2. КОЛОКВИЈУМ 2023

1 а) Скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ је <u>сопствена вредност</u> матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ ако $(\exists v \neq 0, v \in \mathbb{R}^n)$ т.д. $Av = \lambda v$. Тада је v <u>сопствени вектор</u> матрице A који одговара сопств. вредности λ.

(Т) Скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ је сопств. вредност $A \iff \varphi_A(\lambda) = 0$.

б) <u>Минимални полином</u> матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ је моничан полином најмањег степена који поништава матрица A, тј. $\mu_A(A) = 0$

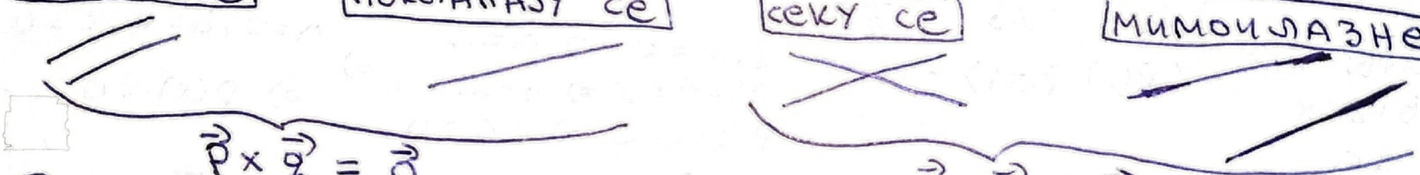
в) Нека је V (реални) векторски простор. <u>Скаларни производ</u> на V је пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ такво да важи:

1) линеарност по I аргументу: $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$
2) комутативност: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
3) позитивна дефинитност: $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = \vec{0}$

г) $W^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W \}$

д) Однос две праве у простору: p т.д. $\vec{p}, P \in p$ и q са $\vec{q}, Q \in q$

ПАРАЛЕЛНЕ | ПОКЛАПАЈУ СЕ | СЕКУ СЕ | МИМОИЛАЗНЕ



$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$: $P \notin q$ (паралелне), $P \in q$ (поклапају се)

$\vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0}$: $[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}] = 0$ (секу се), $[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$ (мимоилазне)

---

2 а)
$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -3 & -6 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & \lambda \\ -3 & -6 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & \lambda \\ -1 & -4-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[(1+\lambda)(4+\lambda) + 2\right] = -\lambda(\lambda^2 + 5\lambda + 6)$$

$$= \boxed{-\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)} \Rightarrow \boxed{\mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda+2)(\lambda+3)}$$

б) $\boxed{\lambda = 0}$

$A v = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$-a + 2b + 2c = 0 \quad / \cdot (-1)$
$2a + 2b + 2c = 0$
$-3a - 6b - 6c = 0$

$-a + 2b + 2c = 0$
$3a = 0$

$a = 0 \quad b = -c$

$$\boxed{v = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{pmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\lambda = -3}$

$(A + 3E)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$2(a + b + c) = 0$
$2a + 5b + 2c = 0 \quad \cdot (-1)$
$a + 2b + c = 0$

$b = 0$
$a = -c$

$$\boxed{v = \mathcal{L}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\lambda = -2}$

$(A + 2E)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$a + 2b + 2c = 0 \quad \cdot (-2)$
$2a + 4b + 2c = 0$
$-3a - 6b - 4c = 0$

$c = 0$
$a = -2b$

$$\boxed{v = \mathcal{L}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(б) A јесте дијагоналног типа јер M_A нема вишеструке нуле (или има 3 лин. независна сопствена вектора)

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-2)^n - (-3)^n & 2\cdot(-2)^n - 2\cdot(-3)^n & 2\cdot(-2)^n - 2\cdot(-3)^n \\ -(-2)^n & -(-2)^n & -(-2)^n \\ (-3)^n & 2\cdot(-3)^n & 2\cdot(-3)^n \end{bmatrix}$$

---

3 $\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p'(-1)\cdot q'(-1) + p''(1)\cdot q''(1)$

(а) 1) $\langle ap(x)+bq(x), s(x)\rangle = (ap(0)+bq(0))\cdot s(0) + (ap'(-1)+bq'(-1))\, s'(-1) + (ap''(1)+bq''(1))\, s''(1)$
$= a\langle p(x), s(x)\rangle + b\langle q(x), s(x)\rangle$ ✓

2) $\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p'(-1)q'(-1) + p''(1)q''(1) = q(0)p(0) + q'(-1)p'(-1) + q''(1)p''(1) = \langle q, p\rangle$ ✓

3) $\langle p(x), p(x)\rangle = \underbrace{p(0)^2}_{\ge 0} + \underbrace{p'(-1)^2}_{\ge 0} + \underbrace{p''(1)^2}_{\ge 0} \ge 0$ ✓

$p(x) = a + bx + cx^2$
$p'(x) = b + 2cx$
$p''(x) = 2c$

$\langle p(x), p(x)\rangle = 0 \iff p(0) = 0 \Rightarrow a = 0$; $p'(-1) = 0 \Rightarrow b - 2c = 0$; $p''(1) = 0 \Rightarrow 2c = 0$ $\Rightarrow a=0, b=0, c=0 \Rightarrow p(x) = 0$ ✓

(б) Због лакшег рачуна, обележимо $\vec{p} = (p(0), p'(-1), p''(1))$. Тада је $\langle p(x), q(x)\rangle = \vec{p} \circ \vec{q}$, где је $\circ$ станд. скаларни производ $\mathbb{R}^3$.

$V = \mathcal{L}(p_1(x) = x^2+1,\ p_2(x) = -4x+1)$

$V^\perp = \{ p(x) = a+bx+cx^2 \mid \langle p(x), p_1(x)\rangle = 0,\ \langle p(x), p_2(x)\rangle = 0 \} = (*)$

$p(x) = a+bx+cx^2 \Rightarrow \vec{p} = (a, b-2c, 2c)$

$p_1(x) = x^2+1,\ p_1'(x) = 2x,\ p_1''(x) = 2 \Rightarrow \vec{p_1} = (1, -2, 2)$

$p_2(x) = -4x+1,\ p_2'(x) = -4,\ p_2''(x) = 0 \Rightarrow \vec{p_2} = (1, -4, 0)$

$(*) = \{ a+bx+cx^2 \mid a - 2b + 4c + 4c = 0,\ a - 4b + 8c = 0 \}$
$= \{ a+bx+cx^2 \mid b = 0,\ a = -8c \} = \{ -8c + cx^2 \mid c \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}(\overbrace{-8+x^2}^{q(x)})$

(в) $p(x) = x^2+x+1 = w_1(x) + w_2(x),\ w_1 \in V,\ w_2 \in V^\perp$

$p(x) = w_1(x) + a\cdot q(x) \quad / \, q(x)$

$\Rightarrow a = \dfrac{\langle p(x), q(x)\rangle}{\langle q(x), q(x)\rangle} = \dfrac{\vec{p}\circ\vec{q}}{\vec{q}\circ\vec{q}} = \dfrac{-2}{72} = -\dfrac{1}{36} \Rightarrow \boxed{w_1(x) = \frac{37}{36}x^2 + x + \frac{7}{9} \quad w_2(x) = \frac{2}{9} - \frac{1}{36}x^2}$

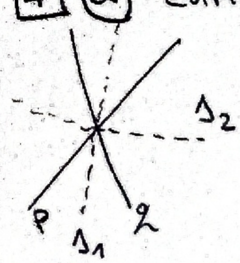
$p(x) = x^2+x+1 \Rightarrow p'(x) = 2x+1,\ p''(x) = 2 \Rightarrow \vec{p} = (1, -1, 2)$

$q(x) = -8+x^2 \Rightarrow q'(x) = 2x,\ q''(x) = 2 \Rightarrow \vec{q} = (-8, -2, 2)$

$d(p, V) = \|w_2\| = \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^2}} = \sqrt{\frac{16+1+1}{18^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{18}}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{p је ближи в. простору}}$ ✓

$d(p, V^\perp) = \|w_1\| = \sqrt{\frac{49}{81} + \frac{19^2}{18^2} + \frac{37^2}{18^2}} = \frac{\sqrt{4\cdot 49 + 19^2 + 37^2}}{18} > \frac{\sqrt{18}}{18}$

4 а) симетрале $p: x-y+5=0$ и $q: x+y-3=0$



Нека је $S(x_0,y_0) \in s$ произв. тачка са симетрале

$$\Rightarrow d(S,p) = d(S,q)$$

$$\frac{|x_0-y_0+5|}{\cancel{\sqrt{1+1}}} = \frac{|x_0+y_0-3|}{\cancel{\sqrt{1+1}}}$$

$s_1: x-y+5 = x+y-3$ $\qquad$ $s_2: x-y+5 = -(x+y-3)$

$\boxed{s_1: \ y=4}$ $\qquad$ $\boxed{s_2: \ x=-1}$

б) $\vec{n}_p=(1,-1) \Rightarrow \vec{p}=(1,1)$ $\qquad$ $\vec{n}_q=(1,1) \Rightarrow \vec{q}=(-1,1)$

$\vec{n}_{s_1}=(0,1) \Rightarrow \vec{s}_1=(1,0)$ $\qquad$ $\vec{n}_{s_2}=(1,0) \Rightarrow \vec{s}_2=(0,1)$

$$\cos\measuredangle(s_1,p) = \left|\frac{\vec{s}_1 \circ \vec{p}}{\|\vec{s}_1\|\cdot\|\vec{p}\|}\right| = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \measuredangle(s_1,p)=\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\measuredangle(s_1,q) = \left|\frac{\vec{s}_1 \circ \vec{q}}{\|\vec{s}_1\|\cdot\|\vec{q}\|}\right| = \left|\frac{-1}{1\cdot\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \measuredangle(s_1,q)=\frac{\pi}{4}$$

Аналогно за $\measuredangle(s_2,p) = \measuredangle(s_2,q)$.

---

5 $p: \frac{x-2}{a} = \frac{y+3}{b} = \frac{z-1}{c}$, $\quad \vec{q}=(2,-3,3)$, $Q=(-1,-2,1)$

$\vec{p}=(a,b,c)$, $P(2,-3,1)$ $\qquad$ $\vec{r}=(1,-1,1)$, $R(7,-4,1)$

---

1) p сече $q \Leftrightarrow 0=[\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{matrix} = -9b+2c-9c-3a = \boxed{-3a-9b-7c=0}$

2) p сече $r \Leftrightarrow 0=[\vec{p},\vec{r},\overrightarrow{PR}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{matrix} = 5b-c+5c+a = \boxed{a+5b+4c=0}$

$a+5b+4c=0 \ /\cdot 3$ $\qquad$ $a+5b+4c=0$

$-3a-9b-7c=0$ $+$ $\qquad$ $6b+5c=0 \Rightarrow c=-\frac{6}{5}b$

$a=-5b+\frac{24}{5}b=-\frac{b}{5}$ $\Rightarrow \vec{p}=\left(-\frac{1}{5}b, b, -\frac{6}{5}b\right)$

$\Rightarrow \boxed{p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{-6}}$ $\qquad \Rightarrow \boxed{\vec{p}=(-1,5,-6)}$

$\vec{p}\circ\vec{n}_\alpha = (-1,5,-6)\circ(3,4,1) = -3+20-6 = 11 \neq 0 \Rightarrow \boxed{p \nparallel \alpha}$ ■

---

6 ПС (претпоставимо супротно) Нека је $v=v_1+v_2+\dots+v_k$ сопствени вектор који одг. сопств. вредности λ. Тада

$Av=\lambda v=\lambda v_1+\lambda v_2+\dots+\lambda v_k$ с једне стране, а с друге

$Av=A(v_1+v_2+\dots+v_k)=Av_1+Av_2+\dots+Av_k=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_k v_k$

Одузимањем $\Rightarrow 0=(\lambda-\lambda_1)v_1+(\lambda-\lambda_2)v_2+\dots+(\lambda-\lambda_k)v_k$

Различитим сопс. вредностима одг. лин. нез. сопс. вектори

$\Rightarrow v_1,\dots v_k$ лин. нез $\Rightarrow \lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\dots=\lambda_k$ ↯

Контрадикција јер је $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ ■