$\boxed{\text{ЛААГ - II КОЛ 2024}}$ - ГРУПА ПИТАГОРА

$\boxed{1}$ а) $U^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in U \}$

б) Минимални полином μ_A је моничан полином најмањег степе[на] на ког поништава матрица A, тј важи $\mu_A(A) = 0$.

в) (Т) Матрица A поништава свој каракт. полином, $\varphi_A(A) = 0$.

г) У равни две праве могу да се секу, поклапају или буду паралелн[е]

д) $A(1,0,0) \in \alpha$, $d(\alpha,\beta) = d(A,\beta) = \dfrac{|1-6+16|}{\sqrt{6^2+8^2+24^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{676}} = \dfrac{10}{26} = \boxed{\dfrac{5}{13}}$

$\boxed{2}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \underline{-(\lambda-3)^2(\lambda-2)} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = 2} \Rightarrow \mu_A^1(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)$$

или

$\mu_A^2(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-2)$

$$(A-3E)(A-2E) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\mu_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)}$$

$\Rightarrow$ A јесте дијаг. типа

$$E_3 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ E_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ $\quad p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1) + p'(1)q'(1)$

Уведемо ознаку $\vec{p} = (p(0), p'(0), p(1), p'(1)) \Rightarrow p \circ q = \vec{p} \circ \vec{q}$ станд. скал. у $\mathbb{R}^4$

$W = \{ p \in V \mid 2p'(0) + p''(0) = 0, \ p'''(0) = 0 \}$

$\quad = \{ ax^3 + bx^2 + cx + d \mid 2c + 2b = 0, \ 6a = 0 \}$

$\quad = \{ b(x^2 - x) + d \mid b, d \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}(\underset{p_1}{x^2 - x}, \underset{p_2}{1})$

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

$p'''(x) = 6a$

$\Rightarrow \vec{p}_1 = (0, -1, 0, 1), \ \vec{p}_2 = (1, 0, 1, 0)$ $\quad \Rightarrow \vec{p} = (d, c, a+b+c+d, 3a+2b+c)$

а) $W^{\perp} = \{ p = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid p \circ p_i = 0, \ i = 1,2 \}$

$\quad = \{ ax^3 + bx^2 + cx + d \mid -c + 3a + 2b + c = 0, \ d + a + b + c + d = 0 \}$

$\quad = \{ ax^3 + bx^2 + cx + d \mid b = -\frac{3}{2}a, \ 2d + c - \frac{1}{2}a = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}a - 2d \}$

$\quad = \{ ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + (\frac{1}{2}a - 2d)x + d \} = \underline{\mathcal{L}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \ -2x + 1)}$

б) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1 \Rightarrow p'(x) = 6x^2 - 6x + 1 \Rightarrow \vec{p} = (1,1,1,1)$

$p = w_1 + w_2, \ w_1 \in W, \ w_2 \in W^{\perp}$

$p = \alpha p_1 + \beta p_2 + w_2 \quad / \circ p_1 \quad / \circ p_2$

$0 = 2\alpha, \ 2 = 2\beta \Rightarrow \underline{\beta = 1, \alpha = 0}$

$\Rightarrow w_1 = 1$ $\quad w_2' = 6x^2 - 6x + 1$

$\Rightarrow w_2 = p - w_1 = 2x^3 - 3x^2 + x$

$\Rightarrow \vec{w}_1 = (1, 0, 1, 0)$

$\quad \vec{w}_2 = (0, 1, 0, 1)$

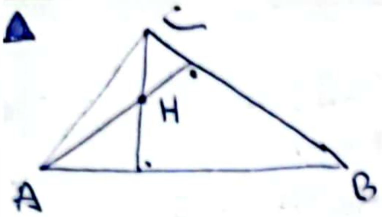
$d(p, W) = \|\vec{w}_2\| = \sqrt{2}$

$d(p, W^{\perp}) = \|\vec{w}_1\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ p је на једнаком растојању од W и $W^{\perp}$

4 Ортоцентар ΔABC, $A(1,1)$, $B(-1,-2)$ и $C(1,0)$.

▲



1) висина h_c = нормала из C на AB

$h_c \perp AB \Rightarrow \vec{n}_{h_c} = \vec{AB} = (-2,-3) \Rightarrow \vec{h_c} = (3,-2)$

$\Rightarrow h_c: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} \Rightarrow \boxed{h_c: 3y = -2x+2}$

2) висина h_a = нормала из A на BC

$\Rightarrow \vec{n}_{h_a} = \vec{BC} = (2,2) \parallel (1,1) \Rightarrow \vec{h_a} = (1,-1)$

$\Rightarrow h_a: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow \boxed{h_a: y-1 = -x+1}$

† ортоцентар је пресек висина довољно је узети било које две висине, не мора све три †

3) $H = h_a \cap h_c$:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 2 \\ x+y &= 2 \quad /\cdot(-2) \end{aligned} \quad + \Rightarrow \begin{aligned} y &= -2 \\ x &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{H(4,-2)}$$

■

5 p т.д. $O \in p$, $p \subset \alpha: x+y-2z=0$, $p \perp q: \begin{matrix} 2x+y+z=0 \\ 4x-3y+z=0 \end{matrix}$.

▲ $q: \begin{aligned} 2x+y+z &= 0 \quad \cdot(-1) \\ 4x-3y+z &= 0 \quad + \end{aligned}$

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 0 \\ 2x-4y &= 0 \end{aligned}$$

$y = t,\ t \in \mathbb{R}$

$q: \ x = 2t$

$z = -5t$

$\Rightarrow \vec{q} = (2,1,-5)$

$p \subset \alpha \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n}_\alpha = (1,1,-2)$

$p \perp q \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{q} = (2,1,-5)$

$\Rightarrow \vec{p} = \vec{n}_\alpha \times \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \underline{(-3,1,-1)}$

$\Rightarrow \boxed{p: \frac{x}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}}$

■

6 $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle A,B \rangle = tr(A^T C B)$ је скал. производ ?

▲ 1) $\langle \alpha A_1 + \beta A_2, B \rangle = tr((\alpha A_1 + \beta A_2)^T C B) = \alpha\, tr(A_1^T C B) + \beta\, tr(A_2^T C B)$

$= \alpha \langle A_1, B \rangle + \beta \langle A_2, B \rangle$ ✓ † користили смо $(\alpha A_1 + \beta A_2)^T = \alpha A_1^T + \beta A_2^T$

$tr(A+B) = tr(A) + tr B$, $tr(\alpha A) = \alpha\, tr A$

2) $\langle A,B \rangle = tr(A^T C B) = tr(A^T C B)^T = tr(B^T C A) = \langle B,A \rangle$ ✓

јер је $tr A^T = tr A$ и важи $C^T = C$

3) $\langle A,A \rangle = tr\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 2a+c & a+3c \\ 2b+d & b+3d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$

$= tr\left(\begin{bmatrix} 2a^2+ac+ca+3c^2 & \\ & 2b^2+bd+bd+3d^2 \end{bmatrix}\right) = 2a^2+2ac+3c^2 + 2b^2+2bd+3d^2$

$= a^2+2c^2+(a+c)^2+b^2+2d^2+(b+d)^2 \geq 0$

$\langle A,A \rangle = 0 \Leftrightarrow a=b=c=d=a+c=b+d=0 \Leftrightarrow A=0$

$\Rightarrow \langle , \rangle$ је скаларни производ

■

$\boxed{\text{ЛААГ - II КОЛ. ГРУПА ЕУКЛИД}}$

$\boxed{1}$ а) б) в) исто г) поклапају се, паралелне, секу се, мимоилазне

1) $B(2,0,0)\in\beta$, $d(\beta,\alpha)=d(B,\alpha)=\dfrac{|8-0+0-6|}{\sqrt{4^2+12^2+3^2}}=\boxed{\dfrac{2}{13}}$

$\boxed{2}$ $B=\begin{bmatrix}5&-3&-6\\-2&0&2\\4&-2&-5\end{bmatrix}\Rightarrow \varphi_B(\lambda)=-(\lambda+1)^2(\lambda-2)$, $\mu_B(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$

$\Rightarrow$ B јесте дијаг. типа

$\dots\Rightarrow D=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow P=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ $\vec{p}=(p(0),p'(0),p(1),p'(1))\Rightarrow p\circ q=\vec{p}\circ\vec{q}$ станд. скал. производ у $\mathbb{R}^4$

$U=\{p=ax^3+bx^2+cx+d\mid p'(1)-p'(0)=0,\ p(0)+p(1)=0\}$ $\quad p=ax^3+bx^2+cx+d$, $p'=3ax^2+2bx+c$

$=\{ax^3+bx^2+cx+d\mid 3a+2b+c-c=0,\ d+a+b+c+d=0\}$

$=\{ax^3+bx^2+cx+d\mid b=-\frac{3}{2}a,\ c=\frac{1}{2}a-2d\}$

$=\{ax^3-\frac{3}{2}ax^2+(\frac{1}{2}a-2d)x+d\}=\boxed{\mathcal{L}(\underbrace{x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x}_{p_1},\underbrace{-2x+1}_{p_2})}^{\perp}=W^{\perp}$ из I групе

$\Rightarrow\vec{p}=(d,c,a+b+c+d,3a+2b+c)$ $\quad p_1'=3x^2-3x+\frac{1}{2}$ $\quad p_2'=-2$

а) $\boxed{\vec{p_1}=(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})}$ $\boxed{\vec{p_2}=(1,-2,-1,-2)}$

$U^{\perp}=\{p=ax^3+bx^2+cx+d\mid p\circ p_i=0,\ i=1,2\}$

$=\{p=ax^3+bx^2+cx+d\mid \frac{1}{2}c+\frac{3}{2}a+b+\frac{1}{2}c=0,\ \cancel{d}-2c-a-b-c-\cancel{d}-6a-4b-2c=0\}$

$=\{b(x^2-x)+d\}=\boxed{\mathcal{L}(x^2-x,1)}^{\perp}=W$ из I групе

$\frac{3}{2}a+b+c=0\ /\cdot 5$
$-7a-5b-5c=0$ $+$

$\frac{1}{2}a=0\Rightarrow a=0$
$\Rightarrow c=-b$

б) $q=1+x-3x^2+2x^3\Rightarrow q'=1-6x+6x^2\Rightarrow\boxed{\vec{q}=(1,1,1,1)}$

$q=u_1+u_2$, $u_1\in U$, $u_2\in U^{\perp}$

$\Rightarrow q=\alpha p_1+\beta p_2+u_2\ /\circ p_1,\circ p_2\Rightarrow$

$1=\frac{1}{2}\alpha-2\beta\ /\cdot 5$
$-4=-2\alpha+10\beta$ $+$

$1=\frac{1}{2}\alpha\Rightarrow\alpha=2\Rightarrow\beta=0$

$\Rightarrow u_1=2p_1=2x^3-3x^2+x$
$u_2=q-u_1=\underline{1}$

(исто као Питагора само обрнути простори $\Rightarrow d(q,U)=d(q,U^{\perp})$)

$\boxed{4}$ исто само тачке преименоване

$\boxed{5}$ $\vec{p}=(-3,1,-1)$ исто, $A(9,1,2024)\in p\Rightarrow\boxed{p:\dfrac{x-9}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2024}{-1}}$

$\boxed{6}$ 1) 2) исто

3) $\langle A,A\rangle=tr\left(\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=tr\left(\begin{bmatrix}3a-c&-a+2c\\3b-d&-b+2d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)$

$=3a^2-ac-ac+2c^2+3b^2-db-db+2d^2$

$=2a^2+c^2+(a-c)^2+2b^2+d^2+(b-d)^2\geq 0$

$\langle A,A\rangle=0\Leftrightarrow a=c=a-c=b=d=b-d=0\Rightarrow A=0$