Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Други колоквијум, 10.01.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] Сопствена вредност и сопствени вектор матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
   б) [1п] Минимални полином матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
   в) [1п] Скаларни производ на векторском простору V;
   г) [1п] Ортогонални комплемент $W^{\perp}$ векторског потпростора $W \leq V$;
   д) [2п] Навести у каквом се положају могу налазити две праве у простору, као и карактеризацију тих односа на основу векторског и мешовитог производа одговарајућих вектора.

2. Нека је $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$.
   а) [2п] Наћи карактеристични и минимални полином матрице A.
   б) [2п] Наћи сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   в) [2п] Испитати да ли је A дијагоналног типа и, ако јесте, израчунати A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. На векторском простору $\mathbb{R}^2[x] = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ дефинисано је пресликавање
$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + p'(-1)q'(-1) + p''(1)q''(1).$$
   а) [2п] Доказати да је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на $\mathbb{R}^2[x]$.
   б) [2п] Ако је $V = \mathcal{L}(x^2 + 1, -4x + 1)$, наћи базу и димензију $V^{\perp}$.
   в) [2п] Којем од потпростора V и $V^{\perp}$ је полином $p = x^2 + x + 1$ ближи?

4. а) [3п] Одредити једначине симетрала s_1 и s_2 углова између правих $p : y = x + 5$ и $q : y + x - 3 = 0$.
   б) [2п] Рачунски показати да је $\angle(s_i, p) = \angle(s_i, q)$, $i = 1, 2$.

5. [6п] Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(2, -3, 1)$ и сече праве
$$q : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{3} \quad \text{и} \quad r : \begin{array}{l} x = 7 + t, \\ y = -4 - t, \\ z = 1 + t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R},$$
   Да ли је p паралелна равни $\alpha : 3x + 4y + z - 2023 = 0$?

6. [6п] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ и нека су $\lambda_1, ..., \lambda_k$ $(2 \leq k \leq n)$ међусобно различите $(\lambda_i \neq \lambda_j$ за $i \neq j)$ сопствене вредности матрице A и $v_1, ..., v_k$ одговарајући сопствени вектори $(Av_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, ..., k)$. Доказати да вектор $v = v_1 + v_2 + ... + v_k$ није сопствени вектор матрице A.