Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
ЈАНУАР 2 - 02.02.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-д):
   а) [1п] Потпростор U векторског простора V;
   б) [1п] Линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V$;
   в) [1п] Линеарно пресликавање $L : U \to W$;
   г) [1п] Симетрична матрица A;
   д) [1п] Скаларни производ на векторском простору V;
   ђ) [1п] Формулисати Бине- Кошијеву теорему;
   е) [2п] Навести формулу за растојање тачке $A(x_0, y_0, z_0)$ од равни $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ у $\mathbb{R}^3$. Израчунати растојање тачке $B(1, 2, 0)$ од равни $\beta : 3x + 4z = 2023$;
   ж) [2п] Доказати да квадратне матрице A и A^T имају исте карактеристичне полиноме.

2. [10п] У зависности од реалног параметра a, решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z + 4t &= 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6t &= 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8t &= 9 \\ ax - 4y + 9z + 10t &= 11. \end{aligned}$$

3. [10п] Нека је $L : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$ пресликавање дефинисано са

$$L(a + bx + cx^2) = (a - 2c, -a + b + 3c, -b).$$

   Испитати да ли је L инвертибилно и, ако јесте, наћи формулу пресликавања L^{-1}.

4. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $A = P^{-1}DP$. Израчунати A^{2023}.

5. [10п] Одредити праву q која је симетрична правој $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ у односу на раван $\alpha : x + y + z - 2 = 0$.

6. [10п] Нека је $e = [e_1, e_2, ..., e_n]$ база векторског простора V, где је $n \geq 3$ непаран природан број. Доказати да је $f = [e_1 + e_2, e_2 + e_3, ..., e_{n-1} + e_n, e_n + e_1]$ такође база векторског простора V.