

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија  
ЈАНУАР 1 - 13.01.2024. године  
Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В  
Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци ОБАВЕЗНО попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

- Дефинисати следеће појмове (а-д):
  - [1п] Директна сума векторских простора  $U$  и  $W$ ;
  - [1п] Линеарни омотач скупа вектора  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ;
  - [1п] База и димензија векторског простора  $V$ ;
  - [1п] Линеарно пресликавање  $L : U \rightarrow W$ ;
  - [1п] Ранг матрице  $A$ ;
  - [1п] Формулисати Бине-Кошијеву теорему;
  - [2п] Нека је  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Доказати да је њен карактеристични полином  $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$ ;
  - [2п] Доказати да је ортонормиран скуп вектора  $\{v_1, \dots, v_k\}$  линеарно независан скуп.

- [10п] Нека су

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

и

$$W = \mathcal{L} \left( \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

векторски потпростори простора  $M_2(\mathbb{R})$ . Одредити бар по једну базу простора  $U$ ,  $W$ ,  $U+W$  и  $U \cap W$ .

- Нека је  $L : \mathbb{R}^2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2[x]$  линеарно пресликавање простора  $\mathbb{R}^2[x]$  полинома степена  $\leq 2$  дато са

$$L(p) = p(x+1) + p(x).$$

- [5п] Одредити матрицу пресликавања  $L$  у односу на базу  $F = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$  простора  $\mathbb{R}^2[x]$ ;
  - [5п] Испитати да ли је  $L$  инвертибилан и, ако јесте, наћи формулу за  $L^{-1}$ .
- [10п] Нека је  $V$  векторски потпростор од  $\mathbb{R}^4$  генерисан векторима

$$f_1 = (1, 2, 0, 3), \quad f_2 = (4, 0, 5, 8), \quad f_3 = (8, 1, 5, 6), \quad f_4 = (3, -2, 5, 5).$$

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за  $V$  у односу на стандардни скаларни производ.

- [10п] Дате су тачке  $A(-1, 0, -4)$ ,  $B(7, 2, 2)$ ,  $C(2, 1, 3)$  и  $D(0, -1, 1)$ . Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање, мимоилазних права  $AB$  и  $CD$ .
- а) [6п] Нека је  $A : V \rightarrow V$  линеарно пресликавање коначно димензионог векторског простора  $V$ . Доказати да је

$$\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A = V \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}.$$

- [4п] Навести пример линеарног пресликавања  $A$  коначно димензионог простора  $V$  таквог да је

$$\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A \neq V.$$