



1. а) [2п] Доказати да за произвољне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$.
 б) [10п] Нека је D тачка на страници BC троугла ABC . Доказати да је тада

$$\|\vec{AD}\|^2 = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \|\vec{AC}\|^2 + \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} \|\vec{AB}\|^2 + \vec{BD} \circ \vec{CD}.$$

▲ а) $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b}$
 $\Rightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \Rightarrow 2\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$

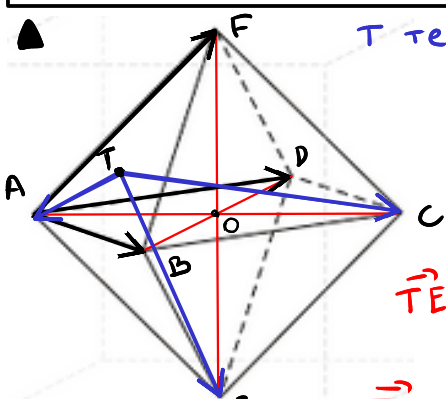
б) $D \in \text{СТРАНИЦИ } BC \Rightarrow \vec{BD} = \alpha \vec{BC}$ за неко $\alpha \in [0, 1]$
 $\Rightarrow \vec{DC} = \vec{DB} + \vec{BC} = -\alpha \vec{BC} + \vec{BC} = (1 - \alpha) \vec{BC}$

▲ б) $\vec{AD} = \alpha \vec{AC} + (1 - \alpha) \vec{AB}$
 $\|\vec{AD}\|^2 = \vec{AD} \circ \vec{AD} = (\alpha \vec{AC} + (1 - \alpha) \vec{AB}) \circ (\alpha \vec{AC} + (1 - \alpha) \vec{AB})$
 $= \alpha^2 \|\vec{AC}\|^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \vec{AC} \circ \vec{AB} + (1 - \alpha)^2 \|\vec{AB}\|^2 = *$

а) $\Rightarrow 2\vec{AC} \circ \vec{AB} = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2$
 $= \alpha^2 \|\vec{AC}\|^2 + \alpha(1 - \alpha)(\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2) + (1 - \alpha)^2 \|\vec{AB}\|^2$
 $= (\alpha^2 + \alpha - \alpha^2) \|\vec{AC}\|^2 + (\alpha - \alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2) \|\vec{AB}\|^2 - \alpha(1 - \alpha) \|\vec{BC}\|^2$
 $= \alpha \|\vec{AC}\|^2 + (1 - \alpha) \|\vec{AB}\|^2 - \alpha(1 - \alpha) \vec{BC} \circ \vec{BC}$

$\vec{BD} = \alpha \vec{BC} \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}}, \vec{DC} = (1 - \alpha) \vec{BC} \Rightarrow 1 - \alpha = \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} = -\frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \circ \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} = -\frac{\vec{BD} \circ \vec{DC}}{\|\vec{BC}\|^2}$
 $\Rightarrow \|\vec{AD}\|^2 = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \|\vec{AC}\|^2 + \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} \|\vec{AB}\|^2 + \vec{BD} \circ \vec{CD}$

2. [15п] Дат је квадрат $ABCD$ и тачке E и F тако да је $ABCDEF$ правилан октаедар. Афини репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$ и $\vec{e}_3 = \vec{AF}$, док афини репер $Tx'y'z'$ са почетком у тачки T , која је тежиште троугла ABF , има базне векторе $\vec{f}_1 = \vec{TA}$, $\vec{f}_2 = \vec{TE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{TC}$. Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Axyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Tx'y'z'$. Одредити координате темена октаедра у оба афина репера.



T тежиште $\Delta ABF \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3}(\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AF}) = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AF})$

$\Rightarrow [T]_{Ae} = [\vec{AT}]_e = [\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_3]_e = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$

$[\vec{f}_1]_e = [\vec{TA}]_e = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3})$

$[\vec{f}_2]_e = [\vec{TE}]_e = (\frac{2}{3}, 1, -\frac{4}{3})$

$\vec{TE} = \vec{TA} + \vec{AE} = \vec{TA} + \vec{AC} + \vec{CE} = -\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AF}) + (\vec{AB} + \vec{AD}) - \vec{AF}$

$[\vec{f}_3]_e = [\vec{TC}]_e = (\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3})$

$\vec{TC} = \vec{TA} + \vec{AC} = -\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AF}) + \vec{AB} + \vec{AD}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/3 & -4/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} *$

$x = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' + \frac{1}{3} \Rightarrow x' = -3x + 2y' + 2z' + 1 = -3x + 2x - 2y - 2z - 2x + 4y + 2z + 1$
 $y = y' + z' \cdot (-1) \Rightarrow y' = x - y - z$
 $x - z = 2y' + z' \Rightarrow z' = -x + 2y + z$

$[Ae] : A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), E(1, 1, -1), F(0, 0, 1)$

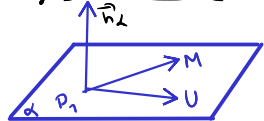
$\Rightarrow [Tf] : A(1, 0, 0), B(-2, 1, -1), C(0, 0, 1), D(3, -1, 2), E(0, 1, 0), F(1, -1, 1)$

3. [15п] Дате су тачке

$$P_1(1, 1, 1), \quad U(2, 1, -1), \quad M(-1, 0, 2), \quad P_2(1, 1, -1), \quad A(-1, -1, 1), \quad J(-2, 4, 2).$$

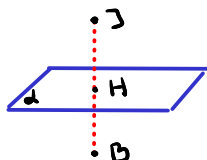
Ако је B тачка симетрична тачки J у односу на раван α одређену тачкама P_1, U и M , а C тачка симетрична тачки J у односу на праву p која садржи тачке P_2 и A , одредити дужину дужи BC .

1) РАВАН α



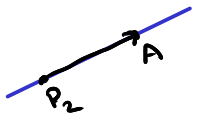
$$\begin{aligned} P_1(1, 1, 1) &\in \alpha \\ \vec{P_1U} &\subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{P_1U} = (1, 0, -2) \\ \vec{P_1M} &\subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{P_1M} = (-2, -1, 1) \\ \Rightarrow \vec{n}_\alpha &= \vec{P_1U} \times \vec{P_1M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 3, -1) \\ \alpha: -2(x-1) + 3(y-1) - 1(z-1) &= 0 \\ \alpha: -2x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

2) ТАЧКА B



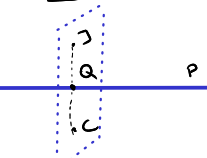
$$\begin{aligned} * \text{н т.д. } J &\in n, n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (-2, 3, -1) \\ * H &= n \cap \alpha: 4t + 4 + 9t + 12 + t - 2 = 0 \\ 14t + 14 &= 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(0, 1, 3) \\ * J: t &= 0, H: t = -1 \Rightarrow B: t = -2 \Rightarrow \boxed{B(2, -2, 4)} \end{aligned}$$

3) ПРАВА p



$$\begin{aligned} P_2(1, 1, -1) &\in p \\ \vec{P} = \vec{P_2A} &= (-2, -2, 2) \parallel (-1, -1, 1) \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4) ТАЧКА C

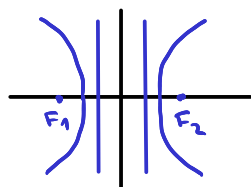
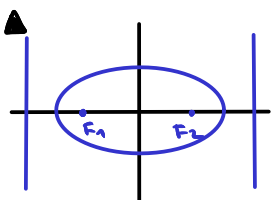


$$\begin{aligned} * B \text{ т.д. } J &\in p, p \perp p \Rightarrow \vec{n}_p = \vec{P} \Rightarrow p: -(x+2) - (y-4) + (z-2) = 0 \\ p: -x - y + z &= 0 \\ * Q &= p \cap \alpha \\ \lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda - 1 &= 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow Q(0, 0, 0) \\ * J(-2, 4, 2), Q(0, 0, 0) &\Rightarrow \boxed{C(2, -4, -2)} \end{aligned}$$

5) ДУЖИНА BC

$$|BC| = |\vec{BC}| = \|(0, -2, -6)\| = \sqrt{0 + 4 + 36} = \sqrt{40} = \boxed{2\sqrt{10}}$$

4. [14п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d: y = x - 1$, а жиже су јој тачке $F_1(-1, 3)$ и $F_2(1, 1)$.



$$\begin{aligned} d: x - y - 1 &= 0 \Rightarrow F_d(x, y) = x - y - 1 \\ F_d(F_1) &= -1 - 3 - 1 = -5 < 0 \\ F_d(F_2) &= 1 - 1 - 1 = -1 < 0 \\ \Rightarrow F_2 \text{ и } d &\text{ у ПАРУ} \\ F_1 \text{ и } F_2 &\text{ са исте стране } d \\ \Rightarrow \text{ЕЛИПСА} \end{aligned}$$

$$* \text{центар } \mathcal{E} \text{ је } O = S(F_1F_2) \Rightarrow \boxed{O(0, 2)}$$

$$* \text{ексцентриситет } c = d(F_2, O) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

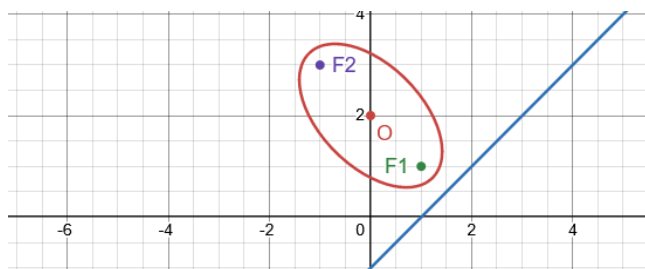
$$* \text{директриса } \frac{a^2}{c} = d(O, d) = \frac{|0 - 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{\sqrt{2}} c = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$* \text{ексцентриситет } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1 \text{ (и ово даје елипсу)}$$

$$* M(x, y) \in \mathcal{E} \text{ произв } \Rightarrow \mathcal{E}: \frac{d(M, F_2)}{d(M, d)} = e$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}: \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}{\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad /^2 \Rightarrow \frac{2((x-1)^2 + (y-1)^2)}{(x-y-1)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}: 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 = (x-y-1)^2}$$



5. Дата је права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

а) [7п] Одредити једначину површи $\mathcal{P}$ настале ротацијом праве p око Oz -осе. Која површ је у питању?

б) [7п] Круг добијен у пресеку $\mathcal{P}$ са Oxy -равни написати као пресек две сфере полупречника $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

▲ а)

$$R_{O_z, \alpha} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

* $M(1, t, 2t-1) \in \mathcal{P}$ произвољна $\Rightarrow M' = R_{O_z, \alpha}(M) \in \mathcal{P}$

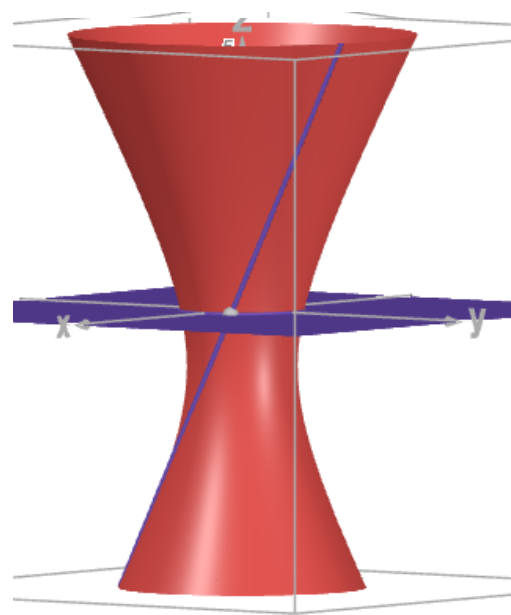
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 2t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha - t \sin \alpha \\ \sin \alpha + t \cos \alpha \\ 2t-1 \end{bmatrix} \Rightarrow t = \frac{z'+1}{2}$$

$$x'^2 + y'^2 = \cos^2 \alpha - 2t \sin \alpha \cos \alpha + t^2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2t \sin \alpha \cos \alpha + t^2 \cos^2 \alpha$$

$$= 1 + t^2 = 1 + \left(\frac{z'+1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}: x^2 + y^2 - \frac{(z+1)^2}{4} = 1}$$

једнограни хиперболоид



б) $\mathcal{K} = \mathcal{P} \cap O_{xy}$

$$x^2 + y^2 - \frac{(z+1)^2}{4} = 1$$

$$z = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{K}: x^2 + y^2 = \frac{5}{4}, z = 0}$$

$\mathcal{K} = S_1 \cap S_2$: можемо приметити и по ч да круг $\mathcal{K}$

настане ротацијом $\mathcal{P} \cap O_{xy} = A(1, \frac{1}{2}, 0)$ око O_z -осе

$\Rightarrow$ центри сфера су на O_z -оси

$$\Rightarrow C(0, 0, t)$$

$$\text{Како } A \in \mathcal{K} \subset S_{1/2} \Rightarrow d(C, A) = R$$

$$\Rightarrow \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2} = \frac{\sqrt{21}}{2} \quad |^2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} + t^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$$

$$\Rightarrow C_1(0, 0, 2), C_2(0, 0, -2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} S_1: x^2 + y^2 + (z-2)^2 &= \frac{21}{4} \\ S_2: x^2 + y^2 + (z+2)^2 &= \frac{21}{4} \end{aligned}}$$

