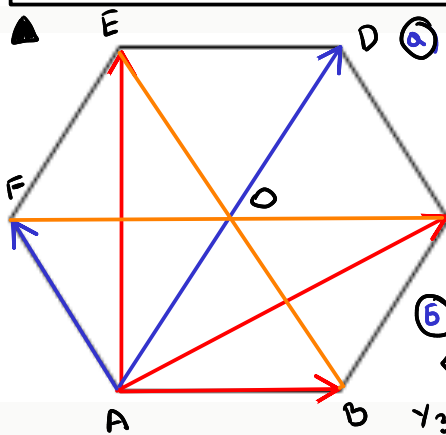




1. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао у равни.

- а) [4п] Наћи $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такве да је $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} = \alpha \vec{AD} + \beta \vec{AF}$. Да ли је уређен пар (α, β) јединствен?
 б) [5п] Доказати да тежиште T скупа тачака B, C, D, E, F припада дужи AD . Да ли су тачке C, T и F колинеарне?
 в) [7п] Ако је дужина стране шестоугла $ABCDEF$ једнака 1, одредити дужину дијагонале HJ и површину паралелограма $AHIJ$ ако је $\vec{AH} = 2(\vec{AB} + \vec{AC})$ и $\vec{AJ} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$.



а) $\vec{AB} = \vec{FO} = \vec{FA} + \vec{AO} = -\vec{AF} + \frac{1}{2} \vec{AD}$
 $\vec{AC} = \vec{FO} = \vec{FA} + \vec{AO} = -\vec{AF} + \frac{1}{2} \vec{AD}$
 $\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{AO} = \vec{AF} + \frac{1}{2} \vec{AD}$

$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} = 2\vec{AD} - \vec{AF} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2 \quad \beta = -1}$

$\vec{AD}$ и $\vec{AF}$ лнн. нез. $\Rightarrow$ чине базу $\Rightarrow (\alpha, \beta)$ јединств.

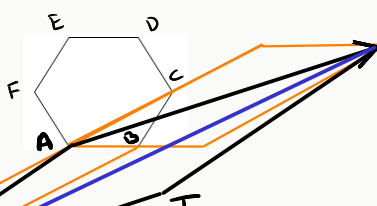
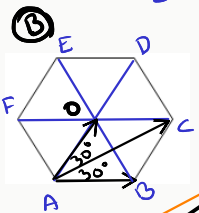
б) T тежиште $BCDEF$

$\Rightarrow (\forall O') \vec{O'T} = \frac{1}{5} (\vec{O'B} + \vec{O'C} + \vec{O'D} + \vec{O'E} + \vec{O'F})$

узмимо $O' \equiv A$ (бог о краћу рачун)
 $\vec{AT} = \frac{1}{5} (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF})$

$\Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{5} (2\vec{AD} - \vec{AF} + \vec{AD} + \vec{AF}) = \frac{3}{5} \vec{AD} \Rightarrow \vec{AT}$ и $\vec{AD}$ колнн. $\Rightarrow \boxed{T \in AD}$

$\vec{AT} = \frac{3}{5} \vec{AD} = \frac{3}{5} (\vec{AF} + \vec{AC}) = \frac{3}{5} \vec{AF} + \frac{3}{5} \vec{AC}$, $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \neq 1 \Rightarrow T \notin FC$



в) $\|\vec{AB}\| = 1$. Тражимо $\|\vec{AC}\|$: (јер су сви вектори задати преко њих)

$\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB} + \vec{AO}\|^2 = (\vec{AB} + \vec{AO}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AO})$

$= \|\vec{AB}\|^2 + 2 \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AO} + \|\vec{AO}\|^2$

$= \|\vec{AB}\|^2 + 2 \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AO}\| \cdot \cos 60^\circ + \|\vec{AO}\|^2$

$= 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{\|\vec{AC}\| = \sqrt{3}}$

$\|\vec{HJ}\|^2 = \|\vec{HA} + \vec{AJ}\|^2 = \|\vec{HA} + \vec{AJ}\|^2 = \|\vec{HA} + \vec{AJ}\|^2$

$= (\vec{AB} + 5\vec{AC}) \cdot (\vec{AB} + 5\vec{AC}) = \|\vec{AB}\|^2 + 10 \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cos 30^\circ + 25 \|\vec{AC}\|^2$

$= 1 + 10 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 25 \cdot 3 = 91 \Rightarrow \boxed{\|\vec{HJ}\| = \sqrt{91}}$

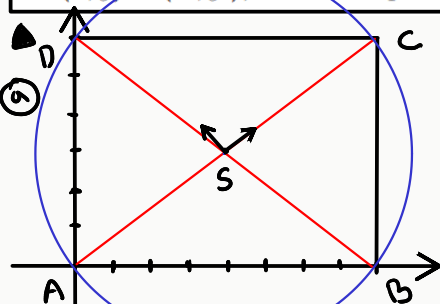
$P = \|\vec{AH} \times \vec{AJ}\| = \|(2\vec{AB} + 2\vec{AC}) \times (\vec{AB} - 3\vec{AC})\| = \|-6\vec{AB} \times \vec{AC} + 2\vec{AC} \times \vec{AB}\|$

$= \|-8\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 8 \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{P = 4\sqrt{3}}$

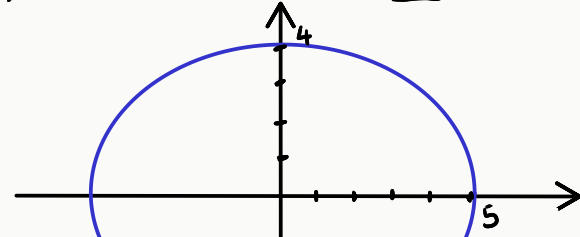
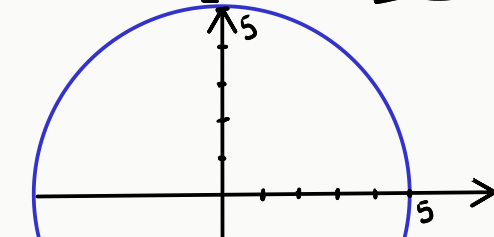
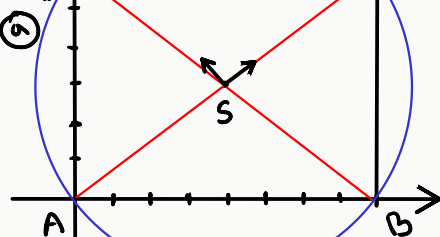
2. Нека је $ABCD$ правоугаоник у ортонормираном реперу Axy такав да је $B(8,0)$ и $C(8,6)$.

а) [6п] Одредити бар једно афине пресликавање равни које описани круг око правоугаоника $ABCD$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

б) [7п] Ако је тачка S центар описаног круга око правоугаоника $ABCD$ и $Sx'y'$ ортонормирани репер који има позитиван део x' -осе у смеру вектора $\vec{SC}$ и исте је оријентације као репер Axy , одредити везу координата (x, y) и (x', y') , као и координате тачке E симетричне тачки A у односу на тачку C у оба репера.



$[S] = \frac{[A] + [C]}{2} \Rightarrow [S(4,3)]$, $r = \|\vec{AS}\| = \|(4,3)\| = 5$

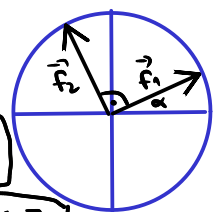


$\Rightarrow K: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

$\xrightarrow{TS_A} K': x'^2 + y'^2 = 25$

$\xrightarrow{H_{1, \frac{4}{5}}} \mathcal{E}: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$T_{SA}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}, H_{1, \frac{4}{5}}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
 $F = H_{1, \frac{4}{5}} \circ T_{SA} \Rightarrow [F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4/5 & -12/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x - 4 \\ y'' = \frac{4}{5}y - \frac{12}{5} \end{cases}$
 ⑥ у релери $A_{xy}: \vec{e}_1 = \vec{AB}/8, \vec{e}_2 = \vec{AD}/6$
 $[S]_{Ac} = [A\vec{S}]_e = [\frac{1}{2}\vec{AC}]_e = [\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}]_e = [4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2]_e \Rightarrow [S]_{Ac} = (4, 3)$
 $\vec{f}_1 = \frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{8\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2}{10} = \frac{4}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 \Rightarrow [\vec{f}_1]_e = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$
 $\Rightarrow [\vec{f}_2]_e = (\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})) = (-\sin\alpha, \cos\alpha) \Rightarrow [\vec{f}_2]_e = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$
 $\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C^{-1} = C^T$
 $[E]_{Ac} = [A\vec{E}]_e = [2\vec{AC}]_e = [2\vec{AB} + 2\vec{AD}]_e = [16\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2]_e \Rightarrow [E]_{Ac} = (16, 12)$
 $[E]_{sf}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [E]_{sf} = (15, 0)$



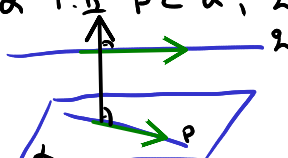
3. [14п] Изометријском трансформацијом свести криву $K: x^2 - 3x + 4xy + y^2 + 21y - 15 = 0$ на канонски облик и одредити њене жиже. Која крива је у питању?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3/2 \\ 2 & 1 & 21/2 \\ -3/2 & 21/2 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$
 $\lambda_1 = -1 \Rightarrow (B+E)u = 0 \quad \lambda_2 = 3 \Rightarrow (B-3E)u = 0$
 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
 $2a+2b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow -2a+2b=0 \Rightarrow b=a$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases} \Rightarrow \mathcal{K}: \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + 4 \cdot \frac{1}{2}(y'^2 - x'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - \frac{3}{\sqrt{2}}(x' + y') + \frac{21}{\sqrt{2}}(-x' + y') - 15 = 0$
 $\Rightarrow \mathcal{K}: -x'^2 + 3y'^2 - 12\sqrt{2}x' + 9\sqrt{2}y' - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x'' = x' + 6\sqrt{2} \\ y'' = y' + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
 $\mathcal{K}: -\frac{x''^2}{87} + \frac{3y''^2}{25} = 1 \Rightarrow \text{хипербола}$
 $\Rightarrow a^2 = \frac{87}{2}, b^2 = \frac{29}{2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{58} \Rightarrow F_1''(\sqrt{58}, 0), F_2''(-\sqrt{58}, 0)$
 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - 6\sqrt{2} + y'' - \frac{3\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - \frac{15}{2} \Rightarrow \begin{cases} F_1(\sqrt{29} - 15/2, -\sqrt{29} + 9/2) \\ F_2(-\sqrt{29} - 15/2, \sqrt{29} + 9/2) \end{cases}$
 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'' + 6\sqrt{2} + y'' - \frac{3\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{9}{2}$

4. а) [6п] Одредити међусобни положај правих $p: y=0, z=0$ и $q: x=0, z=2025$. Одредити једначину равни α која садржи праву p и паралелна је правој q , као и растојање тачке $T(3, 4, 5)$ од те равни.

б) [7п] Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од правих p и q . Која површ је у питању?

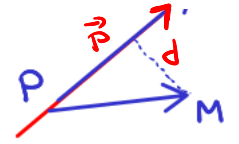
⑥ $P: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, Q: \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=2025 \end{cases}, s \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{p} = (1, 0, 0), \vec{q} = (0, 1, 0)$
 $\vec{p} \neq \lambda \vec{q} \Rightarrow p \not\parallel q, p \neq q, u_3 z=0 \neq 2025 \Rightarrow \text{не секу се} \Rightarrow \text{мимоулазне}$
 $\alpha \text{ т.д. } p \subset \alpha, q \parallel \alpha: 1) p \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{p} = (1, 0, 0) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$
 $2) p \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{q} = (0, 1, 0) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{q} = (0, 0, 1)$
 $3) q \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{q} = (0, 1, 0) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (0, 0, 1)$
 $\Rightarrow \alpha: 0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow \alpha: z=0$
 $d(T, \alpha) = \frac{|5|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = 5 \Rightarrow d(T, \alpha) = 5$



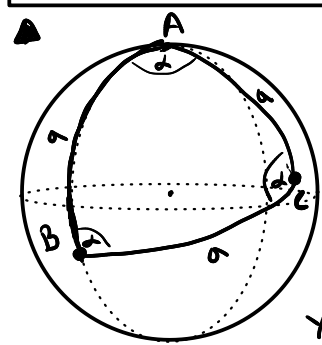
Б) $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$ произв $\Rightarrow d(M, P) = d(M, Q)$
 $\vec{P} = (1, 0, 0)$, $\vec{Q} = (0, 1, 0)$
 $P(0, 0, 0) \in P$, $Q(0, 0, 2025) \in Q$

$\vec{P} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, -z, y)$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{1} = \frac{\sqrt{(z-2025)^2 + x^2}}{1}$
 $\vec{Q} \times \vec{QM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z-2025 \end{vmatrix} = (z-2025, 0, -x)$ $\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{S}: z^2 + y^2 = (z-2025)^2 + x^2}$

$\mathcal{S}: z^2 + y^2 = z^2 - 2 \cdot 2025 z + 2025^2 + x^2 \Leftrightarrow \mathcal{S}: x^2 - y^2 = 4050(z - \frac{2025}{2})$
 $x' = x$
 $y' = y$
 $z' = z - \frac{2025}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}': x'^2 - y'^2 = 4050 z'}$ гиперболически ПАРАБОЛОИД (седло)



5. [14п] Користећи сферне координате навести бар један пар тачака B и C јединичне сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тако да сферни троугао ABC буде једнакостраничан са унутрашњим углом $\frac{3\pi}{4}$, при чему је тачка A северни пол. Одредити обим и површину тог троугла.



$A: \varphi_A = \pi/2$, θ_A - недефинисано
 $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = a$, $a = b = c = \frac{3\pi}{4}$
Како је $\Delta BAC = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow |\theta_B - \theta_C| = \frac{3\pi}{4}$
Можемо узети $\theta_B = 0 \Rightarrow \theta_C = \pm \frac{3\pi}{4}$

$\cos a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Узмимо нпр $B: \theta_B = 0$, $\varphi_B = \frac{\pi}{2} - a$
 $C: \theta_C = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi_C = \frac{\pi}{2} - a$

ОСТАЈЕ ДА ИЗРАЧУНАМО a

СТАЛНА КОСИНУСНА ТЕОРЕМА: $-\cos a = \cos a \cos a - \sin a \sin a \cos a$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos a \Rightarrow \cos a = 1 - \sqrt{2}$

$\Rightarrow a = \arccos(1 - \sqrt{2})$

$\Rightarrow B: \theta_B = 0$, $\varphi_B = \frac{\pi}{2} - \arccos(1 - \sqrt{2})$
 $C: \theta_C = 0$, $\varphi_C = \frac{\pi}{2} - \arccos(1 - \sqrt{2})$

$\Rightarrow 0 = 3a = 3 \arccos(1 - \sqrt{2})$
 $P = 3a - \pi = \frac{9\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4}$