Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Први колоквијум, 02.12.2023. године
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Група задатака: ГАУС
Време рада: 180 мин. Срећно!

Пре израде задатака, на вежбанци ОБАВЕЗНО попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и групу задатака коју радите (у пољу ознака задатка)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] линеарна независност вектора $v_1, v_2, ..., v_n$;
   б) [1п] инверз матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
   в) [1п] сума векторских простора U и W;
   г) [1п] линеарно пресликавање $L : U \to W$;
   д) [2п] Одредити угао и растојање између вектора $\vec{a} = (7, 6, -6)$ и $\vec{b} = (6, 2, 9)$.

2. [6п] У зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$, Гаусовом методом елиминације, решити систем

$$\begin{aligned} (a+2)x + y \qquad &= a - 1 \\ x - ay + z &= 1 - 2a \\ ax - y + z &= -1 \end{aligned}$$

3. Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$ векторски простор полинома степена ≤ 3 са реалним коефицијентима и $U = \{p \in V \mid p(0) = p(1)\}$.
   а) [2п] Одредити бар једну базу, као и димензију простора U;
   б) [3п] Ако је $W = \{p \in V \mid p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\}$, испитати да ли је $V = U \oplus W$.

4. Нека је $F : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ дато са $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + 2b + 3c + 2d, 2a + 4b + 7c + 5d, a + 2b + 6c + 5d)$.
   а) [3п] Наћи базу и димензију $\mathrm{Im}\, F$;
   б) [3п] Наћи базу и димензију $\mathrm{Ker}\, F$.

5. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & a \end{bmatrix}$.
   а) [2п] Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да матрица A буде инвертибилна.
   б) [4п] За $a = 8$ одредити A^{-1}, ако постоји, користећи елементарне трансформације врста.

6. Доказати:
   а) [4п] $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, где су $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ произвољне матрице;
   б) [2п] $\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$, где су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ произвољне матрице и B инвертибилна.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Први колоквијум, 02.12.2023. године
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Група задатака: САРУС
Време рада: 180 мин. Срећно!

Пре израде задатака, на вежбанци ОБАВЕЗНО попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и групу задатака коју радите (у пољу ознака задатка)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] линеарна независност вектора $v_1, v_2, ..., v_n$;
   б) [1п] инверз матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
   в) [1п] сума векторских простора U и W;
   г) [1п] линеарно пресликавање $L : U \to W$;
   д) [2п] Одредити угао и растојање између вектора $\vec{c} = (-6, 9, 2)$ и $\vec{d} = (7, 6, -6)$.

2. [6п] У зависности од реалног параметра $b \in \mathbb{R}$, Гаусовом методом елиминације, решити систем

$$\begin{aligned} x + (b+2)y \qquad &= b - 1 \\ bx \qquad - y - z &= 2b - 1 \\ x \qquad - by - z &= 1 \end{aligned}$$

3. Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$ векторски простор полинома степена ≤ 3 са реалним коефицијентима и $U = \{p \in V \mid p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\}$.
   а) [2п] Одредити бар једну базу, као и димензију простора U;
   б) [3п] Ако је $W = \{p \in V \mid p(0) = p(1)\}$, испитати да ли је $V = U \oplus W$.

4. Нека је $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ дато са $G(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 2t, 2x + 4y + 7z + 5t, x + 2y + 6z + 5t)$.
   а) [3п] Наћи базу и димензију $\mathrm{Im}\ G$;
   б) [3п] Наћи базу и димензију $\mathrm{Ker}\ G$.

5. Нека је $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & b \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.
   а) [2п] Одредити $b \in \mathbb{R}$ тако да матрица B буде инвертибилна.
   б) [4п] За $b = 3$ одредити B^{-1}, ако постоји, користећи адјунговану матрицу.

6. Доказати:
   а) [4п] $\mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}(QP)$, где су $P \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $Q \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ произвољне матрице;
   б) [2п] $\mathrm{tr}(PQP^{-1}) = \mathrm{tr}(Q)$, где су $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ произвољне матрице и P инвертибилна.