



1. Дат је паралелограм $ABCD$ и нека су E, F и G тачке такве да важи $\vec{AF} = \vec{FD}$, $\vec{DE} = 3\vec{EC}$ и $\vec{BG} = 2\vec{BD}$. Означимо са X пресек прaviх GE и BC , а са Y пресек прaviх GF и AB .
- а) [8п] Одредити у ком односу тачке X и Y деле странице BC и AB паралелограма $ABCD$.
- б) [8п] Доказати да се праве AC, EF и XY секу у једној тачки.

а) Како је $GE \cap BC = \{X\} \Rightarrow G, E, X$ су колинеарне
Како је $GF \cap AB = \{Y\} \Rightarrow G, F, Y$ су колинеарне

ΔBDC МЕНЕЛАЈ $\Rightarrow \frac{\vec{BG}}{\vec{GD}} \cdot \frac{\vec{DE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CX}}{\vec{XB}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{CX}}{\vec{XB}} = \frac{1}{6}$

ΔBDA МЕНЕЛАЈ $\Rightarrow \frac{\vec{BG}}{\vec{GD}} \cdot \frac{\vec{DF}}{\vec{FA}} \cdot \frac{\vec{AY}}{\vec{YB}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{AY}}{\vec{YB}} = \frac{1}{2}$

б) Нека је $AC \cap FE = \{O\} \Rightarrow O, E, F$ кол. Докажујемо $O \in XY$:

$O \in XY \Leftrightarrow Y, X, O$ кол. МЕНЕЛАЈ $\Delta ACB \Rightarrow \frac{\vec{AO}}{\vec{OC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{ED}} \cdot \frac{\vec{DF}}{\vec{FA}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{AO}}{\vec{OC}} = -3$

МЕНЕЛАЈ $\Delta ACB \Rightarrow \frac{\vec{AY}}{\vec{YB}} \cdot \frac{\vec{BX}}{\vec{XC}} \cdot \frac{\vec{CO}}{\vec{OA}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{-1}{3} = -1 \checkmark$

2. Дате су праве $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z-1}{-2}, \lambda \in \mathbb{R}$ и $q: \frac{x+4}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+2}{3}$.

- а) [4п] Одредити вредност параметра λ тако да се праве p и q секу, као и координате пресечне тачке.
- б) [10п] За $\lambda = 3$ одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних прaviх p и q .

а) $p: \begin{cases} x=1 \\ y=t+\lambda \\ z=-2t+1 \end{cases} \quad q: \begin{cases} x=-\lambda-4 \\ y=-2 \\ z=3\lambda-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda = -11$

$p \cap q = A(1, -2, -17)$

б) $P(1, t+3, -2t+1) \in p$ произв., $Q(-\lambda-4, -2, 3\lambda-2) \in q$ произв., $\vec{p} = (0, 1, -2), \vec{q} = (-1, 0, 3)$

$\Rightarrow \vec{QP} = (\lambda+5, t+5, 3-2t-3\lambda)$

1) $\vec{QP} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow t+5-6+4t+6\lambda=0 \Rightarrow 5t+6\lambda=1 \quad / \cdot 6$

2) $\vec{QP} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow -\lambda-5+9-6t-9\lambda=0 \Rightarrow -6t-10\lambda=-4 \quad / \cdot 5$

$-14\lambda = -14 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow t = -1$

$\Rightarrow P(1, 2, 3) \quad Q(-5, -2, 1) \Rightarrow \vec{QP} = (6, 4, 2) \parallel (3, 2, 1)$

$\Rightarrow n = PQ: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$

$d(P, q) = \|\vec{QP}\| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

3. а) [6п] Одредити једначину параболе P чије је теме $T(2, 2)$ и жижа $F(3, 1)$. Скицирати слику.
- б) [10п] Изометријском трансформацијом координата свести параболу P на канонски облик.

а) Оса параболе је права $TF \Rightarrow \vec{o} = \vec{TF} = (1, -1)$

$\Rightarrow$ вектор нормале директрисе d је $\vec{n}_d = \vec{o} = (1, -1)$

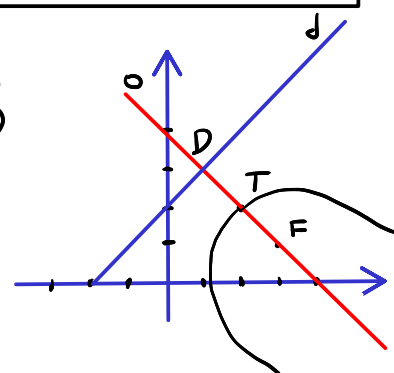
Означимо са $D = d \cap O \Rightarrow T$ средиште $FD \Rightarrow D(1, 3)$

$\Rightarrow d: x - y + 2 = 0$

$M(x, y) \in P$ произв. $\Rightarrow d(M, F) = d(M, d)$

$P: \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}} \quad / \cdot 2$

$2(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1) = x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4$



$$\Rightarrow P: x^2 + 2xy + y^2 - 16x + 16 = 0$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

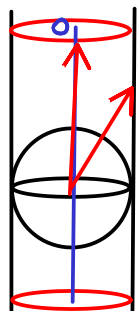
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$$

$$P': \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + 2 \cdot \frac{1}{2}(-x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - \frac{16}{\sqrt{2}}(x' + y') + 16 = 0$$

$$P': 2y'^2 - 8\sqrt{2}y' - 8\sqrt{2}x' + 16 = 0 \quad |:2 \Rightarrow y'^2 - 4\sqrt{2}y' + 8 - 8 = 4\sqrt{2}x' + 8$$

$$P': (y' - 2\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}(x' + 2\sqrt{2}) \Rightarrow P'': y''^2 = 4\sqrt{2}x''$$

4. [12п] Одредити једначину кружног цилиндра чија је оса права $o: x = -2, y + z = 1$ и који је описан око сфере $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 4 = 0$.



$$S: (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \Rightarrow C(-2, 0, 1), R=3$$

$$O: x = -2, y = t, z = -t + 1, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{O} = (0, 1, -1)$$

$$M \in \mathcal{C} \text{ произв.} \Rightarrow d(M, O) = R,$$

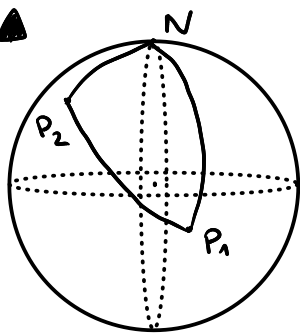
$$\Rightarrow \mathcal{C}: \frac{\|\vec{CM} \times \vec{O}\|}{\|\vec{O}\|} = 3$$

$$\vec{CM} \times \vec{O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x+2 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-y-z+1, x+2, x+2)$$

$$\mathcal{C}: \frac{\sqrt{(1-y-z)^2 + (x+2)^2 + (x+2)^2}}{\sqrt{2}} = 3$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: (1-y-z)^2 + 2(x+2)^2 = 18$$

5. [12п] На планети Марс налазе се Марсовци Пум ($30^\circ S, 29^\circ E$) и Пај ($60^\circ N, 61^\circ W$). Под претпоставком да је Марс сфера полупречника $R = 3390 \text{ km}$, одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.



Претпоставимо да је $R = 1$

Нека је P_1 станица Марсовца Пум $\Rightarrow \varphi_{P_1} = -30^\circ, \theta_{P_1} = 29^\circ$

P_2 станица Марсовца Пај $\Rightarrow \varphi_{P_2} = 60^\circ, \theta_{P_2} = -61^\circ$

N северни пол $\Rightarrow \varphi_N = 90^\circ, \theta_N$ - неважно.

Косинусна теорема за сферни троугао P_1NP_2 :

$$\cos \widehat{P_1P_2} = \cos \widehat{NP_1} \cos \widehat{NP_2} + \sin \widehat{NP_1} \sin \widehat{NP_2} \cos \angle \widehat{P_1NP_2}$$

$$\widehat{NP_1} = \varphi_N - \varphi_{P_1} = 90^\circ - (-30^\circ) = 120^\circ, \widehat{NP_2} = \varphi_N - \varphi_{P_2} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle \widehat{P_1NP_2} = |\theta_{P_1} - \theta_{P_2}| = |29^\circ - (-61^\circ)| = 90^\circ$$

$$\cos \widehat{P_1P_2} = \cos 120^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 120^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 90^\circ$$

$$\cos \widehat{P_1P_2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \widehat{P_1P_2} = \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

Како је на Марсу $R = 3390 \text{ km}$, применом хомотетије добијамо

$$\widehat{P_1P_2} = R \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Пум Пај} = 3390 \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{ km}$$