ЛААГ - ЈАН2 - 2023

1 а) $U \le V \iff$ 1) $0 \in U$ 2) $(\forall u_1,u_2 \in U)\ u_1+u_2 \in U$ 3) $(\forall k\in\mathbb{R})(\forall u \in U)\ ku \in U$

б) $\mathcal{L}(S)=\mathcal{L}(e_1,e_2,\dots,e_k)=\{\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_k e_k \mid \alpha_i\in\mathbb{R}\}$

в) $L:U\to W$ линеарно пресл $\iff L(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha L(u_1)+\beta L(u_2)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\forall u_1,u_2\in U$

г) A је симетрична матрица $\iff A^T=A$.

д) $\langle\,,\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ је скаларни производ ако важи:

линеарност по 1. аргументу: 1) $\langle \alpha e_1+\beta e_2, e_3\rangle = \alpha\langle e_1,e_3\rangle+\beta\langle e_2,e_3\rangle$

комутативност: 2) $\langle u,e\rangle=\langle e,u\rangle$

поз. дефинитност: 3) $\langle u,u\rangle\ge 0$, $\langle u,u\rangle=0\iff u=0$

ђ) (Т) (Бине-Коши) $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

е) $d(A,\alpha)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $d(B,\beta)=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 0-2023|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=\dfrac{2020}{5}=\boxed{404}$

ж) $\overset{\varphi_A(\lambda)}{\det(A-\lambda E)}=\det(A-\lambda E)^T=\det(A^T-(\lambda E)^T)=\det(A^T-\lambda E)=\varphi_{A^T}(\lambda)$

2

$$\begin{aligned}2x-y+3z+4t&=5\\4x-2y+5z+6t&=7\\6x-3y+7z+8t&=9\\ax-4y+9z+10t&=11\end{aligned}\quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}2x-y+3z+4t&=5\\-z-2t&=-3\\-2z-4t&=-6\\(a-8)x-3z-6t&=-9\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}2x-y+3z+4t&=5\\(a-8)x\quad -3z-6t&=-9\\-z-2t&=-3\\0&=0\end{aligned}$$

Из треће јне $\Rightarrow t=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow z=-2\alpha+3$

Из друге јне $\Rightarrow (a-8)x=0$

I) $a\neq 8 \Rightarrow x=0$

из 1. јне $\Rightarrow y=-2\alpha+4$

$\boxed{\mathcal{R}_\alpha=\{(0,4-2\alpha,3-2\alpha,\alpha)\mid \alpha\in\mathbb{R}\},\ a\neq 8}$

II) $a=8 \Rightarrow$ 2. јна је $0=0$

из 1. јне $\Rightarrow x=\beta,\ \beta\in\mathbb{R}\Rightarrow y=2\beta-2\alpha+4$

$\boxed{\mathcal{R}_{\alpha,\beta}=\{(\beta,2\beta-2\alpha+4,3-2\alpha,\alpha)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\ a=8}$

---

3 $L:\mathbb{R}^2[x]\to\mathbb{R}^3$, $L(a+bx+cx^2)=(a-2c,-a+b+3c,-b)$

I) $\operatorname{Ker} L=\{a+bx+cx^2 \mid L(a+bx+cx^2)=0\}$

$$\Rightarrow \begin{aligned}a\quad-2c&=0\\-a+b+3c&=0\\-b\quad&=0\end{aligned}\Rightarrow b=0 \qquad \begin{aligned}a-2c&=0\\-a+3c&=0\end{aligned}\ \Rightarrow c=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \operatorname{Ker}L=\{0\}\Rightarrow \underline{L \text{ је инверт.}}$$

II)
$$\begin{aligned}a\quad-2c&=e\\-a+b+3c&=f\\-b\quad&=g\end{aligned}\Rightarrow \begin{aligned}a-2c&=e\\-a+3c&=f+g\end{aligned}\ \Rightarrow \boxed{c=e+f+g}\Rightarrow\boxed{a=3e+2f+2g}, \quad \boxed{b=-g}$$

$L(a+bx+cx^2)=(e,f,g) \Rightarrow \boxed{L^{-1}(e,f,g)=3e+2f+2g-gx+(e+f+g)x^2}$

4

$$\varphi_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda&3&-3\\-1&4-\lambda&-3\\-1&3&-2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&3&0\\-1&4-\lambda&1-\lambda\\-1&3&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&3&0\\0&1-\lambda&0\\-1&3&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-\lambda&3\\0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(1-\lambda)=\boxed{-\lambda\cdot(\lambda-1)^2}$$

$$A\cdot(A-E)=\begin{bmatrix}0&3&-3\\-1&4&-3\\-1&3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3&-3\\-1&3&-3\\-1&3&-3\end{bmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\mu_A(\lambda)=\lambda(\lambda-1)}$$

сопствене вредности $\boxed{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2=\lambda_3=1}$

$Av = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3b-3c=0 \Rightarrow b=c \\ \left.\begin{matrix} -a+4b-3c=0 \\ -a+3b-2c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=c \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} v_0 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} \\ E_0 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}$$

$(A-E)v = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} -a+3b-3c=0 \\ \Rightarrow a = 3b-3c \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} v = (3b-3c,\ b,\ c) \\ E_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{matrix}}$$

A јесте дијаг. типа (има нема вишеструке нуле)

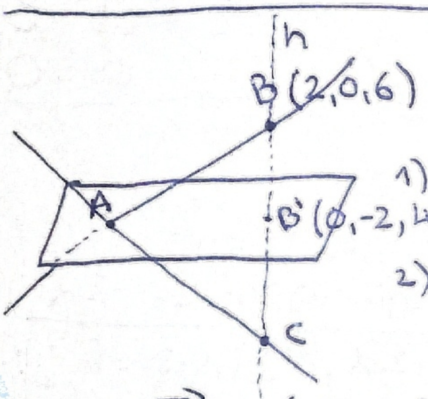
$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{2023} = PD^{2023}P^{-1} = PDP^{-1} = A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ јер је } D^n = D$$

$\boxed{5}$ $p: \begin{matrix} x = t+1 \\ y = 2t-2 \\ z = 3t+3 \end{matrix},\ t \in \mathbb{R}$, $\alpha: x+y+z-2=0$

$p \cap \alpha \Rightarrow t+1+2t-2+3t+3-2=0 \Rightarrow t=0$

$\Rightarrow$ p и α се секу у $A(1,-2,3)$



нпр за $t=1 \Rightarrow B(2,0,6) \in p$

1) n т.д. $B \in n$, $n \perp \alpha \Rightarrow n: \begin{matrix} x = s+2 \\ y = s \\ z = s+6 \end{matrix},\ s \in \mathbb{R}$

$B(2,0,6) \in n$, $\vec{n} = (1,1,1)$

2) $n \cap \alpha = B' \Rightarrow s+2+s+s+6-2=0 \Rightarrow \boxed{s=-2}$

$\Rightarrow B'(0,-2,4) \Rightarrow \boxed{C(-2,-4,2)}$

$\Rightarrow \vec{AC} = (-3,-2,-1) \parallel (3,2,1) \Rightarrow \boxed{q: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}}$

$\boxed{6}$ $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ база V, $n \geq 3$ непаран

$\Rightarrow f = [e_1+e_2,\ e_2+e_3, \dots, e_{n-1}+e_n,\ e_n+e_1]$ је база V.

---

e база $V \Rightarrow \boxed{\dim V = n}$. Како у f има n вектора, довољно је доказати да су они лин. независни.

$$a_1(e_1+e_2)+a_2(e_2+e_3)+a_3(e_3+e_4)+\dots+a_{n-1}(e_{n-1}+e_n)+a_n(e_n+e_1)=0$$

$$\Rightarrow (a_1+a_n)e_1+(a_1+a_2)e_2+(a_2+a_3)e_3+\dots+(a_{n-1}+a_n)e_n=0$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ лин. независни $\Rightarrow a_1+a_n=0,\ a_1+a_2=0, \dots, a_{n-1}+a_n=0$

$$\begin{matrix} a_1+a_2 & = 0 \quad /\cdot(-1) \\ a_2+a_3 & = 0 \\ a_3+a_4 & = 0 \\ a_{n-1}+a_n & = 0 \\ a_1 \qquad + a_n & = 0 \end{matrix}$$

$\boxed{-a_1+a_3=0}$ $/\cdot(-1)$ ← 2. јна

$\boxed{a_1+a_4=0}$ ← 3. јна

...

добијамо $\boxed{(-1)^k a_1 + a_k = 0}$ ← k-1. јна

Кад дођемо до n-1. јне $\Rightarrow (-1)^n a_1 + a_n = 0$

како је n непаран $\Rightarrow$ $\begin{matrix} -a_1+a_n=0 \\ a_1+a_n=0 \end{matrix} \Rightarrow a_n=0 \Rightarrow a_i=0,\ \forall i=1..n$

$\Rightarrow f$ лин. нез $\Rightarrow$ база