

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

Испитни рок : ЈАНУАР 2

Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б

Време рада: 180 мин. Срећно!



1. а) [2п] Дефинисати базу и димензију векторског простора. Навести стандардне базе за просторе \mathbb{R}^3 , $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3[x]$.
б) [2п] Линеарни омотач $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ вектора векторског простора V је векторски потпростор простора V . Доказати.
в) [2п] Нека су A и B сличне матрице. Доказати да је $\det A = \det B$.
г) [2п] Нека је $A \in M_2(\mathbb{R})$. Доказати да је тада карактеристични полином $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A$.
д) [2п] Нека су $u, v \in V$ произвољни вектори унитарног простора V . Доказати да је тада $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$.
2. Дато је линеарно пресликавање $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ са $L(x, y, z) = (x - y + z, x - 3z, 2x - y - 2z)$.
а) [6п] Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу $S = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (1, 3, 5)\}$ простора \mathbb{R}^3 .
б) [4п] Наћи бар по једну базу за $\text{Ker} L$ и $\text{Im} L$, као и ранг и дефект пресликавања L .
3. [10] Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$, решити систем

$$\begin{aligned}x + & & + 3z & = 1 \\-3x + 2y & - (8 + a)z & = 2 - a \\2x + (a - 4)y & + z & = 1.\end{aligned}$$

4. Дат је векторски потпростор $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ са стандардним скаларним производом из \mathbb{R}^4 .
а) [6п] Одредити ортонормирану базу и димензију простора W .
б) [1п] Наћи базу и димензију простора W^\perp .
в) [3п] Одредити угао и растојање између вектора $v = (1, 2, 3, 4)$ и W .
5. Дате су тачка $A(2, -3, 1)$ и праве $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ и $q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.
а) [4п] Одредити тачку C симетричну тачки A у односу на праву q .
б) [6п] Одредити једначину праве l која пролази кроз тачку A и сече праве p и q .
6. [10п] Нека су U и W различити петодимензиони потпростори векторског простора V димензије 7. Одредити могуће вредности за $\dim(U+W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од тих вредности.