) Доказати да је пресликавање L линеарно.
б) Одредити бар по једну базу за $\text{Ker } L$ и $\text{Im } L$, као и ранг и дефект пресликавања L .
4. [12п] Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [11п] Ако је на простору $\mathbb{R}^2[x]$ полинома степена ≤ 2 скаларни производ дефинисан са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0),$$

и $W = \{p \in \mathbb{R}^2[x] \mid p(1) + p(-1) = 0\}$, одредити ком од потпростора W и $W^\perp$ је полином $p(x) = x^2 + 2x + 9$ ближи.

6. [12п] Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних правих

$$p : \frac{x-1}{0} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{и} \quad q : \frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+5}{3}.$$