

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

ЈУН 2 - 29.09.2025. године

Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В

Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. [12п] У зависности од реалног параметра $p \in \mathbb{R}$ решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 4x + (p+1)y + z &= 0 \\ (p+3)x + 6y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

2. [11п] Дати су

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}, \quad \text{где је} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

и

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a \leq b, c = a + d \right\}.$$

а) Испитати да ли су U и W векторски потпростори од $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити базу и димезију за U .

3. [12п] Дата су линеарна пресликавања

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & F(x, y) &= (x - y, x, 3x - y), \\ G : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & G(x, y, z) &= (x - 2y + z, -x + y + z, 2x - 3y + z). \end{aligned}$$

а) Одредити матрице пресликавања F и G у односу на канонске базе.

б) Одредити (уколико постоје) пресликавања $F \circ G$ и $G \circ F$.

в) Одредити базу и димензију за $\text{Ker} F$ и $\text{Im} F$.

4. [12п] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице A .

б) Одредити сопствене векторе и сопствене вредности матрице A .

в) Ако је $f(x) = x^{2026} - 2x^{2025} - x^{2024} + 2x^{2023} + 2025x - 2025$, израчунати $f(A)$.

5. [11п] Нека је векторски простор W генерисан векторима

$$w_1 = (0, 0, 1), \quad w_2 = (1, 1, 2), \quad w_3 = (-1, 1, -1), \quad w_4 = (-4, 2, -3).$$

Користећи Грам-Шмитов поступак ортогонализације одредити ортонормирану базу W .

6. [12п] Дате су тачка $Q(1, 0, 2)$, права $p : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-2}$ и раван $\alpha : x + y + z = 6$.

Ако је тачка A продор праве p кроз раван α и тачка B пројекција тачке Q на раван α , израчунати дужину дужи AB .