Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
ЈАНУАР 1 - 14.01.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] Линеарна независност вектора $v_1, v_2, ..., v_k$;
   б) [1п] База и димензија векторског простора V;
   в) [1п] Линеарно пресликавање $L : U \to W$;
   г) [1п] Траг и инверз матрице A;
   д) [1п] Навести Грасманову формулу;
   ђ) [2п] Нека су A и B сличне матрице. Доказати да је $\det A = \det B$;
   е) [3п] Израчунати површину троугла чија су темена $A(1, 1, 2)$, $B(0, 2, 0)$ и $C(3, 4, 1)$.

2. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3[x]$ линеарно пресликавање такво да

$$L(1, 0, 1) = 1 + 2x - x^3, \quad L(1, 1, 1) = x + x^2, \quad L(1, 2, 3) = -1 + 2x + 4x^2 + x^3.$$

   а) [6п] Одредити формулу пресликавања L, тј. $L(a, b, c)$;
   б) [2п] Наћи базу и димензију $\mathrm{Ker}L$ и $\mathrm{Im}L$;
   в) [2п] Одредити матрицу пресликавања L у односу на канонске базе $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3[x]$.

3. а) [6п] Израчунати детерминанту матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
   б) [4п] Израчунати det(adj A).

4. [10п] Нека је V потпростор од $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима

$$f_1 = (1, 0, 1, 1, 1), \quad f_2 = (-1, 2, 3, 3, 7), \quad f_3 = (1, 2, 8, 6, 9), \quad f_4 = (1, 0, 4, 2, 1).$$

   Грам-Шмитовим поступком ортогонализације, у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^5$, одредити ортонормирану базу простора V.

5. [10п] Дате су праве $p : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{0} = \dfrac{z-7}{-1}$ и $q : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.
   Одредити једначину праве r која праве p и q сече под правим углом.

6. [10п] Нека су A и B матрице такве да је AB дефинисано. Доказати да је $\mathrm{rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{rang}A, \mathrm{rang}B\}$.