

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
СЕПТЕМБАР 1 - 31.08.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!



- Дефинисати следеће појмове (а-д):
 - [1п] Директна сума векторских простора U и W ;
 - [1п] Линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$;
 - [1п] Ортогонал векторског потпростора $S^\perp \leq V$;
 - [1п] Инверзна матрица матрице A ;
 - [1п] Ранг матрице A ;
 - [1п] Формулисати Бине-Кошијеву теорему;
 - [2п] Нека је $A \in M_2(\mathbb{R})$. Доказати да је њен карактеристични полином $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$;
 - [2п] Доказати да је ортонормиран скуп вектора $\{v_1, \dots, v_k\}$ линеарно независан скуп.

- [10п] Дато је пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ формулом

$$L(X) = X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\operatorname{tr}(X) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Доказати да је L линеарно и одредити бар по једну базу $\operatorname{Im} L$ и $\operatorname{Ker} L$, као и ранг и дефект L .

- [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2023 & 2022 & 2023 \\ 0 & 2022 & 2022 \\ 0 & 0 & 2023 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .
Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте израчунати A^n .

- Нека је $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисано са

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_3y_1 + 2x_1y_3.$$

- [3п] Доказати да је \langle, \rangle скаларни производ на \mathbb{R}^3 ;
 - [7п] Одредити удаљеност вектора $v = (1, 1, 1)$ од простора $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.
- [10п] Дате су права $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ и равна $\alpha : 2x - y + z - 6 = 0$.
Одредити једначину праве q која припада равни α и сече p под правим углом.
 - [10п] Нека су U и W четвородимензиони векторски потпростори векторског простора V димензије 6.
Одредити све могуће вредности за $\dim(U+W)$ и $\dim(U \cap W)$ и навести пример за сваку од могућности.