Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : ЈАНУАР 1
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [1п] Дефинисати директну суму потпростора U, W векторског простора V;
б) [1п] Дефинисати језгро и слику, ранг и дефект линеарног пресликавања $L : U \to V$;
в) [2п] Формулисати Крамерову теорему система

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

г) [1п] Дефинисати скаларни производ на векторском простору V над пољем $\mathbb{R}$;
д) [2п] Доказати да је ортонормиран скуп вектора $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ линеарно независан скуп.
ђ) [3п] Дефинисати векторски и мешовити производ. Израчунати површину троугла $\triangle ABC$ ако његова темена имају координате $A(2021, 2021, 2021)$, $B(2022, 2022, 2022)$ и $C(2020, 2021, 2022)$

2. [10п] Нека је $U \leq \mathbb{R}^3[t]$ генерисан полиномима $p_1 = t^3 + 2t^2 + 3t + 1$, $p_2 = 3t^3 + 5t^2 + 7t$, $p_3 = t^3 + t^2 + t - 2$ и $p_4 = t^3 - 2t - 8$ и $V \leq \mathbb{R}^3[t]$ генерисан полиномима $q_1 = t^3 + t^2 + t - 2$, $q_2 = t^3 + 2t^2 + 2t - 1$ и $q_3 = 2t^3 + 5t^2 + 5t - 1$. Одредити димензије U, V, $U + V$ и $U \cap V$ и бар по једну базу за U и V.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дато са $L(x, y, z) = (x + y + 2z, x + z, 2x + y + 2z)$.
а) [2п] Доказати да је L линеарно пресликавање.
б) [2п] Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу $\mathbb{R}^3$.
в) [6п] Доказати да је оператор L инвертибилан и наћи формулу за L^{-1}.

4. а) [3п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -9 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
б) [4п] Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
в) [2п] Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.
г) [5п] Наћи A^n, $n \in \mathbb{N}$.

5. а) [3п] Одредити једначину праве p која садржи пресек правих $q : x + y = 5$ и $r : 3x - 2y = 5$ и нормална је на x-осу.
б) [6п] Испитати међусобни положај правих $p : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ и $q : \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ 3x - y = 1 \end{array}$.
Уколико се секу одредити координате пресечне тачке као и једначину равни α која их садржи, а уколико су мимоилазне одредити једначину њихове заједничке нормале и растојање између њих.

6. а) [4п] Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ регуларна матрица, доказати да је $\det(adjA) = (\det A)^{n-1}$.
б) [3п] Нека су A и B инвертибилне матрице реда 2022 и нека је $\det A = 20$ и $\det B = 21$.
Израчунати $\det(adj(AB^{-1}))$.