Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
ЈУН 1 - 05.06.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-д):
   а) [1п] База и димензија векторског простора V;
   б) [1п] Координате вектора v у бази $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$;
   в) [1п] Језгро и слика, ранг и дефект линеарног пресликавања $L : U \to W$;
   г) [1п] Сопствене вредности и сопствени вектори матрице A;
   д) [1п] Скаларни производ на векторском простору V;
   ђ) [1п] Формулисати Кејли-Хамилтонову теорему;
   е) [2п] Нека су $\vec{a} = (1, 2, 3)$ и $\vec{b} = (-1, 0, 1)$. Израчунати $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ и $\vec{a} \times \vec{b}$;
   ж) [2п] Нека су $v_1, ..., v_n \in V$ вектори векторског простора V и $A : V \to V$ линеарно пресликавање. Ако су $Av_1, ..., Av_n$ линеарно независни, тада су и $v_1, ..., v_n$ линеарно независни. Доказати.

2. [10п] Нека је U потпростор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ генерисан матрицама

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

   а V потпростор генерисан матрицама

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

   Наћи базу и димензију за U, V, $U + W$ и $U \cap V$.

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & -5 \\ 11 & 3 & 12 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте израчунати A^n.

4. [10п] Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (7, -4, -1, 2)$ на потпростор

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0,\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0\},$$

   а затим и растојање v од U у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$.

5. [10п] Дате су праве $p : \dfrac{x-2}{a} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-3}{4}$ и $q : \dfrac{x-3}{b} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$. Одредити вредности реалних параметара a и b тако да се праве p и q секу под правим углом, а затим за такве a и b одредити једначину равни α која садржи праве p и q.

6. [10п] Доказати да за све линеарне операторе L на векторском простору V важи

$$\mathrm{Ker}L \cap \mathrm{Im}L = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}L^2 = \mathrm{Ker}L.$$