Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Први колоквијум, 04.12.2022. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] Линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$;
   б) [1п] Сума и директна сума простора U и W;
   в) [1п] Ранг матрице $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
   г) [1п] Језгро и слика, ранг и дефект линеарног пресликавања $L : W \to U$;
   д) [2п] Нека је $L : W \to U$ линеарно пресликавање. Доказати да је $\mathrm{Ker\ L} \leq W$ и $\mathrm{Im\ L} \leq U$.

2. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Нека је $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX + XB = 2X^T\}$.
   а) [2п] Доказати да је U векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$.
   б) [2п] Одредити бар једну базу, као и димензију простора U.
   в) [2п] Ако је $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X^T = X\}$, покаяти да је $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

3. [5п] Нека је $U \leq \mathbb{R}^4$ генерисан векторима
$$u_1 = (1, 0, 0, 1),\ u_2 = (1, 1, 1, 2),\ u_3 = (-2, 0, 1, 1)$$
   и $W \leq \mathbb{R}^4$ генерисан векторима
$$w_1 = (1, 0, -2, 3),\ w_2 = (3, 1, -3, 7),\ w_3 = (7, 3, -5, 15).$$
   Наћи бар једну базу за U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

4. Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ са $L(a + bx + cx^2) = 3b - 3c - (a - 4b + 3c)x - (a - 3b + 2c)x^2$.
   а) [3п] Одредити бар по једну базу слике и језгра линеарног оператора L.
   б) [3п] Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу $F = (f_1 = 1+x+x^2, f_2 = 3+x, f_3 = -3+x^2)$.

5. [6п] Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$, решити систем
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -3, \\ ax + 2y - 3z &= 5 - a, \\ 2x + ay - z &= 1. \end{aligned}$$

6. [6п] Доказати да:
   Вектори $\vec{a} = (1, a, a^2)$, $\vec{b} = (1, b, b^2)$ и $\vec{c} = (1, c, c^2)$ су линеарно независни $\iff a \neq b \neq c \neq a$.