

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
СЕПТЕМБАР 1 - 11.10.2025. године
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. [12п] Дати су вектори

$$\vec{a} = (7, 6, -6), \quad \vec{b} = (6, 2, 9), \quad \vec{c} = (-6, 9, 2), \quad \vec{d} = (19, -1, 1).$$

- а) Доказати да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некопланарни.
б) Доказати да је паралелепипед разапет векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коцка и израчунај њену запремину.
в) Вектор $\vec{d}$ представити као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2. [11п] Дати су векторски потпростори

$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A^T \right\}$$

и

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + 2b = 0 \right\}.$$

- а) Одредити базу и димезију за U и W .
б) Испитати да ли је $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

3. [12п] Дата су пресликавања

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & F(x, y) &= (x - 2y + 1, x + y), \\ G : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & G(x, y, z) &= (-x + y + 2z, y - z, x - 2y - z). \end{aligned}$$

- а) Испитати да ли су пресликавања F и G линеарна.
б) Одредити базу и димензију за $\text{Ker } G$ и $\text{Im } G$.
в) Одредити матрицу пресликавања G у односу на базу

$$S = \{f_1 = (1, 0, 1), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 1, 1)\}.$$

4. [11п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [12п] Ако је на простору $\mathbb{R}^2[x]$ полинома степена ≤ 2 скаларни производ дефинисан са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0),$$

и $W = \{p \in \mathbb{R}^2[x] \mid p(1) + p(-1) = 0\}$, одредити ком од потпростора W и $W^\perp$ је полином $p(x) = x^2 + 2x + 9$ ближи.

6. [12п] Дате су тачке

$$P_1(-1, -2, 1), \quad U(2, -5, 3), \quad M(7, -4, 1), \quad P_2(3, 0, -3), \quad A(2, -3, 1), \quad J(0, 5, -1).$$

- а) Одредити једначину праве l која сече праве P_1U и MP_2 и која садржи тачку A .
б) Одредити тачку B која је пројекција тачке J на праву P_1U .