

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
СЕПТЕМБАР 2 - 24.10.2025. године
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. [12п] Дати су вектори

$$\vec{a} = (2k - 1, 2, k + 2), \quad \vec{b} = (3, k - 1, -1), \quad \vec{c} = (p, 1, 3), \quad k, p \in \mathbb{R}, \quad p \leq 0.$$

- а) Одредити вредност параметара k и p тако да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ буду ортогонални и да је $\|\vec{c}\| = \sqrt{26}$.
б) Доказати да су тада вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ копланарни, а затим вектор $\vec{a}$ представити као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2. [11п] Дати су векторски потпростори

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b - c = 0, -a + b + c = 0\}$$

и

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + 2b + 3c + 4d = 0\}.$$

Одредити базу и димензију за просторе U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

3. [12п] Нека је пресликавање $L: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ дато са

$$L(A) = A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A^T.$$

- а) Доказати да је пресликавање L линеарно.
б) Одредити базу и димензију за $\text{Ker } L$ и $\text{Im } L$.
в) Одредити матрицу пресликавања L у односу на канонску базу простора $M_2(\mathbb{R})$.

4. [12п] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити карактеристични и минимални полином матрице A . За $a = 0$ испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [11п] Ако је на простору $\mathbb{R}^2[x]$ полинома степена ≤ 2 скаларни производ дефинисан са

$$p \circ q = 4p(0)q(0) + 2p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0),$$

и $W = \{p \in \mathbb{R}^2[x] \mid p'(1) + p(-1) = 0\}$, одредити ком од потпростора W и $W^\perp$ је полином $p(x) = -x^2 + 3x - 7$ ближи.

6. [12п] Дате су тачке

$$P_1(1, 1, 1), \quad U(2, 1, -1), \quad M(-1, 0, 2), \quad P_2(1, 1, -1), \quad A(-1, -1, 1), \quad J(-2, 4, 2).$$

Ако је B тачка симетрична тачки J у односу на раван троугла P_1UM и C тачка симетрична тачки J у односу на праву P_2A , одредити дужину дужи BC .