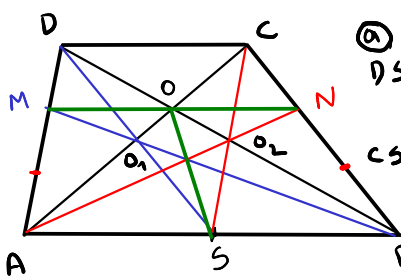




1. Нека је дат траpez  $ABCD$  и нека тачка  $O$  представља пресек његових дијагонала и нека их дели у односу  $2:1$  тако да важи  $\vec{AO} = 2\vec{OC}$ . Нека је  $S$  средиште основице  $AB$ .

- а) [4п] Ако је  $M$  тачка на краку  $AD$  тако да су праве  $DS, AO$  и  $BM$  конкурентне и  $N$  тачка на краку  $BC$  тако да су праве  $CS, BO$  и  $AN$  конкурентне, у ком односу тачке  $M$  и  $N$  деле краке на којима се налазе?
- б) [12п] Доказати да су тачке  $M, O$  и  $N$  колинеарне, као и да су праве  $AN, BM$  и  $OS$  конкурентне.



а)  $\triangle ABD$   
 $DS, AO, BM$  конк.

Чеба  $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BO}}{\vec{OD}} \cdot \frac{\vec{DM}}{\vec{MA}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{DM}}{\vec{MA}} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

$\triangle ABC$   
 $CS, BO, AN$  конк.

Чеба  $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{BS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AO}}{\vec{OC}} \cdot \frac{\vec{CN}}{\vec{NB}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{CN}}{\vec{NB}} = \frac{1}{2} \quad \#$$

б) Означимо  $O_1 = DS \cap AO$  и  $O_2 = CS \cap BO$ .

$\triangle AO_2D$

$M \in AD, O \in DO_2, N \in O_2A$  колинеарне

Менелaj  $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AM}}{\vec{MD}} \cdot \frac{\vec{DO}}{\vec{OO_2}} \cdot \frac{\vec{O_2N}}{\vec{NA}} = -1 \quad ? \quad (\text{проверavamo})$$

$\triangle ABN$   
 $S, C, O_2$  колн

Менелaj  $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CN}} \cdot \frac{\vec{NO_2}}{\vec{O_2A}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{NO_2}}{\vec{O_2A}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\vec{O_2N}}{\vec{NA}} = -\frac{1}{4}$$

$\triangle BO_2S$   
 $AO, BN, O_2S$  конк.

Чеба  $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BO}}{\vec{OO_2}} \cdot \frac{\vec{O_2N}}{\vec{NA}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{BO}}{\vec{OO_2}} = -4 \Rightarrow \frac{\vec{DO}}{\vec{OO_2}} = \frac{-\frac{1}{2}\vec{BO}}{\vec{OO_2}} = 2$$

Дакле,  $\frac{\vec{AM}}{\vec{MD}} \cdot \frac{\vec{DO}}{\vec{OO_2}} \cdot \frac{\vec{O_2N}}{\vec{NA}} = 2 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{4}) = -1 \Rightarrow M, O, N$  колинеарне

$\triangle BSO$   
 $AO_2, BO_1, OS$  конк.

Чеба  $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{BO_2}}{\vec{O_2O}} \cdot \frac{\vec{OO_1}}{\vec{O_1A}} \cdot \frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} = 1 \quad ? \quad \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \quad \checkmark$$

$\triangle ABM$   
 $S, D, O_1$  колн

Менелaj  $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BO_1}}{\vec{O_1M}} \cdot \frac{\vec{MD}}{\vec{DA}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{BO_1}}{\vec{O_1M}} = 3$$

$\Rightarrow AN, BM, SO$  конкурентне

$\triangle BO_1S$   
 $BO, AM, O_1S$  конк.

Чеба  $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BM}}{\vec{MO_1}} \cdot \frac{\vec{O_1O}}{\vec{OA}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{O_1O}}{\vec{OA}} = -4 \Rightarrow \frac{\vec{OO_1}}{\vec{O_1A}} = \frac{1}{3}$$

II начин  $\vec{ON} = \vec{OB} + \vec{BN} = \frac{2}{3}(\vec{OB} + \vec{BC}) = \frac{2}{3}\vec{OC}$ ,  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{OD} \Rightarrow ON \parallel OC \parallel OM \Rightarrow M, N, O$  колн.

2. [12п] Дата је тачка  $S(-2, 2)$ . Одредити формуле ротације  $R_{S, \frac{\pi}{3}}$  и хомотетије  $H_{S, 2}$ . Показати да ова два пресликавања комутирају. Шта је слика круга  $k: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$  при композицији  $R_{S, \frac{\pi}{3}} \circ H_{S, 2}$ ?

$$1) [R_{S, \frac{\pi}{3}}] = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$S \mapsto S \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -1 + \sqrt{3} \\ b &= 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_{S, \frac{\pi}{3}}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$$

$$1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$2) H_{S, 2}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{SM'} = 2\vec{SM} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'+2 \\ y'+2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x+2 \\ y+2 \end{bmatrix}$$

$$H_{S, 2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$3) [R_{S, \frac{\pi}{3}} \circ H_{S, 2}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H_{S, 2} \circ R_{S, \frac{\pi}{3}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

F слика центар  $K$  у центар  $K'$   
 $R_{5, \pi/3}$  изометрија  $\Rightarrow$  тачка  $K$   
 $H_{5,2}$  симетрија  $K \Rightarrow K' = 2K = 4$

$$K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow C(4, -2), r = 2$$

$$C': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow C'(4+4\sqrt{3}, 6\sqrt{3}-2)$$

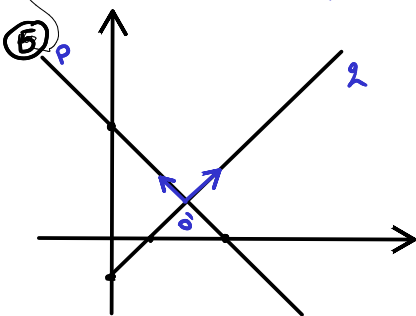
$$\Rightarrow K': (x-4-4\sqrt{3})^2 + (y-6\sqrt{3}+2)^2 = 16$$

3. Дате су тачке  $A(-1, 1)$  и  $B(0, -2)$ , као и праве  $p: x+y-3=0$  и  $q: x-y-1=0$ .

а) [4п] Одредити тачку  $A'$  која је симетрична тачки  $A$  у односу на праву  $p$ .

б) [9п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке  $A$  и  $B$  и којој су праве  $p$  и  $q$  осе симетрије. Која крива је у питању?

а)  $P: x+y-3=0 \Rightarrow \vec{n}_p = (1, 1) = \vec{n}$   
 $p \perp n$  т.д.  $A \in n, n \perp p \Rightarrow n: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow n: y = x+2$   
 $2) S = n \cap p: \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=5/2 \end{cases} \Rightarrow S(1/2, 5/2)$   
 $3) [A'] = 2[S] - [A] \Rightarrow [A'](2, 4)$



Бирамо нови координатни систем  $O'x'y'$  т.д.  $O'x' = 2, O'y' = p$

$$2: x-y-1=0 \Rightarrow \vec{q} = (1, 1) \Rightarrow \vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$p: x+y-3=0 \Rightarrow \vec{p} = (-1, 1) \Rightarrow \vec{f}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$O' = p \cap q \Rightarrow O'(2, 1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$x = Cx' + B \Rightarrow x' = C^{-1}x - C^{-1}B, C^{-1} = C^T \text{ (о.н.б.)}$$

$$A(-1, 1) \mapsto A_1(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$$

$$B(0, -2) \mapsto B_1(-5/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

$$A_1 \in \mathcal{K}' \Rightarrow \frac{9}{2a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad B_1 \in \mathcal{K}' \Rightarrow \frac{25}{2a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{27} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{2}{27} \Rightarrow b^2 = \frac{27}{4}$$

$$\mathcal{K}': \frac{2x'^2}{27} + \frac{4y'^2}{27} = 1 \Rightarrow \mathcal{E}: \frac{2(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}})^2}{27} + \frac{4(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{27} = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}: (x+y-3)^2 + 2(x-y-1)^2 = 27$$

4. [16п] Површ  $P: 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 16x - 12z - 12 = 0$  изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & -8 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ -8 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \dots = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-8)$$

$$U_8 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, U_{-2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ z = z' \end{cases}$$

$$P': 8x'^2 - 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' - 12z' - 12 = 0 \quad /:2$$

$$P': 4(x'^2 - \sqrt{2}x' + \frac{1}{2}) - 2 - (y'^2 + 4\sqrt{2}y' + 8) + 8 - 6z' - 6 = 0$$

$$P': 4(x' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (y' + 2\sqrt{2})^2 - 6z' = 0$$

$$P'': 4x''^2 - y''^2 = 6z''$$

хиперболички  
параболоид

$$\text{формуле: } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} + y'' - \frac{4}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} - y'' + \frac{4}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{5}{2} \end{cases}$$

5. На јединичној сфери дате су тачке  $A(0, 0, 1)$  и  $B(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

а) [5п] Одредити тачку  $C$  тако да сферни троугао  $ABC$  буде једнакокрак, где је  $\widehat{AB} = \widehat{AC}$  и  $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ .

б) [8п] Одредити све стране и углове сферног троугла  $ABC$ , као и његову површину.

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \cos \varphi \\ y &= \sin \theta \cos \varphi \\ z &= \sin \varphi \end{aligned}$$

$$|A: \varphi_A = \pi/2 \quad \theta_A \text{ не дефинисано}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \varphi_B \Rightarrow \varphi_B = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \theta_B = 0 \Rightarrow \theta_B = \pi/2$$

$$\Rightarrow |B: \varphi_B = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_B = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow |\varphi_C = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \Delta BAC = |\theta_B - \theta_C| = |\frac{\pi}{2} - \theta_C| \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta_C = \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta_C = \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta_C = -\frac{\pi}{6} \vee \theta_C = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{ИМА ДВА РЕШЕЊА, УЗМИМО НАПР} \quad |C: \varphi_C = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_C = -\frac{\pi}{6}$$

б) Из дела а) знамо  $b = \widehat{AC} = \frac{\pi}{6}$ ,  $c = \widehat{AB} = \frac{\pi}{6}$ ,  $\alpha = \Delta BAC = \frac{2\pi}{3}$

КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

$\Rightarrow$

$$\cos \alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{5}{8} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$b = c \Rightarrow \beta = \gamma$$

$$\cos b = \cos \alpha \cos c + \sin \alpha \sin c \cos \beta$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{5}{8} \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \beta$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{39}}{16} \cos \beta$$

$$\frac{\sqrt{39}}{16} \cos \beta = \frac{3\sqrt{3}}{16} \Rightarrow \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} = \gamma$$

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{2\pi}{3} + 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} - \pi$$

$$P = 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{\pi}{3}$$

Може и

ДАЈА  
КОСИНУСНА  
ТЕОРЕМА

$\Rightarrow$

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$

$$-\cos \frac{2\pi}{3} = \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \beta) \cdot \cos (\arccos \frac{5}{8})$$

$$\frac{1}{2} = \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \beta) \cdot \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{13}{8} \cos^2 \beta - \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{13}{8} \cos^2 \beta = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{9}{13} \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \stackrel{\beta < \alpha}{\Rightarrow} \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} = \gamma$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{39}}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{1}{2 \sin \beta}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} = \gamma$$

ОШТАР УГАО