Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : СЕПТЕМБАР 1
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [2п] Линеарни омотач $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_k)$ вектора векторског простора V је векторски потпростор простора V. Доказати.
   б) [2п] Формулисати Крамерову теорему произвољног система 3×3.
   в) [2п] Извести формулу за инверз произвољне матрице $A \in M_2(\mathbb{R})$.
   г) [2п] Израчунати површину троугла чија су темена $A(0,2,5)$, $B(0,0,0)$ и $C(0,2,0)$.
   д) [2п] Дефинисати скаларни производ векторског простора V.

2. [10п] Дати су векторски потпростори од $M_2(\mathbb{R})$

$$U = \{\begin{bmatrix} c-d & 2c-3d \\ -2c & d \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

   и

$$W = \{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x+z+t=0,\ y+3t=0\}.$$

   Одредити бар по једну базу као и димензије векторских простора $U, W, U+W$ и $U \cap W$.

3. [10п] Нека је пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ дато са

$$L(X) = X^T B - \mathrm{tr} X \cdot B \ , \text{ где је } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.
   б) Наћи матрицу оператора L у односу на базу $f = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}$ простора $M_2(\mathbb{R})$.

4. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   Одредити сопствени вектор који одговара највећој сопственој вредности.

5. [10п] Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање, мимоилазних правих
   $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ и $q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$.

6. а) [4п] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$, n непаран, антисиметрична матрица тј. $A^T = -A$. Доказати да је $\det A = 0$.
   б) [6п] Ако за не-нула матрице $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ важи $ABC = 0$, доказати да детерминанте бар две од тих матрица морају бити једнаке нула.