

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

СЕПТЕМБАР 1 - 14.10.2025. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. а) [2п] Доказати да за произвољне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$.
 б) [10п] Нека је D тачка на страници BC троугла ABC . Доказати да је тада

$$\|\vec{AD}\|^2 = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \|\vec{AC}\|^2 + \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} \|\vec{AB}\|^2 + \vec{BD} \circ \vec{CD}.$$

2. [15п] Дат је квадрат $ABCD$ и тачке E и F тако да је $ABCDEF$ правилан октаедар. Афини репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$ и $\vec{e}_3 = \vec{AF}$, док афини репер $Tx'y'z'$ са почетком у тачки T , која је тежиште троугла ABF , има базне векторе $\vec{f}_1 = \vec{TA}$, $\vec{f}_2 = \vec{TE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{TC}$. Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Axyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Tx'y'z'$. Одредити координате темена октаедра у оба афина репера.

3. [15п] Дате су тачке

$$P_1(1, 1, 1), \quad U(2, 1, -1), \quad M(-1, 0, 2), \quad P_2(1, 1, -1), \quad A(-1, -1, 1), \quad J(-2, 4, 2).$$

Ако је B тачка симетрична тачки J у односу на раван α одређену тачкама P_1 , U и M , а C тачка симетрична тачки J у односу на праву p која садржи тачке P_2 и A , одредити дужину дужи BC .

4. [14п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d : y = x - 1$, а жиже су јој тачке $F_1(-1, 3)$ и $F_2(1, 1)$.

5. Дата је права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

а) [7п] Одредити једначину површи $\mathcal{P}$ настале ротацијом праве p око Oz -осе. Која површ је у питању?

б) [7п] Круг добијен у пресеку $\mathcal{P}$ са Oxy -равни написати као пресек две сфере полупречника $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

СЕПТЕМБАР 1 - 14.10.2025. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. а) [2п] Доказати да за произвољне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$.
 б) [10п] Нека је D тачка на страници BC троугла ABC . Доказати да је тада

$$\|\vec{AD}\|^2 = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \|\vec{AC}\|^2 + \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} \|\vec{AB}\|^2 + \vec{BD} \circ \vec{CD}.$$

2. [15п] Дат је квадрат $ABCD$ и тачке E и F тако да је $ABCDEF$ правилан октаедар. Афини репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$ и $\vec{e}_3 = \vec{AF}$, док афини репер $Tx'y'z'$ са почетком у тачки T , која је тежиште троугла ABF , има базне векторе $\vec{f}_1 = \vec{TA}$, $\vec{f}_2 = \vec{TE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{TC}$. Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Axyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Tx'y'z'$. Одредити координате темена октаедра у оба афина репера.

3. [15п] Дате су тачке

$$P_1(1, 1, 1), \quad U(2, 1, -1), \quad M(-1, 0, 2), \quad P_2(1, 1, -1), \quad A(-1, -1, 1), \quad J(-2, 4, 2).$$

Ако је B тачка симетрична тачки J у односу на раван α одређену тачкама P_1 , U и M , а C тачка симетрична тачки J у односу на праву p која садржи тачке P_2 и A , одредити дужину дужи BC .

4. [14п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d : y = x - 1$, а жиже су јој тачке $F_1(-1, 3)$ и $F_2(1, 1)$.

5. Дата је права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

а) [7п] Одредити једначину површи $\mathcal{P}$ настале ротацијом праве p око Oz -осе. Која површ је у питању?

б) [7п] Круг добијен у пресеку $\mathcal{P}$ са Oxy -равни написати као пресек две сфере полупречника $\frac{\sqrt{21}}{2}$.