Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : СЕПТЕМБАР 2
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] Линеарна независност вектора $v_1, ..., v_n$;
   б) [1п] Линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$;
   в) [1п] Траг матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
   г) [1п] Ортогонални комплемент потпростора S унитарног простора V;
   д) [1п] Навести Грасманову формулу;
   ђ) [1п] Формулисати Бине-Кошијеву теорему;
   е) [2п] Израчунати запремину паралелепипеда разапетог векторима
   $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (1,1,1)$ и $\vec{c} = (-1,5,2)$.
   ж) [2п] Доказати да сличне матрице имају исти карактеристични полином.

2. Нека је пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ дато са $L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + 2b - c + d, 2a + b + c - d)$.
   а) [3п] Доказати да је L линеарно пресликавање.
   б) [7п] Одредити бар по једну базу $\mathrm{Im}\, L$ и $\mathrm{Ker}\, L$.

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

4. Нека је $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.
   а) [4п] Доказати да је пресликавање $< \cdot, \cdot >: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ дато са

$$< X, Y >= \mathrm{tr}(X^T A Y)$$

   скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$.
   б) [6п] Ако је $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$, одредити ортогоналну пројекцију јединичне матрице I на W и $W^{\perp}$.

5. Дате су тачка $A(1,2,3)$ и права $q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$.
   а) [5п] Одредити једначину равни α која садржи тачку A и праву q.
   б) [5п] Одредити тачку B симетричну тачки A у односу на праву q.

6. а) [4п] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$, n непаран, антисиметрична матрица тј. $A^T = -A$. Доказати да је $\det A = 0$.
   б) [6п] Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ регуларна матрица, доказати да је $\det(\mathrm{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.