



1. Нека је $\triangle ABC$ троугао и тачке P и Q такве да је $\vec{AP} = 3\vec{PB}$ и $\vec{BQ} = -3\vec{QC}$, а тачка R пресек правих AQ и PC .

а) [8п] Израчунати однос у ком права AC дели дуж RB .

б) [6п] Уколико је $A(1,0)$, $B(5,0)$ и $C(2,3)$, израчунати површину троугла $\triangle APR$.

а) Означимо са X пресечну тачку AC и RB

P, C, R колин. $\langle \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CA}} \cdot \frac{\vec{QR}}{\vec{RA}} \rangle = -1 \Rightarrow \frac{\vec{QR}}{\vec{RA}} = -\frac{1}{6}$

AX, BQ, RP конк. $\langle \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QR}} \cdot \frac{\vec{RQ}}{\vec{QA}} \rangle = 1 \Rightarrow \frac{\vec{BQ}}{\vec{QR}} = \frac{5}{3}$

б) Означимо коорд. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ и $R(x_3, y_3)$.

$\vec{AP} = 3\vec{PB} \Rightarrow (x_1 - 1, y_1) = 3(5 - x_1, -y_1) \Rightarrow x_1 - 1 = 15 - 3x_1, y_1 = -3y_1 \Rightarrow P(4, 0)$

$\vec{BQ} = -3\vec{QC} \Rightarrow (x_2 - 5, y_2) = -3(2 - x_2, 3 - y_2) \Rightarrow x_2 - 5 = -6 + 3x_2, y_2 = -9 + 3y_2 \Rightarrow Q(1/2, 9/2)$

$\Rightarrow \vec{QA} = 5\vec{RQ} \Rightarrow (1/2, -9/2) = 5(x_3 - 1/2, y_3 - 9/2) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - 5x_3, -\frac{9}{2} = \frac{45}{2} - 5y_3 \Rightarrow R(2/5, 27/5)$

$$P_{\triangle APR} = \frac{1}{2} \|\vec{AP} \times \vec{AR}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 27 & 5 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| (0, 0, \frac{81}{5}) \right\| = \frac{81}{10}$$

2. Дате су тачке $P(1,1)$ и $D(1,-1)$, као и права $s: x + 2y - 1 = 0$.

а) [7п] Одредити праву d која садржи тачку D и нормална је на праву s , а затим одредити једначине обе симетрале углова које граде праве d и s .

б) [7п] Одредити једначину параболе која садржи тачку P и којој је права s оса симетрије, а права d директриса.

а) $s: x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_s = (1, 2)$

$d \perp s \Rightarrow \vec{d} = \vec{n}_s, D \in d \Rightarrow d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow d: 2x - y - 3 = 0$

Означимо симетрале Δ_1 и $\Delta_2 \Rightarrow$ произв. $M \in \Delta_{1/2} \Rightarrow d(M, s) = d(M, d)$

$\Rightarrow \frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y-3|}{\sqrt{5}} \Rightarrow x+2y-1 = \pm(2x-y-3)$

$\Rightarrow \Delta_1: -x+3y+2=0, \Delta_2: 3x+y-4=0$

б) Нека је $F(x_0, y_0)$ жижка параболе $\mathcal{P}$

1) $F \in s \Rightarrow x_0 + 2y_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 - 2y_0$

2) $P \in \mathcal{P} \Rightarrow d(P, F) = d(P, d) \Rightarrow \sqrt{(1-2y_0-1)^2 + (y_0-1)^2} = \frac{|2-1-3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow 5[4y_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1] = 4 \Rightarrow 25y_0^2 - 10y_0 + 1 = 0 \Rightarrow (5y_0 - 1)^2 = 0 \Rightarrow y_0 = 1/5$

$\Rightarrow F(11/5, 31/5)$

$M(x, y) \in \mathcal{P}$ произв. $\Rightarrow \mathcal{P}: d(M, F) = d(M, d) \Rightarrow \mathcal{P}: \sqrt{(x-11/5)^2 + (y-31/5)^2} = \frac{|2x-y-3|}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \mathcal{P}: 5((x-11/5)^2 + (y-31/5)^2) = (2x-y-3)^2$

3. Дате су права $l: \frac{x}{6} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{5}$ и сфере $S_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ и $S_2: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.

а) [5п] Одредити формуле свих хомотетија којима се сфера S_1 пресликава на сферу S_2 .

б) [9п] Одредити једначине равни које садрже праву l и додирују сферу S_2 .

а) $S_1: C_1(-3, 2, 3), r_1 = 1 \mapsto S_2: C_2(0, 0, 1), r_2 = 2 \Rightarrow |C_1 C_2| = 2$

$k_1 = -2, C_1 \mapsto C_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \chi_{A_1, -2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$k_2 = 2, C_1 \mapsto C_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \chi_{A_2, 2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$

6) Нека је тражена равна $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

1) $L(0, -4, 0) \in \ell \subset \alpha \Rightarrow -4B + D = 0 \Rightarrow D = 4B \Rightarrow D = -12A - 10C$

2) $\ell \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{\ell} = (6, 2, 5) \Rightarrow 6A + 2B + 5C = 0 \Rightarrow B = -3A - \frac{5}{2}C$

3) α додирне $S_2 \Rightarrow d(C_2, \alpha) = r_2 \Rightarrow \frac{|C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 2 \quad /^2$

$\Rightarrow (-12A - 5C)^2 = 4(A^2 + 9A^2 + 15AC + \frac{25}{4}C^2 + C^2)$

$144A^2 + 216AC + 81C^2 = 40A^2 + 60AC + 25C^2$

$104A^2 + 156AC + 52C^2 = 0 \quad / : 52C^2 \neq 0$

$2(\frac{A}{C})^2 + 3(\frac{A}{C}) + 1 = 0$

$t = \frac{A}{C} \Rightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \rightarrow -1 = \frac{A}{C} \rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{A}{C}$

I $C = -A \Rightarrow B = -\frac{1}{2}A \Rightarrow D = -2A \xrightarrow{\text{нпр } A=2} \alpha_1: 2x - y - 2z - 4 = 0$

II $C = -2A \Rightarrow B = 2A \Rightarrow D = 8A \xrightarrow{\text{нпр } A=1} \alpha_2: x + 2y - 2z + 8 = 0$

4. [16п] Површ $P: 2x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 4x - 8y + 4z + 6 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \dots = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow (B + 2E)u = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} b = -2a \\ c = 0 \end{matrix} \Rightarrow u_{-2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow (B - 3E)u = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a = 2b \\ c = 0 \end{matrix} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y'), z = z'$

$S': \frac{2}{5}(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) - \frac{1}{5}(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + z'^2 + \frac{4}{5}(-2x'^2 - 3x'y' + 2y'^2) + \frac{4}{\sqrt{5}}(x' + 2y') - \frac{8}{\sqrt{5}}(-2x' + y') + 4z' + 6 = 0$

$\Rightarrow S': -2x'^2 + 3y'^2 + z'^2 + 4\sqrt{5}x' + 4z' + 6 = 0$

$S': -2(x' - \sqrt{5})^2 + 10 + 3y'^2 + (z' + 2)^2 - 4 + 6 = 0$

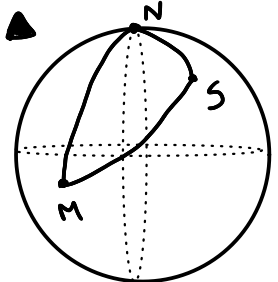
$S'': -2x''^2 + 3y''^2 + z''^2 = -12 \quad / : -12$

$S'': \frac{x''^2}{6} - \frac{y''^2}{4} - \frac{z''^2}{12} = 1$ **двограни хиперболоид**

смена $\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{5} \\ y'' = y' \\ z'' = z' + 2 \end{cases}$
 $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'' + \sqrt{5})$
 $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'' + y'' - 2\sqrt{5})$
 $z = z'' - 2$

формуле трансформ.

5. [12] Марсовци Пум и Пај су слетели на планету Земљу ($R = 6371 \text{ km}$), редом у градове Монтевидео ($30^\circ \text{S}, 59^\circ \text{W}$) и Санкт Петербург ($60^\circ \text{N}, 31^\circ \text{E}$). Одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.



Означимо са М и S локације Монтевидео и Санкт Пет. Претпоставимо да је полупречник 1 и N северни пол.

M: $\varphi_M = -30^\circ, \theta_M = -59^\circ$ S: $\varphi_S = 60^\circ, \theta_S = 31^\circ$, N: $\varphi_N = 90^\circ$

$\cos \widehat{MS} = \cos \widehat{NM} \cos \widehat{NS} + \sin \widehat{NM} \sin \widehat{NS} \cos \angle MNS$

$\widehat{NM} = \varphi_N - \varphi_M = 120^\circ, \widehat{NS} = \varphi_N - \varphi_S = 30^\circ, \angle MNS = |\theta_M - \theta_S| = 90^\circ$

$\Rightarrow \cos \widehat{MS} = \cos 120^\circ \cos 30^\circ + \sin 120^\circ \sin 30^\circ \cdot \underline{\cos 90^\circ = 0}$

$\cos \widehat{MS} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

Применом хомотетије, на Земљи добијамо

$\Rightarrow \widehat{MS} = R \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{4}) = 6371 \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ km}$