Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : ЈУН 2
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [1п] Доказати да ако су A и B инвертибилне матрице, онда је и AB инвертибилна матрица.
   б) [2п] Дефинисати линеарно пресликавање $L : U \to V$.
   Дефинисати језгро и слику, ранг и дефект линеарног пресликавања L.
   в) [1п] Формулисати Кејли-Хамилтонову теорему.
   г) [2п] Ако је $S \leq V$, доказати да је и $S^{\perp} \leq V$.
   д) [2п] Одредити једначину праве кроз тачке $A(27,6)$ и $B(20,22)$.
   ђ) [2п] Израчунати векторски и скаларни производ вектора $\vec{a} = (1,0,1)$ и $\vec{b} = (3,2,1)$ из $\mathbb{R}^3$.

2. Нека је $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b - 2c = 0\}$.
   а) [6п] Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити му базу и димензију.
   б) [4п] Ако је $W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid b = d = 2022\}$, доказати да је $\mathbb{R}^4 = U + W$.
   Да ли је сума директна?

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је A дијагоналног типа и, ако јесте, одредити инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $A = PDP^{-1}$. Израчунати $A^n, n \in \mathbb{N}$.

4. [10п] Нека је W потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$f_1 = (1,1,1,1),\ f_2 = (2,3,4,7),\ f_3 = (1,2,-1,6),\ f_4 = (2,2,6,2).$$

   Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормиране базе за W и $W^{\perp}$.

5. а) [6п] Кроз тачку $A(1,2,3)$ одредити праву a која је паралелна равни $\alpha : x + y + z + 10 = 0$ и која сече праву $b:\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-4}{1}$.
   б) [4п] Одредити тачку B симетричну тачки A у односу на раван α.

6. [10п] Нека је $A : V \to V$ линеарни оператор такав да је $V = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Im}A$.
   Доказати да је $V = \mathrm{Ker}A^2 \oplus \mathrm{Im}A^2$.