

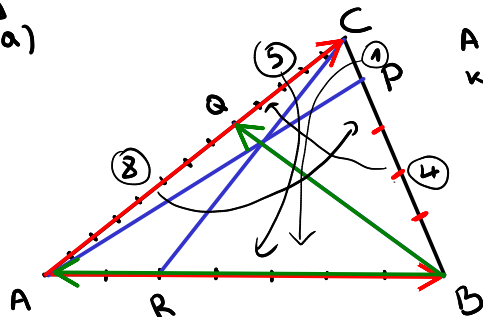


1. Нека је ABC троугао, а P, Q, R тачке на страницама BC, AC, AB , редом, такве да се дужи AP, BQ, CR секу у једној тачки и да је $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{AB} = 2 : 7$ и $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{AC} = 8 : 5$.

а) [5п] Ако је дужина странице BC једнака 15, одредити дужине дужи BP и PC .

б) [10п] Одредити координате тачке P у афиним реперу Axy са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, као и у афиним реперу $Bx'y'$ са почетком у тачки B и координатним векторима $\vec{f}_1 = \overrightarrow{BQ}$ и $\vec{f}_2 = \overrightarrow{BA}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') .

а)



AP, BQ, CR
конкурентне

$$\frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} = 1 \Rightarrow \overrightarrow{PB} = 4 \overrightarrow{CP}$$

$$BC = 15 \Rightarrow PC = 3, PB = 12$$

$$б) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \overrightarrow{AC} \Rightarrow [P]_{Ae} = (1/5, 4/5)$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{8}{13} \overrightarrow{BC} + \frac{5}{13} \overrightarrow{BA} = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{4} \overrightarrow{BP} + \frac{5}{13} \overrightarrow{BA} \quad / \cdot \frac{13}{10}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{13}{10} \overrightarrow{BQ} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \Rightarrow [P]_{Bf} = (13/10, -1/2)$$

$$[B]_{Ae} = [\overrightarrow{AB}]_e = [\vec{e}_1]_e = (1, 0) \quad (-1, 8/13)$$

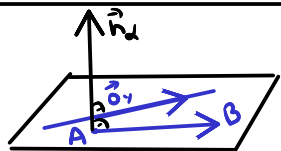
$$[\vec{f}_1]_e = [\overrightarrow{BQ}]_e = [\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ}]_e = [-\overrightarrow{AB} + \frac{8}{13} \overrightarrow{AC}]_e \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 8/13 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{f}_2]_e = [\overrightarrow{BA}]_e = [-\overrightarrow{AB}]_e = (-1, 0)$$

2. а) [6п] Одредити једначину равни α у простору која је паралелна y -оси и садржи тачке $A(2, 0, -3)$ и $B(4, 2, 7)$.

б) [10п] Одредити формуле равanske рефлексије простора у односу на раван α . Испитати да ли ово пресликавање чува оријентацију простора.

а)



$$A(2, 0, -3) \in \alpha \quad \checkmark$$

$$O_y \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{O}_y = (0, 1, 0)$$

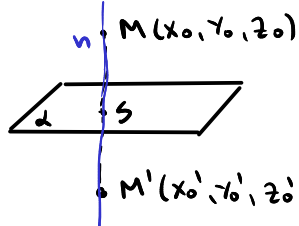
$$A, B \in \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \overrightarrow{AB} = (2, 2, 10)$$

$$\Rightarrow \alpha: 5(x-2) - 1(z+3) = 0$$

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \times \vec{O}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (10, 0, -2) \parallel (5, 0, -1)$$

$$\Rightarrow \alpha: 5x - z - 13 = 0$$

б)



$$1) \quad n \perp \alpha, M \in n \Rightarrow n: \begin{cases} x = 5t + x_0 \\ y = y_0 \\ z = -t + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad n \cap \alpha: 25t + 5x_0 + t - z_0 - 13 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5x_0 + z_0 + 13}{26}$$

$$\Rightarrow S \left(\frac{1}{26} x_0 + \frac{5}{26} z_0 + \frac{5}{2}, y_0, \frac{5}{26} x_0 + \frac{25}{26} z_0 - \frac{1}{2} \right)$$

$$3) \quad [M'] = 2[S] - [M] = \left(-\frac{12}{13} x_0 + \frac{5}{13} z_0 + 5, y_0, \frac{5}{13} x_0 + \frac{12}{13} z_0 - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12/13 & 0 & 5/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/13 & 0 & 12/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det S_\alpha = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ не чува оријентацију

3. [12п] Одредити једначине свих парабола које имају директрису $x + y - 2 = 0$ и садрже тачке $A(0, 4)$ и $B(0, 12)$.

$$d: x + y - 2 = 0$$

Нека је $F(x_0, y_0)$ жижа параболе $\mathcal{P}$

$$A(0, 4) \in \mathcal{P}, B(0, 12) \in \mathcal{P}$$

$$M \in \mathcal{P} \text{ произв} \Rightarrow d(M, F) = d(M, d)$$

$$d(A, F) = d(A, d) \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 4)^2} = \frac{|0 + 4 - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0^2 + (y_0 - 4)^2 = 2 \quad / -1$$

$$d(B, F) = d(B, d) \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 12)^2} = \frac{|0 + 12 - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0^2 + (y_0 - 12)^2 = 50 \quad / +$$

$$\Rightarrow x_0^2 - 24y_0 + 144 - x_0^2 + 8y_0 - 16 = 48 \Rightarrow 16y_0 = 80 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow x_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow [F^1(-1, 5), F^2(1, 5)], M(x, y) \in \mathcal{S} \text{ произв.} \Rightarrow \mathcal{S}: d(M, F) = d(M, d)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{S}^1: (x+1)^2 + (y-5)^2 = \frac{(x+y-2)^2}{2}, \mathcal{S}^2: (x-1)^2 + (y-5)^2 = \frac{(x+y-2)^2}{2}}$$

4. [16п] Свести једначину површи $x^2 - yz - y + 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која површ је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \dots = -(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \varphi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z' \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z' \end{cases} \Rightarrow \mathcal{S}^1: x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} z'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} y' - \frac{\sqrt{2}}{2} z' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}^1: x'^2 + \frac{1}{2} (y' - \sqrt{2} z' + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} (z' + \sqrt{2} z' + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 0$$

$$\mathcal{S}^1: x'^2 + \frac{1}{2} (y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{1}{2} (z' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2} = 0$$

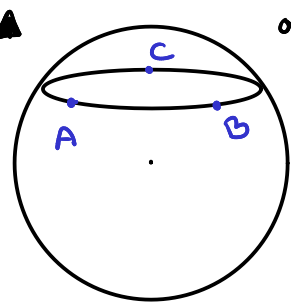
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{S}'' : x''^2 + \frac{y''^2}{2} - \frac{z''^2}{2} = -1}$$

$$\begin{cases} x = x'' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} y'' + \frac{\sqrt{2}}{2} z'' \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} y'' + \frac{\sqrt{2}}{2} z'' - 1 \end{cases}$$

ДВОГРАННИ ХИПЕРБОЛОИД

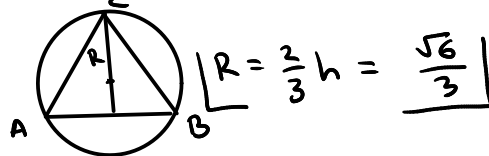
5. а) [4п] Одредити полупречник круга k на сфери $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ који садржи тачке $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ и $C(0, 0, 1)$.

б) [7п] Израчунати најкраће растојање d између тачака A и B мерено по кругу k и доказати да је оно веће од најкраћег растојања по великом кругу сфере σ између тачака A и B .



$$\begin{aligned} a) \quad \|\vec{AB}\| &= \|(0, \sqrt{2}, 0)\| = \sqrt{2} \\ \|\vec{AC}\| &= \|(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)\| = \sqrt{2} \\ \|\vec{BC}\| &= \|(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)\| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ је ЈЕДНАКОСТРАНИЧАН
 $a = \sqrt{2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$



б)

$$\widehat{AB}^R = \frac{1}{3} 2R\pi = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \pi = \frac{2\sqrt{6}}{9} \pi$$

$$\widehat{AB} = \angle AOB = \angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} \text{ јер } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{9} \pi \stackrel{?}{>} \frac{1}{2} \pi \quad /^2 \Leftrightarrow \frac{24}{81} \stackrel{?}{>} \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{96}{4 \cdot 81} > \frac{81}{4 \cdot 81} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{AB} < \widehat{AB}^R}$$