Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : ЈУН 1
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [2п] Линеарни омотач $\mathrm{Span}(v_1, v_2, ..., v_k)$ вектора векторског простора V је векторски потпростор простора V. Доказати.
   б) [2п] Сличне матрице имају исти карактеристични полином. Доказати.
   в) [3п] Дефинисати инверз матрице A. Извести формулу за инверз произвољне матрице $A \in M_2(\mathbb{R})$.
   г) [2п] Дефинисати скаларни производ векторског простора V.
   д) [1п] Дефинисати ортогонални комплемент потпростора U унитарног простора V.

2. [10п] Елементарним трансформацијама врста одредити инверз матрице A, уколико постоји, где је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. [10п] Нека је $U \leq M_2(\mathbb{R})$ генерисан матрицама

$$e_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},\ e_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

и $W \leq M_2(\mathbb{R})$ генерисан матрицама

$$f_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ f_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ f_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Наћи бар по једну базу за U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

4. а) [5п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   б) [5п] Нека је W векторски простор генерисан сопственим векторима матрице A. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу простора W у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$.

5. [10п] Одредити једначину праве q која садржи тачку $Q(0, -1, -4)$ и сече праву $p : x + y + z = 3,\ 2y - z = 14$ под правим углом. Одредити затим раван α која садржи праве p и q.

6. [10п] Доказати да за све линеарне операторе L на векторском простору V важи

$$\mathrm{Ker}L \cap \mathrm{Im}L = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}L^2 = \mathrm{Ker}L.$$