

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

ЈУН 1 - 05.06.2024. године

Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В

Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а)-з):

- а) [1п] ортогонални вектори \vec{a} и \vec{b} ;
- б) [1п] линеарни омотач (линеал) скупа вектора $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
- в) [1п] инверз матрице A ;
- г) [1п] сума векторских простора $V = U + W$;
- д) [1п] димензија векторског простора V ;
- ђ) [1п] линеарно пресликавање $L : U \rightarrow W$;
- е) [1п] сопствена вредност матрице A ;
- ж) [1п] минимални полином матрице A ;
- з) [1п] ортогонал S^\perp векторског потпростора $S \leq V$;
- и) [1п] Навести у каквом положају могу бити две равни у простору.

2. [10п] Користећи Крамерову теорему, у зависности од параметара $a, b \in \mathbb{R}$, решити

$$\begin{aligned}ax + y + bz &= 1 \\x + ay + bz &= 1 \\x + y + abz &= b.\end{aligned}$$

3. Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ линеарно пресликавање дато са $L \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + 2b + 3c, b + c - 2d)$.

а) [4п] Одредити матрицу $[L]_E^F$ пресликавања L у односу на базе

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ и } F = \{(1, 2), (-1, 1)\}.$$

б) [6п] Одредити ранг, дефект и бар по једну базу језгра и слике пресликавања L .

4. Нека је V векторски потпростор од \mathbb{R}^3 генерисан сопственим векторима матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

а) [7п] Наћи базу и димензију векторских простора V и V^\perp у односу на стандардни скаларни производ у \mathbb{R}^3 .

б) [3п] Којем од потпростора V и V^\perp је вектор $w = (1, 0, -4)$ ближи?

5. [10п] Испитати међусобни положај правих $p : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ и $q : 2x+y-z = 1, 3x-y = 1$.

Уколико се секу или су паралелне, одредити једначину равни која их садржи, или, уколико су мимоилазне, одредити једначину њихове заједничке нормале.

6. [10п] Нека су U и W четвородимензиони потпростори векторског простора $V = M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$. Одредити све могуће вредности за $\dim(U + W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести бар по један пример за сваку од вредности.