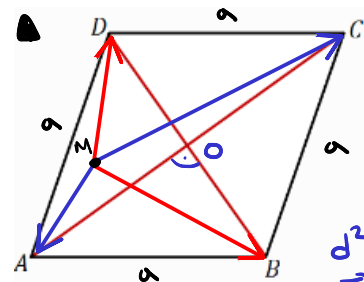




1. Нека је $ABCD$ ромб чија је дужина странице a и пресечна тачка дијагонала AC и BD је O . Нека је M тачка за коју важи $\vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = d^2$, где је d дати позитиван реалан број.

а) [6п] Доказати да је тежиште скупа тачака $\{A, B, C, D\}$ тачка O , као и да је $2\|\vec{MO}\|^2 = a^2 + d^2$.

б) [8п] Израчунати $\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 + \|\vec{MC}\|^2 + \|\vec{MD}\|^2$ помоћу датих бројева a и d .



а) O тежиште $ABCD \Leftrightarrow (\forall O') \vec{O'O} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

$$\vec{O'O} = \frac{1}{4}(\vec{O'O} + \vec{O'A} + \vec{O'O} + \vec{O'B} + \vec{O'O} + \vec{O'C} + \vec{O'O} + \vec{O'D})$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{O'O} + \vec{O'A} + \vec{O'O} + \vec{O'B} + \vec{O'O} + \vec{O'C} + \vec{O'O} + \vec{O'D}) = \vec{O'O} \checkmark$$

$\Rightarrow O$ је тежиште $ABCD$

$$d^2 = \vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OC}) + (\vec{MO} + \vec{OB}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OD})$$

$$= \|\vec{MO}\|^2 + \vec{MO} \cdot \vec{OC} + \vec{OA} \cdot \vec{MO} + \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \|\vec{MO}\|^2 + \vec{MO} \cdot \vec{OD} + \vec{OB} \cdot \vec{MO} + \vec{OB} \cdot \vec{OD}$$

$$\vec{OC} = -\vec{OA} \quad \vec{OD} = -\vec{OB} \Rightarrow 2\|\vec{MO}\|^2 - (\|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2) = 2\|\vec{MO}\|^2 - a^2 \Rightarrow 2\|\vec{MO}\|^2 = a^2 + d^2$$

$b = a^2$ (ПИТАГОРА)

$$\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 + \|\vec{MC}\|^2 + \|\vec{MD}\|^2 = \vec{MA} \cdot \vec{MA} + \vec{MB} \cdot \vec{MB} + \vec{MC} \cdot \vec{MC} + \vec{MD} \cdot \vec{MD}$$

$$= (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MC}) - 2\vec{MA} \cdot \vec{MC} + (\vec{MB} + \vec{MD}) \cdot (\vec{MB} + \vec{MD}) - 2\vec{MB} \cdot \vec{MD} = \textcircled{*}$$

$$+ \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MO} + \vec{OA} + \vec{MO} + \vec{OC} = 2\vec{MO}, \quad \vec{MB} + \vec{MD} = \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OD} = 2\vec{MO} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{*} = 2\vec{MO} \cdot 2\vec{MO} - 2(\vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MB} \cdot \vec{MD}) + 2\vec{MO} \cdot 2\vec{MO}$$

$$= 8\|\vec{MO}\|^2 - 2d^2 \stackrel{\textcircled{*}}{=} 4(a^2 + d^2) - 2d^2 = \boxed{4a^2 + 2d^2}$$

2. Дате су права $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и тачка $C(0, 1, 4)$. $\Rightarrow p: x = 2t-1, y = t, z = 2t+1, t \in \mathbb{R}$

а) [9п] Одредити координате тачака A и B које припадају правој p тако да $\triangle ABC$ буде једнакокраки троугао са основицом AB дужине 12.

б) [4п] Одредити једначину висине $\triangle ABC$ из темена C као и дужину те висине.

в) [2п] Одредити површину $\triangle ABC$ помоћу векторског израза за површину троугла, а затим коришћењем дужине основице AB и висине из темена C . Проверити да су резултати једнаки.

а) $A, B \in p \Rightarrow A(2t_1-1, t_1, 2t_1+1), B(2t_2-1, t_2, 2t_2+1)$ за неке $t_{1/2}$

$$1) 12 = AB = d(A, B) = \sqrt{(2t_1-2t_2)^2 + (t_1-t_2)^2 + (2t_1-2t_2)^2} = \sqrt{9(t_1-t_2)^2} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow 144 = 9(t_1-t_2)^2 \Rightarrow t_1-t_2 = \pm 4 \Rightarrow t_1 = 4 + t_2 \quad \begin{matrix} \text{свеједно } \pm 4 \\ \text{јер ће само} \\ \text{ЗАМЕНИТИ } A \text{ и } B \end{matrix}$$

$$2) d(A, C) = d(B, C) \Rightarrow \sqrt{(2t_1-1)^2 + (t_1-1)^2 + (2t_1-3)^2} = \sqrt{(2t_2-1)^2 + (t_2-1)^2 + (2t_2-3)^2}$$

$$\Rightarrow 9t_1^2 - 18t_1 + 11 = 9t_2^2 - 18t_2 + 11 \quad \text{/:9}$$

$$t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2 \xrightarrow{+1} 16 + 8t_2 + t_2^2 - 8 - 2t_2 = t_2^2 - 2t_2$$

$$\Rightarrow t_2 = -1 \Rightarrow t_1 = 3 \Rightarrow \boxed{A(5, 3, 7), B(-3, -1, -1)}$$

б) **I НАЧИН** $\triangle ABC$ једнакокрак $\Rightarrow C' = S(AB) \Rightarrow \underline{C'(1, 1, 3)}$

II НАЧИН C' пројекција C на праву $p = AB$
1) α т.д. $C \in \alpha, \alpha \perp p \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} = (2, 1, 2)$
 $\Rightarrow \alpha: 2(x-0) + 1(y-1) + 2(z-4) = 0 \Rightarrow \alpha: 2x + y + 2z - 9 = 0$

$$2) p \cap \alpha: 2(2t-1) + t + 2(2t+1) - 9 = 0 \Rightarrow 9t - 9 = 0 \Rightarrow \underline{t = 1}$$

$$\Rightarrow \underline{C'(1, 1, 3)} \quad \underline{C(0, 1, 4)} \Rightarrow \left[h_c: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{-1} \right]$$

$$h_c = \|\vec{CC'}\| = \|(1, 0, -1)\| = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{в) } P = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 16^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 \cdot 18} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sqrt{2} = \boxed{6\sqrt{2}}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -4 & -8 \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-4, 16, -4) \quad P = \frac{C \cdot h_c}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{2} = \boxed{6\sqrt{2}} \quad \checkmark$$

3. [15п] Изометријском трансформацијом свести криву $K: 3x^2 + 8xy + 9y^2 + 2x - y + 1 = 0$ на канонски облик. Која крива је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = (3-\lambda)(9-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 12\lambda + 11 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 11$$

$$\dots \varphi_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), \varphi_{11} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}' : \frac{3}{5}(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + \frac{8}{5}(-2x'^2 - 3x'y' + 2y'^2) + \frac{9}{5}(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) + \frac{2}{\sqrt{5}}(-2x' + y') - \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}' : x'^2 + 11y'^2 - \sqrt{5}x' + 1 = 0 \Rightarrow \mathcal{K}' : (x' - \frac{\sqrt{5}}{2})^2 + 11y'^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y'' = y' \end{cases} \Rightarrow \mathcal{K}'' : \frac{x''^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y''^2}{(\frac{1}{2\sqrt{11}})^2} = 1 \Rightarrow \text{елипса}$$

4. [14п] Одредити једначину кружног конуса чија је оса права $o : \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+1}{3}$, чији врх припада равни $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$ и који садржи тачку $M(1, 1, 1)$.

1) Врх конуса $V = \alpha \cap o$:

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -1 \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} 4t - 1 - 2 - 3t + 1 + 1 = 0 \\ \Rightarrow t - 1 = 0 \\ \Rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow V(3, -1, 2)$$

$$2) \varphi = \angle(O, VM) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{|\vec{O} \cdot \vec{VM}|}{\|\vec{O}\| \cdot \|\vec{VM}\|} = \frac{|-8 + 0 - 3|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{9}} = \frac{11}{15}$$

$$\vec{O} = (4, 0, 3), \vec{VM} = (-2, 2, -1)$$

3) $N(x, y, z) \in \mathcal{K}$ произв $\Rightarrow \mathcal{K} : \angle(O, VN) = \arccos \frac{11}{15} = \varphi$

$$\Rightarrow \frac{11}{15} = \cos \varphi = \frac{|(4, 0, 3) \cdot (x-3, y+1, z-2)|}{5 \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2}} = \frac{|4(x-3) + 3(z-2)|}{5 \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K} : 121[(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2] = 9(4x + 3z - 18)^2$$

5. На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

а) [5п] Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$.

б) [7п] Одредити све стране и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.

$$A(0, 0, 1) \Rightarrow A : \varphi_A = \pi/2, \theta_A - \text{недеф.}$$

$$B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\cos \theta_B \cos \varphi_B, \sin \theta_B \cos \varphi_B, \sin \theta_B \sin \varphi_B) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_B = \pi/4 \\ \theta_B = \pi/2 \end{cases}$$

$$\widehat{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\widehat{AC} = \varphi_A - \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \varphi_C \Rightarrow \varphi_C = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Нека је } \theta_C : \varphi_C = \frac{\pi}{4}, \theta_C = 0$$

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} = |\theta_B - \theta_C| = |\frac{\pi}{2} - \theta_C| \Rightarrow \theta_C = 0 \quad \checkmark \quad \theta_C = \pi$$

$$\Rightarrow b = c = \frac{\pi}{4}, a = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$b = c \Rightarrow B = \gamma : \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos B \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos B$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{1}{3} \Rightarrow B = \gamma = \arccos \frac{1}{3}$$

$$P = \alpha + B + \gamma - \pi = 2\arccos \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}$$