

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Други колоквијум, 09.01.2024. године
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Група задатака: ПИТАГОРА
Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци ОБАВЕЗНО попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и групу задатака коју радите (у пољу ознака задатка)!
Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а-б):
 - а) [1п] Ортогонал U^\perp векторског потпростора $U \leq V$;
 - б) [1п] Минимални полином матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
 - в) [1п] Формулисати Кејли-Хамилтонову теорему;
 - г) [1п] Навести у каквом положају могу бити две праве у равни;
 - д) [2п] Израчунати растојање између равни $\alpha : 3x + 4y - 12z - 3 = 0$ и $\beta : -6x - 8y + 24z + 16 = 0$.

2. [6п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и, ако јесте, наћи дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P тако да је $D = P^{-1}AP$.

3. Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$ векторски простор полинома степена ≤ 3 са скаларним производом

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1) + p'(1)q'(1)$$

и $W = \{p \in V \mid 2p'(0) + p''(0) = 0, p'''(0) = 0\}$.

- а) [4п] Одредити бар једну базу векторског простора W^\perp .
 - б) [2п] Ком од потпростора W или W^\perp је полином $p = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$ ближи?
4. [6п] Одредити ортоцентар $\triangle ABC$ чија су темена $A(1, 1)$, $B(-1, -2)$ и $C(1, 0)$.
 5. [6п] Одредити једначину праве p која садржи координатни почетак, налази се у равни $\alpha : x + y - 2z = 0$ и нормална је на праву $q : 2x + y + z = 0, 4x - 3y + z = 0$.
 6. [5п] Доказати да је пресликавање $\langle, \rangle : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ дато са

$$\langle A, B \rangle = \text{tr} \left(A^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} B \right)$$

скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Други колоквијум, 09.01.2024. године
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Група задатака: ЕУКЛИД
Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци ОБАВЕЗНО попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и групу задатака коју радите (у пољу ознака задатка)!
Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а-б):
 - а) [1п] Ортогонал W^\perp векторског потпростора $W \leq V$;
 - б) [1п] Минимални полином матрице $B \in M_n(\mathbb{R})$;
 - в) [1п] Формулисати Кејли-Хамилтонову теорему;
 - г) [1п] Навести у каквом положају могу бити две праве у простору;
 - д) [2п] Израчунати растојање између равни $\alpha : 4x - 12y + 3z - 6 = 0$ и $\beta : -8x + 24y - 6z + 16 = 0$.

2. [6п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице B .

Испитати да ли је B дијагоналног типа и, ако јесте, наћи дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P тако да је $D = P^{-1}BP$.

3. Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$ векторски простор полинома степена ≤ 3 са скаларним производом

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1) + p'(1)q'(1)$$

и $U = \{p \in V \mid p'(1) - p'(0) = 0, p(0) + p(1) = 0\}$.

- а) [4п] Одредити бар једну базу векторског простора U^\perp .
 - б) [2п] Ком од потпростора U или U^\perp је полином $q = 1 + x - 3x^2 + 2x^3$ ближи?
4. [6п] Одредити ортоцентар $\triangle ABC$ чија су темена $A(-1, -2)$, $B(1, 0)$ и $C(1, 1)$.
 5. [6п] Одредити једначину праве p која садржи тачку $A(9, 1, 2024)$, паралелна је равни $\alpha : x + y - 2z = 0$ и нормална је на праву $q : 2x + y + z = 0, 4x - 3y + z = 0$.
 6. [5п] Доказати да је пресликавање $\langle, \rangle : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ дато са

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr} \left(X^T \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} Y \right)$$

скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$.