

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
ЈАНУАР 2 - 02.02.2024. године
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци ОБАВЕЗНО поунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а), б), г), д):

- а) [1п] Вектор \vec{a} је линеарна комбинација вектора \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} ;
- б) [1п] Адјунгована матрица $\text{adj}A$;
- в) [1п] Формулисати теорему о рангу и дефекту линеарног пресликавања $L : U \rightarrow W$;
- г) [1п] Скаларни производ на векторском простору V ;
- д) [1п] Сума векторских простора $V = U + W$;
- ђ) [1п] Навести Грасманову формулу;
- е) [2п] Доказати да сличне матрице имају исти карактеристични полином;
- ж) [2п] Одредити угао између правих $p : x = 1$ и $q : y = x + 2$.

2. Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^2[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ са $L(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{bmatrix}$.

- а) [4п] Доказати да је пресликавање L линеарно.
- б) [6п] Одредити бар по једну базу као и димензију за $\text{Ker } L$ и $\text{Im } L$.

3. [10п] Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Испитати да ли је A дијагоналног типа и, ако јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

4. Нека је $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, 2x - z + t = 0, y + z = 0\}$.

- а) [3п] Одредити бар по једну базу простора W и W^\perp .
- б) [4п] Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (0, 0, 0, 4)$ на просторе W и W^\perp у односу на стандардни скаларни производ у \mathbb{R}^4 .
- в) [3п] Са којим од потпростора W и W^\perp гради већи угао v ?

5. [10п] Одредити једначину равни која садржи тачке $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ и $C(0, 0, 1)$, као и координате ортоцентра $\triangle ABC$.

6. а) [5п] Нека су вектори u , v и w линеарно независни вектори векторског простора V .

Испитати да ли су $u + 2v + 3w$, $2u + 3v + 8w$ и $u + 2v + 4w$ линеарно независни.

- б) [5п] Нека су u и v вектори унитарног векторског простора V такви да је $\|u\| = 3$, $\|u + v\| = 4$ и $\|u - v\| = 6$. Израчунати $\|v\|$ и $\langle u, v \rangle$.