Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
СЕПТЕМБАР 1 - 31.08.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-д):
   а) [1п] Директна сума векторских простора U и W;
   б) [1п] Линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$;
   в) [1п] Ортогонал векторског потпростора $S^{\perp} \leq V$;
   г) [1п] Инверзна матрица матрице A;
   д) [1п] Ранг матрице A;
   ђ) [1п] Формулисати Бине-Кошијеву теорему;
   е) [2п] Нека је $A \in M_2(\mathbb{R})$. Доказати да је њен карактеристични полином $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{tr}A + \det A$;
   ж) [2п] Доказати да је ортонормиран скуп вектора $\{v_1, ..., v_k\}$ линеарно независан скуп.

2. [10п] Дато је пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ формулом
$$L(X) = X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\mathrm{tr}(X) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$
Доказати да је L линеарно и одредити бар по једну базу $\mathrm{Im}L$ и $\mathrm{Ker}L$, као и ранг и дефект L.

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2023 & 2022 & 2023 \\ 0 & 2022 & 2022 \\ 0 & 0 & 2023 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте израчунати A^n.

4. Нека је $<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ дефинисано са
$$<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)> = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_3y_1 + 2x_1y_3.$$
   а) [3п] Доказати да је $<,>$ скаларни производ на $\mathbb{R}^3$;
   б) [7п] Одредити удаљеност вектора $v = (1, 1, 1)$ од простора $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

5. [10п] Дате су права $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ и раван $\alpha : 2x - y + z - 6 = 0$.
Одредити једначину праве q која припада равни α и сече p под правим углом.

6. [10п] Нека су U и W четвородимензиони векторски потпростори векторског простора V димензије 6.
Одредити све могуће вредности за $\dim(U+W)$ и $\dim(U\cap W)$ и навести пример за сваку од могућности.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
ЈУН 1 - 05.06.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-д):
   а) [1п] База и димензија векторског простора V;
   б) [1п] Координате вектора v у бази $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$;
   в) [1п] Језгро и слика, ранг и дефект линеарног пресликавања $L : U \to W$;
   г) [1п] Сопствене вредности и сопствени вектори матрице A;
   д) [1п] Скаларни производ на векторском простору V;
   ђ) [1п] Формулисати Кејли-Хамилтонову теорему;
   е) [2п] Нека су $\vec{a} = (1, 2, 3)$ и $\vec{b} = (-1, 0, 1)$. Израчунати $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ и $\vec{a} \times \vec{b}$;
   ж) [2п] Нека су $v_1, ..., v_n \in V$ вектори векторског простора V и $A : V \to V$ линеарно пресликавање. Ако су $Av_1, ..., Av_n$ линеарно независни, тада су и $v_1, ..., v_n$ линеарно независни. Доказати.

2. [10п] Нека је U потпростор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ генерисан матрицама

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

   а V потпростор генерисан матрицама

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

   Наћи базу и димензију за U, V, $U + W$ и $U \cap V$.

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & -5 \\ 11 & 3 & 12 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте израчунати A^n.

4. [10п] Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (7, -4, -1, 2)$ на потпростор

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0,\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0\},$$

   а затим и растојање v од U у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$.

5. [10п] Дате су праве $p : \dfrac{x-2}{a} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-3}{4}$ и $q : \dfrac{x-3}{b} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$. Одредити вредности реалних параметара a и b тако да се праве p и q секу под правим углом, а затим за такве a и b одредити једначину равни α која садржи праве p и q.

6. [10п] Доказати да за све линеарне операторе L на векторском простору V важи

$$\mathrm{Ker}L \cap \mathrm{Im}L = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}L^2 = \mathrm{Ker}L.$$

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
ЈАНУАР 2 - 02.02.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-д):
   а) [1п] Потпростор U векторског простора V;
   б) [1п] Линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V$;
   в) [1п] Линеарно пресликавање $L : U \to W$;
   г) [1п] Симетрична матрица A;
   д) [1п] Скаларни производ на векторском простору V;
   ђ) [1п] Формулисати Бине- Кошијеву теорему;
   е) [2п] Навести формулу за растојање тачке $A(x_0, y_0, z_0)$ од равни $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ у $\mathbb{R}^3$. Израчунати растојање тачке $B(1, 2, 0)$ од равни $\beta : 3x + 4z = 2023$;
   ж) [2п] Доказати да квадратне матрице A и A^T имају исте карактеристичне полиноме.

2. [10п] У зависности од реалног параметра a, решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z + 4t &= 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6t &= 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8t &= 9 \\ ax - 4y + 9z + 10t &= 11. \end{aligned}$$

3. [10п] Нека је $L : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$ пресликавање дефинисано са

$$L(a + bx + cx^2) = (a - 2c, -a + b + 3c, -b).$$

   Испитати да ли је L инвертибилно и, ако јесте, наћи формулу пресликавања L^{-1}.

4. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $A = P^{-1}DP$. Израчунати A^{2023}.

5. [10п] Одредити праву q која је симетрична правој $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ у односу на раван $\alpha : x + y + z - 2 = 0$.

6. [10п] Нека је $e = [e_1, e_2, ..., e_n]$ база векторског простора V, где је $n \geq 3$ непаран природан број. Доказати да је $f = [e_1 + e_2, e_2 + e_3, ..., e_{n-1} + e_n, e_n + e_1]$ такође база векторског простора V.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
ЈАНУАР 1 - 14.01.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] Линеарна независност вектора $v_1, v_2, ..., v_k$;
   б) [1п] База и димензија векторског простора V;
   в) [1п] Линеарно пресликавање $L : U \to W$;
   г) [1п] Траг и инверз матрице A;
   д) [1п] Навести Грасманову формулу;
   ђ) [2п] Нека су A и B сличне матрице. Доказати да је $\det A = \det B$;
   е) [3п] Израчунати површину троугла чија су темена $A(1,1,2)$, $B(0,2,0)$ и $C(3,4,1)$.

2. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3[x]$ линеарно пресликавање такво да

$$L(1,0,1) = 1 + 2x - x^3, \quad L(1,1,1) = x + x^2, \quad L(1,2,3) = -1 + 2x + 4x^2 + x^3.$$

   а) [6п] Одредити формулу пресликавања L, тј. $L(a,b,c)$;
   б) [2п] Наћи базу и димензију $\mathrm{Ker}L$ и $\mathrm{Im}L$;
   в) [2п] Одредити матрицу пресликавања L у односу на канонске базе $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3[x]$.

3. а) [6п] Израчунати детерминанту матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
   б) [4п] Израчунати det(adj A).

4. [10п] Нека је V потпростор од $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима

$$f_1 = (1,0,1,1,1), \quad f_2 = (-1,2,3,3,7), \quad f_3 = (1,2,8,6,9), \quad f_4 = (1,0,4,2,1).$$

   Грам-Шмитовим поступком ортогонализације, у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^5$, одредити ортонормирану базу простора V.

5. [10п] Дате су праве $p : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{0} = \dfrac{z-7}{-1}$ и $q : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.
   Одредити једначину праве r која праве p и q сече под правим углом.

6. [10п] Нека су A и B матрице такве да је AB дефинисано. Доказати да је $\mathrm{rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{rang}A, \mathrm{rang}B\}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Други колоквијум, 10.01.2023. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] Сопствена вредност и сопствени вектор матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
   б) [1п] Минимални полином матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
   в) [1п] Скаларни производ на векторском простору V;
   г) [1п] Ортогонални комплемент $W^{\perp}$ векторског потпростора $W \leq V$;
   д) [2п] Навести у каквом се положају могу налазити две праве у простору, као и карактеризацију тих односа на основу векторског и мешовитог производа одговарајућих вектора.

2. Нека је $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$.
   а) [2п] Наћи карактеристични и минимални полином матрице A.
   б) [2п] Наћи сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   в) [2п] Испитати да ли је A дијагоналног типа и, ако јесте, израчунати A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. На векторском простору $\mathbb{R}^2[x] = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ дефинисано је пресликавање
$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + p'(-1)q'(-1) + p''(1)q''(1).$$
   а) [2п] Доказати да је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на $\mathbb{R}^2[x]$.
   б) [2п] Ако је $V = \mathcal{L}(x^2 + 1, -4x + 1)$, наћи базу и димензију $V^{\perp}$.
   в) [2п] Којем од потпростора V и $V^{\perp}$ је полином $p = x^2 + x + 1$ ближи?

4. а) [3п] Одредити једначине симетрала s_1 и s_2 углова између правих $p : y = x + 5$ и $q : y + x - 3 = 0$.
   б) [2п] Рачунски показати да је $\angle(s_i, p) = \angle(s_i, q)$, $i = 1, 2$.

5. [6п] Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(2, -3, 1)$ и сече праве
$$q : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{3} \quad \text{и} \quad r : \begin{array}{l} x = 7 + t, \\ y = -4 - t, \\ z = 1 + t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R},$$
   Да ли је p паралелна равни $\alpha : 3x + 4y + z - 2023 = 0$?

6. [6п] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ и нека су $\lambda_1, ..., \lambda_k$ $(2 \leq k \leq n)$ међусобно различите $(\lambda_i \neq \lambda_j$ за $i \neq j)$ сопствене вредности матрице A и $v_1, ..., v_k$ одговарајући сопствени вектори $(Av_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, ..., k)$. Доказати да вектор $v = v_1 + v_2 + ... + v_k$ није сопствени вектор матрице A.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Први колоквијум, 04.12.2022. године
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И2В
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] Линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$;
   б) [1п] Сума и директна сума простора U и W;
   в) [1п] Ранг матрице $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
   г) [1п] Језгро и слика, ранг и дефект линеарног пресликавања $L : W \to U$;
   д) [2п] Нека је $L : W \to U$ линеарно пресликавање. Доказати да је $\mathrm{Ker\ L} \leq W$ и $\mathrm{Im\ L} \leq U$.

2. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Нека је $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX + XB = 2X^T\}$.
   а) [2п] Доказати да је U векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$.
   б) [2п] Одредити бар једну базу, као и димензију простора U.
   в) [2п] Ако је $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X^T = X\}$, покаяти да је $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

3. [5п] Нека је $U \leq \mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$u_1 = (1, 0, 0, 1),\ u_2 = (1, 1, 1, 2),\ u_3 = (-2, 0, 1, 1)$$

   и $W \leq \mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$w_1 = (1, 0, -2, 3),\ w_2 = (3, 1, -3, 7),\ w_3 = (7, 3, -5, 15).$$

   Наћи бар једну базу за U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

4. Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ са $L(a + bx + cx^2) = 3b - 3c - (a - 4b + 3c)x - (a - 3b + 2c)x^2$.
   а) [3п] Одредити бар по једну базу слике и језгра линеарног оператора L.
   б) [3п] Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу $F = (f_1 = 1+x+x^2, f_2 = 3+x, f_3 = -3+x^2)$.

5. [6п] Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$, решити систем

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -3, \\ ax + 2y - 3z &= 5 - a, \\ 2x + ay - z &= 1. \end{aligned}$$

6. [6п] Доказати да:
   Вектори $\vec{a} = (1, a, a^2)$, $\vec{b} = (1, b, b^2)$ и $\vec{c} = (1, c, c^2)$ су линеарно независни $\iff a \neq b \neq c \neq a$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : СЕПТЕМБАР 2
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):
   а) [1п] Линеарна независност вектора $v_1, ..., v_n$;
   б) [1п] Линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$;
   в) [1п] Траг матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
   г) [1п] Ортогонални комплемент потпростора S унитарног простора V;
   д) [1п] Навести Грасманову формулу;
   ђ) [1п] Формулисати Бине-Кошијеву теорему;
   е) [2п] Израчунати запремину паралелепипеда разапетог векторима $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (1,1,1)$ и $\vec{c} = (-1,5,2)$.
   ж) [2п] Доказати да сличне матрице имају исти карактеристични полином.

2. Нека је пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ дато са $L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + 2b - c + d, 2a + b + c - d)$.
   а) [3п] Доказати да је L линеарно пресликавање.
   б) [7п] Одредити бар по једну базу $\mathrm{Im}\, L$ и $\mathrm{Ker}\, L$.

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

4. Нека је $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.
   а) [4п] Доказати да је пресликавање $< \cdot, \cdot >: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ дато са
   $$< X, Y >= \mathrm{tr}(X^T A Y)$$
   скаларни производ на $M_2(\mathbb{R})$.
   б) [6п] Ако је $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$, одредити ортогоналну пројекцију јединичне матрице I на W и $W^{\perp}$.

5. Дате су тачка $A(1,2,3)$ и права $q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$.
   а) [5п] Одредити једначину равни α која садржи тачку A и праву q.
   б) [5п] Одредити тачку B симетричну тачки A у односу на праву q.

6. а) [4п] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$, n непаран, антисиметрична матрица тј. $A^T = -A$. Доказати да је $\det A = 0$.
   б) [6п] Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ регуларна матрица, доказати да је $\det(\mathrm{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : СЕПТЕМБАР 1
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [2п] Линеарни омотач $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_k)$ вектора векторског простора V је векторски потпростор простора V. Доказати.
   б) [2п] Формулисати Крамерову теорему произвољног система 3×3.
   в) [2п] Извести формулу за инверз произвољне матрице $A \in M_2(\mathbb{R})$.
   г) [2п] Израчунати површину троугла чија су темена $A(0,2,5)$, $B(0,0,0)$ и $C(0,2,0)$.
   д) [2п] Дефинисати скаларни производ векторског простора V.

2. [10п] Дати су векторски потпростори од $M_2(\mathbb{R})$

$$U = \{\begin{bmatrix} c-d & 2c-3d \\ -2c & d \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

и

$$W = \{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x+z+t=0,\ y+3t=0\}.$$

Одредити бар по једну базу као и димензије векторских простора $U, W, U+W$ и $U \cap W$.

3. [10п] Нека је пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ дато са

$$L(X) = X^T B - \mathrm{tr}X \cdot B \text{ , где је } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.
   б) Наћи матрицу оператора L у односу на базу $f = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}$ простора $M_2(\mathbb{R})$.

4. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   Одредити сопствени вектор који одговара највећој сопственој вредности.

5. [10п] Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање, мимоилазних правих $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ и $q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$.

6. а) [4п] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$, n непаран, антисиметрична матрица тј. $A^T = -A$. Доказати да је $\det A = 0$.
   б) [6п] Ако за не-нула матрице $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ важи $ABC = 0$, доказати да детерминанте бар две од тих матрица морају бити једнаке нула.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : ЈУН 2
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [1п] Доказати да ако су A и B инвертибилне матрице, онда је и AB инвертибилна матрица.
   б) [2п] Дефинисати линеарно пресликавање $L : U \to V$.
   Дефинисати језгро и слику, ранг и дефект линеарног пресликавања L.
   в) [1п] Формулисати Кејли-Хамилтонову теорему.
   г) [2п] Ако је $S \leq V$, доказати да је и $S^{\perp} \leq V$.
   д) [2п] Одредити једначину праве кроз тачке $A(27, 6)$ и $B(20, 22)$.
   ђ) [2п] Израчунати векторски и скаларни производ вектора $\vec{a} = (1, 0, 1)$ и $\vec{b} = (3, 2, 1)$ из $\mathbb{R}^3$.

2. Нека је $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b - 2c = 0\}$.
   а) [6п] Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити му базу и димензију.
   б) [4п] Ако је $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b = d = 2022\}$, доказати да је $\mathbb{R}^4 = U + W$.
   Да ли је сума директна?

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је A дијагоналног типа и, ако јесте, одредити инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $A = PDP^{-1}$. Израчунати $A^n, n \in \mathbb{N}$.

4. [10п] Нека је W потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима
   $$f_1 = (1, 1, 1, 1),\ f_2 = (2, 3, 4, 7),\ f_3 = (1, 2, -1, 6),\ f_4 = (2, 2, 6, 2).$$
   Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормиране базе за W и $W^{\perp}$.

5. а) [6п] Кроз тачку $A(1, 2, 3)$ одредити праву a која је паралелна равни $\alpha : x + y + z + 10 = 0$ и која сече праву $b : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-4}{1}$.
   б) [4п] Одредити тачку B симетричну тачки A у односу на раван α.

6. [10п] Нека је $A : V \to V$ линеарни оператор такав да је $V = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Im}A$.
   Доказати да је $V = \mathrm{Ker}A^2 \oplus \mathrm{Im}A^2$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : ЈУН 1
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [2п] Линеарни омотач $\mathrm{Span}(v_1, v_2, ..., v_k)$ вектора векторског простора V је векторски потпростор простора V. Доказати.
   б) [2п] Сличне матрице имају исти карактеристични полином. Доказати.
   в) [3п] Дефинисати инверз матрице A. Извести формулу за инверз произвољне матрице $A \in M_2(\mathbb{R})$.
   г) [2п] Дефинисати скаларни производ векторског простора V.
   д) [1п] Дефинисати ортогонални комплемент потпростора U унитарног простора V.

2. [10п] Елементарним трансформацијама врста одредити инверз матрице A, уколико постоји, где је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. [10п] Нека је $U \leq M_2(\mathbb{R})$ генерисан матрицама

$$e_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},\ e_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

и $W \leq M_2(\mathbb{R})$ генерисан матрицама

$$f_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ f_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ f_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Наћи бар по једну базу за U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

4. а) [5п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   б) [5п] Нека је W векторски простор генерисан сопственим векторима матрице A. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу простора W у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$.

5. [10п] Одредити једначину праве q која садржи тачку $Q(0, -1, -4)$ и сече праву $p : x + y + z = 3,\ 2y - z = 14$ под правим углом. Одредити затим раван α која садржи праве p и q.

6. [10п] Доказати да за све линеарне операторе L на векторском простору V важи

$$\mathrm{Ker}L \cap \mathrm{Im}L = \{0\} \iff \mathrm{Ker}L^2 = \mathrm{Ker}L.$$

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : ЈАНУАР 2
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [2п] Дефинисати базу и димензију векторског простора.
Навести стандардне базе за просторе $\mathbb{R}^3$, $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3[x]$.
б) [2п] Линеарни омотач $\mathrm{Span}(v_1, v_2, ..., v_k)$ вектора векторског простора V је векторски потпростор простора V. Доказати.
в) [2п] Нека су A и B сличне матрице. Доказати да је $\det A = \det B$.
г) [2п] Нека је $A \in M_2(\mathbb{R})$. Доказати да је тада карактеристични полином $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{tr} A + \det A$.
д) [2п] Нека су $u, v \in V$ произвољни вектори унитарног простора V.
Доказати да је тада $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$.

2. Дато је линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ са $L(x, y, z) = (x - y + z, x - 3z, 2x - y - 2z)$.
а) [6п] Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу $S = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (1, 3, 5)\}$ простора $\mathbb{R}^3$.
б) [4п] Наћи бар по једну базу за $\mathrm{Ker} L$ и $\mathrm{Im} L$, као и ранг и дефект пресликавања L.

3. [10] Користећи Крамерову теорему, у зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$, решити систем

$$\begin{aligned} x + \qquad\qquad & +3z = 1 \\ -3x + 2y \quad & -(8+a)z = 2 - a \\ 2x + (a-4)y \quad & +z = 1. \end{aligned}$$

4. Дат је векторски потпростор $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ са стандардним скаларним производом из $\mathbb{R}^4$.
а) [6п] Одредити ортонормирану базу и димензију простора W.
б) [1п] Наћи базу и димензију простора $W^\perp$.
в) [3п] Одредити угао и растојање између вектора $v = (1, 2, 3, 4)$ и W.

5. Дате су тачка $A(2, -3, 1)$ и праве $p : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$ и $q : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$.
а) [4п] Одредити тачку C симетричну тачки A у односу на праву q.
б) [6п] Одредити једначину праве l која пролази кроз тачку A и сече праве p и q.

6. [10п] Нека су U и W различити петодимензиони потпростори векторског простора V димензије 7. Одредити могуће вредности за $\dim(U+W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од тих вредности.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
Испитни рок : ЈАНУАР 1
Групе: 1И2А, 1И2Б и 1И3Б
Време рада: 180 мин. Срећно!

1. а) [1п] Дефинисати директну суму потпростора U, W векторског простора V;
   б) [1п] Дефинисати језгро и слику, ранг и дефект линеарног пресликавања $L : U \to V$;
   в) [2п] Формулисати Крамерову теорему система

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

   г) [1п] Дефинисати скаларни производ на векторском простору V над пољем $\mathbb{R}$;
   д) [2п] Доказати да је ортонормиран скуп вектора $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ линеарно независан скуп.
   ђ) [3п] Дефинисати векторски и мешовити производ. Израчунати површину троугла $\triangle ABC$ ако његова темена имају координате $A(2021, 2021, 2021)$, $B(2022, 2022, 2022)$ и $C(2020, 2021, 2022)$

2. [10п] Нека је $U \leq \mathbb{R}^3[t]$ генерисан полиномима $p_1 = t^3 + 2t^2 + 3t + 1$, $p_2 = 3t^3 + 5t^2 + 7t$, $p_3 = t^3 + t^2 + t - 2$ и $p_4 = t^3 - 2t - 8$ и $V \leq \mathbb{R}^3[t]$ генерисан полиномима $q_1 = t^3 + t^2 + t - 2$, $q_2 = t^3 + 2t^2 + 2t - 1$ и $q_3 = 2t^3 + 5t^2 + 5t - 1$. Одредити димензије U, V, $U + V$ и $U \cap V$ и бар по једну базу за U и V.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дато са $L(x, y, z) = (x + y + 2z, x + z, 2x + y + 2z)$.
   а) [2п] Доказати да је L линеарно пресликавање.
   б) [2п] Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу $\mathbb{R}^3$.
   в) [6п] Доказати да је оператор L инвертибилан и наћи формулу за L^{-1}.

4. а) [3п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -9 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   б) [4п] Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   в) [2п] Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.
   г) [5п] Наћи A^n, $n \in \mathbb{N}$.

5. а) [3п] Одредити једначину праве p која садржи пресек правих $q : x + y = 5$ и $r : 3x - 2y = 5$ и нормална је на x-осу.
   б) [6п] Испитати међусобни положај правих $p : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ и $q : \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ 3x - y = 1 \end{array}$.
   Уколико се секу одредити координате пресечне тачке као и једначину равни α која их садржи, а уколико су мимоилазне одредити једначину њихове заједничке нормале и растојање између њих.

6. а) [4п] Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ регуларна матрица, доказати да је $\det(adj A) = (\det A)^{n-1}$.
   б) [3п] Нека су A и B инвертибилне матрице реда 2022 и нека је $\det A = 20$ и $\det B = 21$. Израчунати $\det(adj(AB^{-1}))$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2 2021.

1. [10] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.4)

   1.1 [1] база векторског простора;

   1.2 [1] језгро линеарног пресликавања $L : V \longrightarrow W$;

   1.3 [2] карактеристични полином матрице A;

   1.4 [2] скаларни производ на векторском простору V над пољем $\mathbb{R}$.

   1.5 [2] Нека су $u, v \in V$ произвољни вектори. Доказати да је $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$.

   1.6 [2] Навести формулу за растојање тачке $A(x_0, y_0, z_0)$ од равни $ax + by + cz + d = 0$ у $\mathbb{R}^3$. Израчунати растојање тачке $A(1, 2, 3)$ од равни $x + y + z - 3 = 0$.

2. а) [5] У координатном систему Oxy одредити растојање тачке $A(3, 5)$ од праве $p : 2y - x + 4 = 0$, као и нормалу из тачке A на правој p.

   б) [5] У координатном систему $Oxyz$ одредити једначину равни γ која садржи тачку $T(1, 1, 1)$ и ортогонална је на равнима $\alpha : 2x + 3y - 4z + 1 = 0$ и $\beta : x - y + z = 0$.

3. [10] Одредити ранг матрице A, израчунати $\det A$ и наћи A^{-1} ако постоји, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. [10] Нека су U и V потпростори векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ такви да је

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{bmatrix},\ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Одредити бар по једну базу и димензију за U, V, $U + V$, $U \cap V$. Да ли је $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$?

5. [10] Нека је $U \leq \mathbb{R}^4$ потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $f_1 = (1, -1, -3, -5)$, $f_2 = (8, 0, -10, -14)$, $f_3 = (-4, 6, 8, 10)$. Грам–Шмитовим поступком одредити бар једну ортонормирану базу потпростора U.

6. [10] Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ матрице, при чему је бар једна од њих инвертибилна. Доказати да матрице AB и BA имају исти карактеристични полином.

Време за рад је 180 минута.

Linearna algebra i analitička geometrija

1. Definisati sledeće pojmove ((a)-(d)):
   (a) (1 poen) Ortogonalna baza vektorskog prostora
   (b) (1 poen) Minimalni polinom
   (c) (1 poen) Nilpotentni operator
   (d) (2 poen) Rang i defekt linearnog operatora
   (e) (2 poen) Neka su A i B slične matrice. Dokazati da je $det(A) = det(B)$
   (f) (3 poena) Definisati vektorski proizvod. Izračunati površinu trougla ABC ako njegova temena imaju koordinate $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ i $C = (0, 2, 3)$.

2. (10 poena) Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(1, 2, 3)$ u odnosu na ravan $\alpha : x + y + z + 6 = 0$.

3. (10 poena) Rešiti sistem linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

4. (10 poena) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   Zatim odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A. Ispitati da li je matrica A slična dijagonalnoj i u slučaju da jeste, naći invertibilnu matricu P i dijagonalnu D tako da je $D = P^{-1}AP$. Odrediti formulu za A^n, $n \in \mathbb{N}$.

5. (10 poena) Neka je $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$.
   (a) (5 poena) Dokazati da je U potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.
   (b) (5 poena) Ako je $W = \{(0, 3z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, proveriti da li je $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

6. (10 poena) Dokazati da za sve linearne operatore L na vektorskom prostoru V važi:

$$KerL \cap ImL = \{0\} \Longleftrightarrow KerL^2 = KerL.$$

Linearna algrebra i analitička geometrija
JUN 2

1. (10 poena) Definisati sledeće pojmove ((a)-(d)):
   (a) (1 poen) Linearna nezavisnost vektora
   (b) (1 poen) Simetrična matrica
   (c) (1 poen) Jezgro linearnog operatora
   (d) (1 poen) Ortonormirana baza unitarnog prostora V
   (e) (1 poen) Navesti nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovskog
   (f) (1 poen) Formulisati Bine-Košijevu teoremu
   (g) (1 poen) Navesti formulu za rastojanje između dve mimoilazne prave
   (h) (1 poen) Navesti u kom međusobnom položaju mogu biti dve prave u prostoru.
   (i) (2 poena) Dokazati da kvadratne matrice A i $A^{\intercal}$ imaju iste karakteristične polinome

2. (10 poena) Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{0}$ i normalna je na ravan $\alpha : x + y + z + 42 = 0$.

3. (10 poena) Neka su a, b, c tri različita realna broja i neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$.
   (a) (5 poena) Dokazati da je $\det(A) = (b-a)(c-a)(c-b)$.
   (b) (5 poena) Izračunati determinantu matrica A^{-1}, $A^{\intercal}$ i A^{2021}.

4. (10 poena) Neka je preslikavanje $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dato sa
$$T(A) = A + A^{\intercal} + \operatorname{tr}(A)I.$$
   (a) (5 poena) Dokazati da je T linearno preslikavanje.
   (b) (5 poena) Odrediti matricu linearnog preslikavanja T u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

5. (10 poena) Neka su dati podskupovi od $\mathbb{R}^3$: $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$ i $N = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$. Dokazati da su M i N potprostori, da je $dim(M) = 2$ i $dim(N) = 1$.

6. (10 poena) Dokazati da u unitarnom vektorskom prostoru V za $\forall x, y \in V$ važi:
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јун 2021.

1. [10] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.4)

    1.1 [2] линеарно пресликавање $L : V \longrightarrow W$;

    1.2 [2] сопствена вредност матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;

    1.3 [2] траг матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;

    1.4 [2] сума потпростора U, W векторског простора V.

    1.5 [2] Нека су $u, v \in V$ произвољни вектори. Доказати једнакост паралелограма $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$.

2. [10] Нека су $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{0}$ и $q : x = 0,\ y = 0$ две мимоилазне праве. Наћи једначину праве n која сече праву p и праву q и нормална је и на p и на q.

3. [10] Нека је $U \leq \mathbb{R}^5$ потпростор генерисан векторима $f_1 = (1, 0, 2, 1, -1)$ и $f_2 = (0, 1, -3, 2, 0)$. Одредити $U^\perp \leq \mathbb{R}^5$ и наћи бар једну његову базу.

4. [10] Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$. Да ли је матрица A слична дијагоналној? Ако јесте, одредити инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$ и израчунати A^n, $n \in \mathbb{N}$.

5. [10] Решити систем линеарних једначина Крамеровим методом:

$$\begin{aligned} x+2y-\ z &= 1 \\ 2x+3y+2z &= 1 \\ 5x+8y+2z &= 2 \end{aligned}$$

6. [10] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Доказати да је $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

Време за рад је 180 минута.

Linearna algrebra i analitička geometrija
JANUAR 2

1. (a) (1 poen) Definisati vektorski proizvod.

   (b) (2 poena) Definisati bazu vektorskog prostora. Navesti dimenziju i bar jednu bazu za prostor matrica formata 2×3.

   (c) (2 poena) Definisati linearno preslikavanje i navesti primer ne-nula linearnog preslikavanja.

   (d) (1 poen) Neka su A i B slične matrice, dokazati da je $det(A) = det(B)$.

   (e) (2 poena) Definisati karakteristični polinom i navesti Kejli-Hamiltonovu teoremu.

   (f) (1 poen) Definisati ortogonalni komplement potprostora L unitarnog prostora

   (g) (1 poen) Neka su u i v međusobno ortogonalni vektori. Dokazati da je $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2$ (Pitagorina teorema)

2. (10 poena) Odrediti realan broj m tako da se prave $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{m}$ i $l_2 : x + y - z + 1 = 0,\ 2x - y - z = 0$ seku. U tom slučaju odrediti koordinate presečne tačke i jednačinu ravni koju određuju te dve prave.

3. (10 poena) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & -5 \\ 11 & 3 & 12 \end{bmatrix}$.
   Zatim odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A. Ispitati da li je matrica A slična dijagonalnoj i u slučaju da jeste, naći invertibilnu matricu P i dijagonalnu D tako da je $D = P^{-1}AP$. Odrediti formulu za A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4. (10 poena) Neka je V potprostor prostora $\mathbb{R}^4$ generisan vektorima $f_1 = (1,1,1,1)$, $f_2 = (1,1,2,4)$ i $f_3 = (1,2,-4,-3)$. Gram-Šmitovim postupkom ortogonalizacije odrediti ortonormiranu bazu za V.

5. (10 poena) Neka je $V = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ prostor realnih funkcija i neka su redom dati skupovi parnih i neparnih funkcija na $\mathbb{R}$. $M = \{f \in V | f(t) = f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ i $N = \{f \in V | f(t) = -f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$. Dokazati da su M i N potprostori od V, da je $M \cap N = \{0\}$ i $M \oplus N = V$.

6. Dokazati:

   (a) (6 poena) $tr(AB) = tr(BA)$, gde je A proizvoljna matrica tipa $m \times n$ i B proizvoljna matrica tipa $n \times m$.

   (b) (4 poena) $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$, gde su A i B proizvoljne matrice tipa $n \times n$ i B regularna.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2021.

1. [10] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.5)

   1.1 [2] скаларни производ и ортогоналност вектора

   1.2 [2] сличност матрица и матрица дијагоналног типа

   1.3 [2] линеарна независност вектора и база векторског простора V

   1.4 [1] линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$

   1.5 [1] језгро линеарног пресликавања $L : V \longrightarrow W$

   1.6 [2] Нека је V векторски простор и $U, W \leq V$ потпростори векторског простора V. Доказати да је сума потпростора $U + W$ директна (сваки елемент $v \in U + W$ се може на јединствен начин раставити као $v = u + w$, за неке $u \in U$ и $w \in W$) ако и само ако је $U \cap W = \emptyset$.

2. [10] Нека је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $u_1 = (1, 3, -1, 0, 2)$, $u_2 = (-1, -2, 4, 1, 0)$ и $u_3 = (2, 5, -5, -1, 2)$ и нека је W потпростор векторског простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $v_1 = (1, 1, -1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 3, 1, 5, -4)$ и $v_3 = (-1, 0, 4, -1, 5)$. Одредити бар једну базу и димензију векторских простора U, W, $U + W$ и $U \cap W$. Да ли је сума $U + W$ директна?

3. [10] Нека је оператор $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ дат са $L(a, b, c, d) = (a + d, b - c, a + b, d)$. Доказати да је L линеаран оператор и одредити његово језгро и слику. Наћи матрицу оператора L у бази $E = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

4. [10] Нека је U скуп решења једначине $x + 2y - z - t = 0$. Доказати да је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ и наћи неку његову базу. Грам–Шмитовим поступком ортогонализације од дате базе направити ортогоналну базу потпростора U, користећи стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$.

5. [10] Нека су у равни дате праве $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$ и $q : y = 2x$. Одредити једначину праве n која садржи тачку пресека правих p и q и нормална је на правој $r : x + 3y - 1 = 0$.

6. [10] Нека је $A : V \longrightarrow V$ линеарни оператор такав да је $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$. Доказати да је $V = \operatorname{Ker} A^2 \oplus \operatorname{Im} A^2$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 3 2020.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.3)

   1.1 Траг матрице.

   1.2 Сопствена вредност линеарног оператора $L : V \to V$.

   1.3 Скаларни производ векторског простора.

   1.4 Линеарни омотач скупа вектора $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ векторског простора V је векторски потпростор од V. Доказати.

   1.5 Сличне матрице имају исти карактеристични полином. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Нека су U и V векторски потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4[x] = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, такви да је $U = \Omega(u_1, u_2)$ и $V = \Omega(v_1, v_2, v_3)$, где је $u_1 = 2x^3 + 2x, u_2 = x^2 + 1, v_1 = x^3 + x^2 + x + 1, v_2 = x^3 + x$ и $v_3 = 1$. Одредити бар по једну базу и димензију за $U, V, U + V, U \cap V$

4. [5] Одредити међусобни положај правих $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}$ и $q : 2x = y, 3x = z$.

5. [5] Одредити ортогоналну пројекцију тачке $A(0, 1, 0)$ као и ортогоналну пројекцију праве $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+1}{-1}$ на раван $\alpha : x - z = 4$

6. [5] Нека су U и W разни седмодимензиони потпростори векторског простора V димензије 9. Одредити могуће вредности за $dimU \cap W$. Навести пример за сваку од вредности.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 3 2020.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.3)

   1.1 Траг матрице.

   1.2 Сопствена вредност линеарног оператора $L : V \to V$.

   1.3 Скаларни производ векторског простора.

   1.4 Линеарни омотач скупа вектора $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ векторског простора V је векторски потпростор од V. Доказати.

   1.5 Сличне матрице имају исти карактеристични полином. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Нека су U и V векторски потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4[x] = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, такви да је $U = \Omega(u_1, u_2)$ и $V = \Omega(v_1, v_2, v_3)$, где је $u_1 = 2x^3 + 2x, u_2 = x^2 + 1, v_1 = x^3 + x^2 + x + 1, v_2 = x^3 + x$ и $v_3 = 1$. Одредити бар по једну базу и димензију за $U, V, U + V, U \cap V$

4. [5] Одредити међусобни положај правих $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}$ и $q : 2x = y, 3x = z$.

5. [5] Одредити ортогоналну пројекцију тачке $A(0, 1, 0)$ као и ортогоналну пројекцију праве $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+1}{-1}$ на раван $\alpha : x - z = 4$

6. [5] Нека су U и W разни седмодимензиони потпростори векторског простора V димензије 9. Одредити могуће вредности за $dimU \cap W$. Навести пример за сваку од вредности.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2 2020.

1. [5]

   а) Дефинисати векторски простор и векторски потпростор.

   б) Навести *Грасманову формулу*.

   в) Дефинисати скаларни производ.

   г) Ако је језгро линеарног оператора $L : V \to V$ тривијално, тада је L инјекција. Доказати.

   д) Ако су ненула вектори $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ортогонални, они су и линеарно независни. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -14 \\ 16 & 7 & -28 \\ 8 & 4 & -15 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^\perp$.

4. [5] Одредити једначине симетрала углова између правих $p : x = 3$ и $q : 2x - y = 5$.

5. [5] Дате су тачка $L(2, 0, 2)$ као и праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ и $q : \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{0}$.

   а) Одредити међусобни положај правих p и q.

   б) Одредити праву која садржи тачку L и сече праве p и q.

6. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ линеарно пресликавање. Ако је k природан број за који је $ImL^k = ImL^{k+1}$, тада је $ImL^{k+1} = ImL^{k+2}$. Доказати. Навести пример пресликавања L и природног броја k за $n = 2$.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2 2020.

1. [5]

   а) Дефинисати векторски простор и векторски потпростор.

   б) Навести *Грасманову формулу*.

   в) Дефинисати скаларни производ.

   г) Ако је језгро линеарног оператора $L : V \to V$ тривијално, тада је L инјекција. Доказати.

   д) Ако су ненула вектори $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ортогонални, они су и линеарно независни. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -14 \\ 16 & 7 & -28 \\ 8 & 4 & -15 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^\perp$.

4. [5] Одредити једначине симетрала углова између правих $p : x = 3$ и $q : 2x - y = 5$.

5. [5] Дате су тачка $L(2, 0, 2)$ као и праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ и $q : \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{0}$.

   а) Одредити међусобни положај правих p и q.

   б) Одредити праву која садржи тачку L и сече праве p и q.

6. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ линеарно пресликавање. Ако је k природан број за који је $ImL^k = ImL^{k+1}$, тада је $ImL^{k+1} = ImL^{k+2}$. Доказати. Навести пример пресликавања L и природног броја k за $n = 2$.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2020.

1. [5]
   1.1 Дефинисати Декартов производ два скупа.
   1.1 Дефинисати детерминанту.
   1.2 Дефинисати сопствени вектор линеарног оператора $L : V \to V$.
   1.3 Дефинисати скаларни производ.
   1.4 Дефинисати инверз матрице. Извести формулу за инвер произвољне квадратне матрице реда 2.
   1.5 Сличне матрице имају исти карактеристични полином. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Дат је унитарни потпростор матрица $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ решења једначине $x + y + z - 2t = 0$, са скаларним производом $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ax + by + cz + dt$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ на простор W, растојање вектора v од векторског простора W, као и угао између v и W.

4. [5] Одредити једначину тангенте на круг $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ у тачки $(3, 2)$.

5. [5] Одредити растоање између паралелних равни $x + 2y - z + 3 = 0$ и $-x - 2y + z - 15 = 0$.

6. [5] Ако су A и B квадратне матрице реда $n \in \mathbb{N}$ такве да је $AB = 0$, доказати да је $\rho(A) + \rho(B) \le n$. Доказати да за дату квадратну матрицу A реда n и ранга мањег од n, постоји матрица B таква да је $AB = 0$ и $\rho(A) + \rho(B) = n$.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2020.

1. [5]
   1.1 Дефинисати Декартов производ два скупа.
   1.1 Дефинисати детерминанту.
   1.2 Дефинисати сопствени вектор линеарног оператора $L : V \to V$.
   1.3 Дефинисати скаларни производ.
   1.4 Дефинисати инверз матрице. Извести формулу за инвер произвољне квадратне матрице реда 2.
   1.5 Сличне матрице имају исти карактеристични полином. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Дат је унитарни потпростор матрица $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ решења једначине $x + y + z - 2t = 0$, са скаларним производом $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ax + by + cz + dt$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ на простор W, растојање вектора v од векторског простора W, као и угао између v и W.

4. [5] Одредити једначину тангенте на круг $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ у тачки $(3, 2)$.

5. [5] Одредити растоање између паралелних равни $x + 2y - z + 3 = 0$ и $-x - 2y + z - 15 = 0$.

6. [5] Ако су A и B квадратне матрице реда $n \in \mathbb{N}$ такве да је $AB = 0$, доказати да је $\rho(A) + \rho(B) \le n$. Доказати да за дату квадратну матрицу A реда n и ранга мањег од n, постоји матрица B таква да је $AB = 0$ и $\rho(A) + \rho(B) = n$.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2 2020.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.3)
   1.1 Траг матрице.
   1.2 Сопствена вредност линеарног оператора $L : V \to V$.
   1.3 Скаларни производ векторског простора.
   1.4 Линеарни омотач скупа вектора $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ векторског простора V је векторски потпростор од V. Доказати.
   1.5 Сличне матрице имају исти карактеристични полином. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 14 & 15 & -15 \\ -5 & -6 & 5 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $2x - y + 3z = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (5, -3, 5, 10)$ на простор W, растојање вектора v од векторског простора W, као и угао између v и W.

4. [5] Одредити једначину праве која је паралелна равни $2x - y - 3z + 2019 = 0$, садржи тачку $(1, 1, 1)$ и сече праву $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{-3}$.

5. [5] Одредити формуле рефлексије у односу на праву $l : x + 3y - 5 = 0$, као и слику кружнице $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

6. [5] Ако је $KerL^2 = KerL$, тада је $KerL \cap ImL = \{0\}$. Доказати.

Време за рад је 180 минута.
СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2 2020.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.3)
   1.1 Траг матрице.
   1.2 Сопствена вредност линеарног оператора $L : V \to V$.
   1.3 Скаларни производ векторског простора.
   1.4 Линеарни омотач скупа вектора $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ векторског простора V је векторски потпростор од V. Доказати.
   1.5 Сличне матрице имају исти карактеристични полином. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 14 & 15 & -15 \\ -5 & -6 & 5 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $2x - y + 3z = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (5, -3, 5, 10)$ на простор W, растојање вектора v од векторског простора W, као и угао између v и W.

4. [5] Одредити једначину праве која је паралелна равни $2x - y - 3z + 2019 = 0$, садржи тачку $(1, 1, 1)$ и сече праву $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{-3}$.

5. [5] Одредити формуле рефлексије у односу на праву $l : x + 3y - 5 = 0$, као и слику кружнице $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

6. [5] Ако је $KerL^2 = KerL$, тада је $KerL \cap ImL = \{0\}$. Доказати.

Време за рад је 180 минута.
СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2020.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.3)

   1.1 Детерминанта.

   1.2 Сопствени вектор линеарног оператора $L : V \to V$.

   1.3 Ортогонална матрица.

   1.4 Нека су u и v вектори векторског простора V у ком је дефинисан скаларни производ $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$. Извести (и доказати) формулу за дужину ортогоналне пројекције вектора v на вектор u.

   1.5 Ако су вектори $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ненула ортогонални, они су и линеарно независни. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 7 & -6 \\ -2 & 8 & -7 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (-1, 1, 1, -1)$, $f_2 = (3, -1, -1, 3)$ и $f_3 = (-5, -1, 1, -7)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.

4. [5] Одредити једначину праве l која садржи тачку $L(0, -1, -4)$ и сече праву $p : x + y + z - 3 = 0, 2y - z - 14 = 0$ под правим углом.

5. [5] Одредити формуле хомотетије са коефицијентом -3 у односу на тачку $S(1, -2)$, као и слику кружнице $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

6. [5] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ инверзибилна матрица реда n. Доказати да је $\det(adjA) = (\det A)^{n-1}$.

Време за рад је 180 минута.
СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2020.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.3)

   1.1 Детерминанта.

   1.2 Сопствени вектор линеарног оператора $L : V \to V$.

   1.3 Ортогонална матрица.

   1.4 Нека су u и v вектори векторског простора V у ком је дефинисан скаларни производ $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$. Извести (и доказати) формулу за дужину ортогоналне пројекције вектора v на вектор u.

   1.5 Ако су вектори $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ортогонални, они су и линеарно независни. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 7 & -6 \\ -2 & 8 & -7 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (-1, 1, 1, -1)$, $f_2 = (3, -1, -1, 3)$ и $f_3 = (-5, -1, 1, -7)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.

4. [5] Одредити једначину праве l која садржи тачку $L(0, -1, -4)$ и сече праву $p : x + y + z - 3 = 0, 2y - z - 14 = 0$ под правим углом.

5. [5] Одредити формуле хомотетије са коефицијентом -3 у односу на тачку $S(1, -2)$, као и слику кружнице $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

6. [5] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ инверзибилна матрица реда n. Доказати да је $\det(adjA) = (\det A)^{n-1}$.

Време за рад је 180 минута.
СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.4)

   а) База векторског простора.

   б) Изоморфизам векторских простора.

   в) Ранг линеарног пресликавања.

   г) Директна сума векторских потпростора векторског простора V.

   д) Доказати да је сума $U + W$ директна ако и само ако је $U \cap W = \{0\}$.

2. ([5]) У зависности од реалног параметра λ решити систем:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 5y & + & z & + & 3t & = & 2 \\ 4x & + & 6y & + & 3z & + & 5t & = & 4 \\ 4x & + & 14y & + & z & + & 7t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 3z & + & \lambda t & = & 7. \end{array}$$

3. [5] Нека су $U = \{p \in \mathbb{R}^3[x] | p(0) + p(1) = 0\}$ и $W = \{p \in \mathbb{R}^3[x] | p(1) + p'(1) = 0\}$, где је $\mathbb{R}^3[x]$ - векторски простор свих полинома степена 2 и мањег.

   а) Доказати да су U и W векторски потрпостори од $\mathbb{R}^3[x]$.

   б) Одредити бар по једну базу, као и димензију простора U и W.

   в) Испитати да ли је $\mathbb{R}^3[x] = U + W$. Да ли је сума директна.

4. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са $L(x, y, z, t) = (x - y + z - t, 2x - y - z + 2t, 3x - z - t)$.
   Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике пресликавања L.

5. [5] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha + 1 & -1 \\ 0 & \alpha & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & \alpha - 1 \\ 2019 & 12 & 14 & 2020 \end{bmatrix}$.

   а) Израчунати $\det A$.

   б) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра α.

   в) За које α матрица A има инверз?

6. [5] Нека су U и W разни четвородимензиони потпростори векторског простора V димензије 5. Одредити димензију за $U + W$ и $U \cap W$. Образложити и навести пример у $\mathbb{R}^5$.

Време за рад је 180 минута.
СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.3)
   а) Инјекција или '1-1' пресликавање.
   б) Векторски простор и векторски потпростор.
   в) Линеарна независност скупа вектора $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ над пољем $\mathbb{R}$.
   г) Навести *Грасманову формулу.*
   д) Ако је језгро линеарног оператора $L : V \to V$ тривијално, тада је L инјекција. Доказати.

2. [5] Нека је $U = \mathfrak{L}(e_1, e_2, e_3)$, где је:

$$\begin{array}{rcrrrr} e_1 & = & (1, & 1, & 1, & 1) \\ e_2 & = & (-1, & 2, & 0, & 5) \\ e_3 & = & (4, & 1, & 3, & -2) \end{array}$$

и нека је W скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & z & + & 5t & = & 0 \\ x & + & 2y & & & + & 3t & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & z & + & 8t & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & + & 7t & = & 0. \end{array}$$

Одредити неку базу и дименизију простора $U, W, U + W$ и $U \cap W$.

3. [5] Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ и нека је U скуп свих матрица X за које важи $AX = XA^T$
   а) Доказати да је U један векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$.
   б) Одредити бар једну базу и димензију простора U.
   в) Нека је $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & q \end{bmatrix} \mid \quad p, q \in \mathbb{R} \right\}$. Испитати да ли је $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

4. [5] Нека је дато пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
   $L(x, y, z) = (x + 2y + 8z, x + 3y + 7z, 2x + 4y + 15z)$.
   а) Доказати да је пресликавање L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике оператора L.
   в) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. [5] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & \alpha + 1 & 2 & \alpha - 5 \\ 1 & -42 & 0 & \alpha^2 + 4 \end{bmatrix}$.
   а) Израчунати $\det A$.
   б) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра α.
   в) За које α матрица A има инверз?

6. [5] Нека су вектори u, v и w линеарно независни вектори векторског простора V. Испитати да ли су $u + 2v + 3w, 2u + 3v + 8w, u + 2v + 4w$ линеарно независни.

Време за рад је 180 минута.
СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.7)
   1.1 [0,3] Потпростор векторског простора.
   1.2 [0,3] Траг матрице.
   1.3 [0,5] Норма вектора у еуклидском векторском простору (дат је скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$).
   1.4 [0,3] Инверз матрице.
   1.5 [0,5] Сопствена вредност линеарног оператора $L : V \longrightarrow V$.
   1.6 [0,3] Ортогоналност вектора.
   1.7 [0,4] Ранг линеарног оператора $L : V \longrightarrow V$.
   1.8 [0,7] Формулисати *Грам–Шмитову теорему о ортогонализацији*.
   1.9 [0,7] Формулисати *Кејли–Хамилтонову теорему*.
   1.10 [1,0] Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{R}$, $A : V \longrightarrow V$ линеарни оператор, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $U = \{x \in V |\ Ax = \lambda x\}$ подскуп скупа V. Доказати да је U потпростор векторског простора V.

2. [4] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x+3y-2z+4t &= 1\\ 2x+7y-5z+7t &= 0\\ 3x+10y-6z+8t &= 3\\ x+6y-7z+8t &= -1 \end{aligned}$$

3. [4] Нека су U и V потпростори векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ такви да је

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{bmatrix},\ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Одредити бар по једну базу и димензију за U, V, $U + V$, $U \cap V$. Да ли је $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$?

4. [4] Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \\ 6 & -13 & -7 \end{bmatrix}.$$

Одредити карактеристични и минимални полином матрице A. Ако постоје, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [4] Нека је $U \leq \mathbb{R}^4$ скуп свих решења система једначина

$$\begin{aligned} 2x+3y-z-t &= 0\\ x-2y-z+2t &= 0. \end{aligned}$$

Наћи базу за $U^{\perp}$.

6. а) [2] У координатном систему Oxy одредити растојање тачке $A(3, 5)$ од праве $p : 2y - x + 4 = 0$, као и нормалу из тачке A на правој p.
   б) [2] У координатном систему $Oxyz$ одредити једначину равни γ која садржи тачку $T(1, 1, 1)$ и ортогонална је на равнима $\alpha : 2x + 3y - 4z + 1 = 0$ и $\beta : x - y + z = 0$.

7. [5] Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ матрице, при чему је бар једна од њих инвертибилна. Доказати да матрице AB и BA имају исти карактеристични полином.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, ток 1и2
јун 1 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.8)
   1.1 [0,3] Ортогоналност два не-нула вектора u и v унитарног простора V.
   1.2 [0,3] Јединични вектор.
   1.3 [0,5] Линеарни омотач скупа $S \subseteq V$, где је V векторски простор.
   1.4 [0,4] Слику линеарног оператора $A : V \longrightarrow W$.
   1.5 [0,6] Сопствени потпростор линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$.
   1.6 [0,3] Директну суму U и W, $U, W \leq V$, где је V векторски простор.
   1.7 [0,4] Сличност матрица A и B.
   1.8 [0,5] Стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^n$.
   1.9 [0,7] Формулисати *Кејли–Хамилтонову теорему*.
   1.10 [1,0] Нека су A и B сличне матрице и $\phi_A(\lambda)$, $\phi_B(\lambda)$ њихови карактеристични полиноми. Доказати да је
   $$\phi_A(\lambda) = \phi_B(\lambda).$$
2. [4] Решити систем једначина:
$$\begin{aligned} x+\ 2y+\ 3z+\ 4t &= 0\\ 7x+14y+20z+27t &= 0\\ 5x+10y+16z+19t &= -2\\ 3x+\ 5y+\ 6z+13t &= 5. \end{aligned}$$
3. [4] Одредити бар једну базу језгра и слике линеарног оператора $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ задатог са
$$L(a, b, c) = (3a - b + 2c, -a - b + c, 2a - 2b + 3c, a - 3b + 4c).$$
4. [4] Нека је дата матрица
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & -8 & 8 \\ 2 & -9 & 11 \end{bmatrix}.$$
   Одредити карактеристични и минимални полином матрице A као и $\det(A)$. Ако постоје, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$.
5. [4] Доказати да је са $u \circ v = u_1v_1 + 5u_2v_2 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1$, где је $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$, дефинисан један скаларни производ на $\mathbb{R}^2$.
6. а) [2] У координатном систему Oxy одредити једначину праве p која садржи тачку $A(1, 2019)$ а са правом $q : x + y + 4 = 0$ заклапа угао $\frac{\pi}{4}$.
   б) [2] У координатном систему $Oxyz$ одредити једначину равни π која садржи праву $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} \frac{z-3}{3}$ и паралелна је са правом t која се налази у пресеку равни $\alpha : x + y + z = 5$ и $\beta : 3x - 2y - z = 0$.
7. [5] Оператор $A : V \to V$ је нилпотентан уколико постоји $n \in \mathbb{N}$ такав да је $A^n = 0$. Ако су A и B нилпотентни оператори такви да је $AB = BA$ показати:
   а) [2] Оператор AB је нилпотентан.
   б) [3] Оператор $A + B$ је нилпотентан.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.7)

   1.1 [0,3] Угао између два не-нула вектора u и v унитарног простора V.

   1.2 [0,3] Суму $U+V$, где су U и V потпростори векторског простора W.

   1.3 [0,5] Минимални полином матрице $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

   1.4 [0,3] Дефект линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$.

   1.5 [0,5] Сопствени вектор линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$.

   1.6 [0,3] Ортогонални комплемент потпростора L унитарног простора V.

   1.7 [0,4] Билинеарни функционал(или форма) над $\mathbb{C}$.

   1.8 [0,7] Навести неједнакост *Коши–Шварц–Буњаковског*.

   1.9 [0,7] Формулисати *Бине–Кошијеву теорему*.

   1.10 [1,0] Нека су A и B сличне матрице, доказати да је $\det(A) = \det(B)$.

2. [4] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x+\ 2y-\ 1z-\ 5t &= -3 \\ 1x+\ 3y-\ 4z-\ t &= -1 \\ -5x-13y+15z+11t &= 19 \\ 4x+12y-14z-\ 8t &= 6. \end{aligned}$$

3. [4] Дате су базе $f = [(1,0,1),(2,1,2),(-1,-1,-2)]$ и $e = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ простора $\mathbb{R}^3$. Одредити матрицу преласка P са базе e на базу f као и координате вектора v у бази f уколико су $[v]_e = (1,1,1)$ његове координате у бази e.

4. [4] Нека је дата матрица
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$
Одредити карактеристични и минимални полином матрице A. Ако постоје, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [4] Нека је $U = \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3)$ потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и $f_1 = (1,0,1,-1)$, $f_2 = (\frac{4}{3}, 2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $f_3 = (1,0,0,1)$. Одредити бар једну ортонормирану базу простора U.

6. а) [2] У координатном систему Oxy одредити једначину праве q која садржи тачку $A(1,1)$ и која је ортогонална на праву $p : 2x - 3y + 4 = 0$.

   б) [2] У координатном систему Oxy одредити једначину параболе $\mathcal{P}$ чија је жижа $F(2,2)$, а директриса права $d : x + y - 1 = 0$.

7. [5] Дат је линеарни оператор $A : V \to V$.

   а) [3] Нека су v_1 и v_2 сопствени вектори који редом одговарају сопственим вредностима $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператора A. Доказати да $v_1 + v_2$ није сопствени вектор оператора A.

   а) [2] Нека су $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(\dim A \geq k \geq 2)$ међусобно различите сопствене вредности оператора A, а $v_1, \ldots, v_n$ одговарајући сопствени вектори. Доказати да вектор $v = v_1 + \cdots + v_k$ није сопствени вектор оператора A.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.7)

   1.1 [0,3] Потпростор векторског простора.

   1.2 [0,3] Моничан полином.

   1.3 [0,5] Пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   1.4 [0,3] Генератриса векторског простора.

   1.5 [0,5] Сопствена вредност линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$.

   1.6 [0,3] Скаларни производ на векторском простору V над пољем $\mathbb{R}$.

   1.7 [0,4] Карактеристични полином матрице $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

   1.8 [0,7] Формулисати *Грам–Шмитову теорему о ортогонализацији*.

   1.9 [0,7] Формулисати *Кејли–Хамилтонову теорему*.

   1.10 [1,0] Нека су u, v међусобно ортогонални вектори. Доказати да је $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2$ (Питагорина теорема).

2. [4] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x+3y-2z+\ t &= -3 \\ -2x-5y+\ z-\ t &= 6 \\ -x-2y+\ z-4t &= -15 \\ x+3y-\ z-\ t &= -2. \end{aligned}$$

3. [4] Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4[X] = \{a+bx+cx^2+dx^3 | \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ такви да је $U = \mathcal{L}(u_1, u_2)$ и $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, где је $u_1 = x + 1$, $u_2 = x^3 - x$, $v_1 = 2$, $v_2 = x^3 - x^2$ и $v_3 = x^2 + x^3$. Одредити бар по једну базу и димензију за U, V, $U + V$, $U \cap V$.

4. [4] Нека је дата матрица
$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \\ -16 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$
Одредити карактеристични и минимални полином матрице A. Ако постоје, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [4] Дати су вектори $v_1 = (3, 4, 0)$, $v_2 = (3, 4, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$. Одредити растојање вектора v_3 до потпростора $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$, као и угао $\theta = \measuredangle(v_3, V)$.

6. а) [2] У координатном систему Oxy одредити координате тачке B која је симетрична тачки $A(-1, 2)$ у односу на праву $p : x - y + 1 = 0$.

   б) [2] У координатном систему $Oxyz$ одредити једначину праве l која садржи тачку $A(3, 0, 0)$, паралелна је равни $\alpha : x - y + 1 = 0$ и сече праву $p : \frac{x-6}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-1}{1}$.

7. [5] Нека је $A : V \longrightarrow V$ линеарни оператор и нека је $U \leq V$ потпростор векторског простора V.

   а) Ако је $A(U) = U$ и $\dim U = 1$, доказати да је U сопствени потпростор оператора A.

   б) Ако је $B : V \longrightarrow V$ линеарни оператор такав да је $AB = BA$ и ако је $U \leq V$ сопствени потпростор оператора A, доказати да је $B(U) = U$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2018.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.7)

   1.1 [0,3] Декартов производ два скупа.

   1.2 [0,3] Сурјекција или 'на' пресликавање.

   1.3 [0,5] Димензија векторског простора.

   1.4 [0,3] Линеарна независност скупа вектора $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ над пољем $\mathbb{C}$.

   1.5 [0,5] Линеарни функционал.

   1.6 [0,3] Језгро линеарног оператора.

   1.7 [0,4] Ранг матрице $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

   1.8 [0,7] Навести формулу за растојање мимоилазних правих у $\mathbb{R}^3$.

   1.9 [0,7] Навести *Грасманову формулу*.

   1.10 [1,0] Доказати да је сума $U + V$ директна ако и само ако је $U \cap V = \{0\}$.

2. [5] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x-2y+2z-\ t &=5\\ 3x-5y+\ z+4t &=6\\ 2x-3y-2z+2t &=7\\ x-3y+9z-2t &=2 \end{aligned}$$

3. [5] Нека је $V = \{p(x) \in \mathbb{R}^4[X] |\ p(0) = p(1),\ p(-1) + p(1) = 0\}$.

   а) Доказати да је V векторски потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$.

   б) Одредити $\dim V$.

   в) Нека је $W = \mathcal{L}(-x^2 + x + 1, x)$. Испитати да ли је $\mathbb{R}^4[X] = V \oplus W$.

4. [5] Нека су дати вектори $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 0)$.

   а) Доказати да је $[u_1, u_2, u_3]$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Одредити координате вектора $v = (1, -1, 2)$ у бази $[u_1, u_2, u_3]$.

   в) Нека је $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ матрица линеарног пресликавања $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ у односу на базе $[u_1, u_2, u_3]$ и $[e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)]$ простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$. Одредити слику вектора v из дела под б) при пресликавању L.

   г) Одредити ранг пресликавања L из дела под в).

5. [5] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 10 & 0\\ -2 & 6 & 14 & -5 \end{bmatrix}$.

   а) Одредити A^T и A^{-1}.

   б) Израчунати $\det A$.

   в) Одредити ранг матрице A.

6. [5] Нека је $A : V \longrightarrow V$ линеарни оператор такав да је $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$.

   а) Доказати да је $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2$.

   б) Доказати да је $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2018.

1. [5] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x+\ y+2z-\ 6t &= 10 \\ 2x+3y+8z-16t &= 27 \\ 3x+2y+8z-16t &= 26 \\ x+2y+4z-10t &= 17 \end{aligned}$$

2. [5] Нека је $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3a-b \\ 2a & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   а) Доказати да је V векторски потпростор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

   б) Нека су $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3a \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ и $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$. Доказати да су U и W векторски потпростори простора V. Одредити $\dim U$ и $\dim W$.

   в) Да ли је $V = U \oplus W$? Одговор образложити.

3. [5] Нека је $e = [(1,-1,2,3,-3),(2,-3,4,-4,-5),(-1,-2,4,9,4)]$ база векторског потпростора $U \leq \mathbb{R}^5$ и $f = [(1,2,-3,-1,-2),(-1,-1,3,11,1)]$ база векторског потпростора $V \leq \mathbb{R}^5$. Наћи бар једну базу за $U+V$ и бар једну базу за $U \cap V$.

4. [5] Нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ задато са $L(x,y,z) = (x-2y-4z, x-3y-6z, 3y+7z)$.

   а) Доказати да је L линеарни оператор.

   б) Одредити матрицу оператора L у канонској бази простора $\mathbb{R}^3$.

   в) Да ли је оператор L инвертибилан? Уколико јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у канонској бази простора $\mathbb{R}^3$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2018.

1. [5] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x+\ y-3z+\ t-\ u &= \ 2\\ 2x-3y+\ z-\ t+2u &= -3\\ 3x-\ y-\ z+3t-\ u &= \ 4\\ -x+5y-2z-\ t-2u &= \ 1 \end{aligned}$$

2. [5] Одредити ранг матрице A, израчунати $\det A$ и наћи A^{-1} ако постоји, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -2\\ 2 & -1 & 4 & 3\\ 4 & -3 & -2 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. [5] Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$, где је $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (3,0,1)$ и $e_3 = (-1,1,0)$.
   (а) [2] Одредити матрицу преласка P са базе e на канонску базу $f = [f_1, f_2, f_3]$, $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$, $f_3 = (0,0,1)$.
   (б) [3] Нека је $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор чија је матрица у бази e једнака

$$[L]_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Одредити матрицу $[L]_f$ оператора L у канонској бази f.

4. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице A, а затим одредити, ако постоје, инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$ и наћи A^{2018}, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $U \leq \mathbb{R}^4$ потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $f_1 = (1,-1,-3,-5)$, $f_2 = (8,0,-10,-14)$, $f_3 = (-4,6,8,10)$. Одредити бар једну ортонормирану базу потпростора U.

6. [5] Одредити једначине равни које садрже x-осу и заклапају угао $\frac{\pi}{4}$ с равни Oxy.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јун 2018.

1. [4] Решити систем једначина матричним методом:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

2. [6] Нека је дат векторски простор $M_2(\mathbb{R})$ свих квадратних матрица реда 2 над пољем $\mathbb{R}$ и његови подскупови $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0,\ A = A^T\}$ и $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.
   (а) [2] Доказати да су подскупови U и V векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.
   (б) [4] Одредити барем по једну базу и димензије за U, V, $U+V$, $U \cap V$. Да ли је сума $U+V$ директна?

3. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3[X]$ линеарни оператор на простору полинома с реалним коефицијентима степена мањег од 3, који је дат са $L(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 + a_0x + a_1x^2$. Одредити матрицу оператора L у бази $e = [1, x, x^2]$, затим одредити $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, $\delta(L)$ и $\rho(L)$. Да ли је L инвертибилан? Ако јесте, наћи L^{-1}.

4. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице A, а затим одредити, ако постоје, инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$ и наћи A^{2018}, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ полинома с реалним коефицијентима степена мањег од 3, који је дат са $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) + p''(2)q''(2)$ и нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[X] \mid p(0) + p'(1) + p''(2) = 0\}$. Одредити $U^{\perp}$.

6. [5] Одредити једначину равни која садржи праву $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{1}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x + y - z + 14 = 0$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јун 2018.

1. [4] Решити систем једначина матричним методом:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

2. [6] Нека је дат векторски простор $M_2(\mathbb{R})$ свих квадратних матрица реда 2 над пољем $\mathbb{R}$ и његови подскупови $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0,\ A = A^T\}$ и $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.
   (а) [2] Доказати да су подскупови U и V векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.
   (б) [4] Одредити барем по једну базу и димензије за U, V, $U+V$, $U \cap V$. Да ли је сума $U+V$ директна?

3. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3[X]$ линеарни оператор на простору полинома с реалним коефицијентима степена мањег од 3, који је дат са $L(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 + a_0x + a_1x^2$. Одредити матрицу оператора L у бази $e = [1, x, x^2]$, затим одредити $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, $\delta(L)$ и $\rho(L)$. Да ли је L инвертибилан? Ако јесте, наћи L^{-1}.

4. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице A, а затим одредити, ако постоје, инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$ и наћи A^{2018}, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ полинома с реалним коефицијентима степена мањег од 3, који је дат са $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) + p''(2)q''(2)$ и нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[X] \mid p(0) + p'(1) + p''(2) = 0\}$. Одредити $U^{\perp}$.

6. [5] Одредити једначину равни која садржи праву $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{1}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x + y - z + 14 = 0$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
фебруар 2018.

1. [5] Крамеровим методом решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -y+3z+\ t &= 6 \\ -3y+2z+4t &= 7 \\ -2y-\ z+3t &= 1 \end{aligned}$$

2. [5] Нека је $V = \mathbb{R}^4[X]$ векторски простор полинома с коефицијентима у $\mathbb{R}$ степена мањег од 4. Нека је $U \leq V$ потпростор генерисан полиномима $p_1(x) = 1 - x + 3x^2 - x^3$, $p_2(x) = 3 + 2x + 5x^2$ и $p_3(x) = -2 - 8x + 2x^2 - 4x^3$ и нека је $W \leq V$ потпростор генерисан полиномима $q_1(x) = -1 - 2x + 5x^2 + x^3$, $q_2(x) = 5 + 3x + 3x^2 - 2x^3$ и $q_3(x) = 7 + 7x - 7x^2 - 4x^3$. Одредити барем по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

3. [4] Нека је $L : V \to W$ линеарно пресликавање и нека су вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ такви да су вектори $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_k) \in W$ линеарно независни. Доказати да су онда и вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линеарно независни вектори.

4. [5] Одредити да ли је матрица A дијагоналног типа, наћи њен карактеристични и минимални полином и, ако је дијагоналног типа, дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P такве да је $D = P^{-1}AP$, ако је

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $V = \mathbb{R}^4$ векторски простор са стандардним скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нека су дати вектори $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (2, 4, 0, 5), v_3 = (4, 8, 6, -2)$. Наћи векторе u_1, u_2, u_3 такве да је $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ и да су вектори u_1, u_2, u_3 јединични и међусобно ортогонални.

6. (а) [3] Одредити једначине правих које су нормалне на правој $p : 4x - 3y - 3 = 0$ и налазе се на растојању 4 од тачке $A(1, 2)$.
   (б) [3] Одредити једначину параболе чија је оса права $x - 2y + 1 = 0$, чије је теме тачка $T(1, 1)$ и чија је жижа тачка $F(3, 2)$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
фебруар 2018.

1. [5] Крамеровим методом решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -y+3z+\ t &= 6 \\ -3y+2z+4t &= 7 \\ -2y-\ z+3t &= 1 \end{aligned}$$

2. [5] Нека је $V = \mathbb{R}^4[X]$ векторски простор полинома с коефицијентима у $\mathbb{R}$ степена мањег од 4. Нека је $U \leq V$ потпростор генерисан полиномима $p_1(x) = 1 - x + 3x^2 - x^3$, $p_2(x) = 3 + 2x + 5x^2$ и $p_3(x) = -2 - 8x + 2x^2 - 4x^3$ и нека је $W \leq V$ потпростор генерисан полиномима $q_1(x) = -1 - 2x + 5x^2 + x^3$, $q_2(x) = 5 + 3x + 3x^2 - 2x^3$ и $q_3(x) = 7 + 7x - 7x^2 - 4x^3$. Одредити барем по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

3. [4] Нека је $L : V \to W$ линеарно пресликавање и нека су вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ такви да су вектори $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_k) \in W$ линеарно независни. Доказати да су онда и вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линеарно независни вектори.

4. [5] Одредити да ли је матрица A дијагоналног типа, наћи њен карактеристични и минимални полином и, ако је дијагоналног типа, дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P такве да је $D = P^{-1}AP$, ако је

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $V = \mathbb{R}^4$ векторски простор са стандардним скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нека су дати вектори $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (2, 4, 0, 5), v_3 = (4, 8, 6, -2)$. Наћи векторе u_1, u_2, u_3 такве да је $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ и да су вектори u_1, u_2, u_3 јединични и међусобно ортогонални.

6. (а) [3] Одредити једначине правих које су нормалне на правој $p : 4x - 3y - 3 = 0$ и налазе се на растојању 4 од тачке $A(1, 2)$.
   (б) [3] Одредити једначину параболе чија је оса права $x - 2y + 1 = 0$, чије је теме тачка $T(1, 1)$ и чија је жижа тачка $F(3, 2)$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2018.

1. [4] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x- y+3z-2w+ t &=5\\ x+3y+5z+6w-3t &=7\\ 2x+4y - w+5t &=4\\ 3x+ y+4z-5w &=8 \end{aligned}$$

2. [5] Нека су U и W потпростори векторског простора R^4 такви да је $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$ и $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$, где је $u_1 = (2, 5, 3, 1)$, $u_2 = (3, 9, 5, 1)$, $u_3 = (2, 2, 2, 2)$ и $w_1 = (3, 1, 1, 0)$, $w_2 = (2, 0, 2, 1)$, $w_3 = (4, 2, 0, 1)$. Наћи бар једну базу и димензије простора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

3. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $L(a, b, c, d) = (a+b-c+4d, -a+b-c-3d, 2a-4b+c, b+2c-3d)$ линеарни оператор. Пронаћи матрицу пресликавања L у бази $E = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ простора $\mathbb{R}^4$. Одредити ранг и дефект пресликавања L и бар једну базу за $\operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Im} L$.

4. [5] Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и, ако јесте, пронаћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $A = PDP^{-1}$ и одредити A^n, где је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $V = \mathbb{R}^4[X]$ векторски простор полинома степена мањег од 4 и нека је скаларни производ дат са $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) + p'''(0) + q'''(0)$. Ако је $U \leq V$ потпростор генерисан полиномима $p(x) = x^3$, $q(x) = x^2$ и $r(x) = x - 1$, одредити бар једну ортонормирану базу тог потпростора.

6. [6]

   (а) [3] Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P = (3, 2, 4)$ у односу на раван $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α.

   (б) [3] Одредити једначине тангенти из тачке $A(3, 4)$ на криву $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2018.

1. [4] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x- y+3z-2w+ t &=5\\ x+3y+5z+6w-3t &=7\\ 2x+4y - w+5t &=4\\ 3x+ y+4z-5w &=8 \end{aligned}$$

2. [5] Нека су U и W потпростори векторског простора R^4 такви да је $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$ и $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$, где је $u_1 = (2, 5, 3, 1)$, $u_2 = (3, 9, 5, 1)$, $u_3 = (2, 2, 2, 2)$ и $w_1 = (3, 1, 1, 0)$, $w_2 = (2, 0, 2, 1)$, $w_3 = (4, 2, 0, 1)$. Наћи бар једну базу и димензије простора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

3. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $L(a, b, c, d) = (a+b-c+4d, -a+b-c-3d, 2a-4b+c, b+2c-3d)$ линеарни оператор. Пронаћи матрицу пресликавања L у бази $E = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ простора $\mathbb{R}^4$. Одредити ранг и дефект пресликавања L и бар једну базу за $\operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Im} L$.

4. [5] Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и, ако јесте, пронаћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $A = PDP^{-1}$ и одредити A^n, где је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $V = \mathbb{R}^4[X]$ векторски простор полинома степена мањег од 4 и нека је скаларни производ дат са $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) + p'''(0) + q'''(0)$. Ако је $U \leq V$ потпростор генерисан полиномима $p(x) = x^3$, $q(x) = x^2$ и $r(x) = x - 1$, одредити бар једну ортонормирану базу тог потпростора.

6. [6]

   (а) [3] Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P = (3, 2, 4)$ у односу на раван $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α.

   (б) [3] Одредити једначине тангенти из тачке $A(3, 4)$ на криву $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
поправни колоквијум 2018.

1. [6] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x+3y-\ z+\ t-5w &= 4\\ 4x-4y+6z-2t+2w &= 8\\ 3x+3y+3z+3t-3w &= 12\\ -5x+2y-3z+3t+6w &= 5 \end{aligned}$$

2. [4] Наћи ранг матрице

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 & 8\\ 3 & -1 & -4 & 3 & 4\\ 2 & -3 & -1 & 7 & 11\\ -2 & 1 & 5 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. [6] Нека је $V=\mathbb{R}^4[X]$ векторски простор свих полонома с коефицијентима у $\mathbb{R}$ степена мањег од 4 и нека је $U=\{p\in\mathbb{R}^4[X] \mid p(0)=p(1)\}$ његов подскуп.

   (а) [2] Доказати да је U векторски потпростор простора V.

   (б) [2] Наћи бар једну базу потпростора U и одредити његову димензију.

   (в) [2] Ако је $W=\{p\in\mathbb{R}^4[X] \mid p(0)=p'(0)=p''(0)=0\}$, одредити да ли је $V=U\oplus W$.

4. [8] Нека је $L:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$, $L(a,b,c,d)=(a+2b+7c+4d,-2a-3c-3d,2a+b+5c+3d,-a-c)$. Доказати да је L линеарни оператор. Затим пронаћи матрицу пресликавања L у бази $E=\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$ простора $\mathbb{R}^4$ и одредити њен инверз, уколико постоји.

5. [6] Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^5$ такви да је $U=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ и $V=\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$, где је $u_1=(1,3,-1,2,4)$, $u_2=(2,5,-1,4,5)$, $u_3=(1,2,1,5,3)$, $u_4=(-1,1,-4,-5,6)$ и $v_1=(-1,0,0,2,1)$, $v_2=(2,4,-1,3,8)$, $v_3=(5,4,-1.-3.5)$. Одредити димензије потпростора U, V, $U+V$ и $U\cap V$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
поправни колоквијум 2018.

1. [6] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x+3y-\ z+\ t-5w &= 4\\ 4x-4y+6z-2t+2w &= 8\\ 3x+3y+3z+3t-3w &= 12\\ -5x+2y-3z+3t+6w &= 5 \end{aligned}$$

2. [4] Наћи ранг матрице

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 & 8\\ 3 & -1 & -4 & 3 & 4\\ 2 & -3 & -1 & 7 & 11\\ -2 & 1 & 5 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. [6] Нека је $V=\mathbb{R}^4[X]$ векторски простор свих полонома с коефицијентима у $\mathbb{R}$ степена мањег од 4 и нека је $U=\{p\in\mathbb{R}^4[X] \mid p(0)=p(1)\}$ његов подскуп.

   (а) [2] Доказати да је U векторски потпростор простора V.

   (б) [2] Наћи бар једну базу потпростора U и одредити његову димензију.

   (в) [2] Ако је $W=\{p\in\mathbb{R}^4[X] \mid p(0)=p'(0)=p''(0)=0\}$, одредити да ли је $V=U\oplus W$.

4. [8] Нека је $L:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$, $L(a,b,c,d)=(a+2b+7c+4d,-2a-3c-3d,2a+b+5c+3d,-a-c)$. Доказати да је L линеарни оператор. Затим пронаћи матрицу пресликавања L у бази $E=\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$ простора $\mathbb{R}^4$ и одредити њен инверз, уколико постоји.

5. [6] Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^5$ такви да је $U=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ и $V=\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$, где је $u_1=(1,3,-1,2,4)$, $u_2=(2,5,-1,4,5)$, $u_3=(1,2,1,5,3)$, $u_4=(-1,1,-4,-5,6)$ и $v_1=(-1,0,0,2,1)$, $v_2=(2,4,-1,3,8)$, $v_3=(5,4,-1.-3.5)$. Одредити димензије потпростора U, V, $U+V$ и $U\cap V$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

колоквијум 2017.

1. [6] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x+y+3z+5w+9u&=10\\ x+2y+z-w+2u&=6\\ 3x-3y+2z-2w+u&=16\\ -x+y-3z+w&=9 \end{aligned}$$

2. [6] Наћи ранг матрице A, њену детерминанту и њен инверз (уколико постоји), ако је

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&-1&1\\1&3&1&-2\\1&4&-2&4\end{bmatrix}.$$

3. [6] Нека је $V=M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и нека је $U=\left\{\begin{bmatrix}a&b&0\\0&0&a\end{bmatrix}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{R}\right\}$ његов подскуп.

   (а) [2] Доказати да је U векторски потпростор простора V.

   (б) [2] Наћи бар једну базу потпростора U и одредити његову димензију.

   (в) [2] Ако је $W=\left\{\begin{bmatrix}0&0&c\\d&e&f\end{bmatrix}\;\middle|\;c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$, одредити да ли је $V=U\oplus W$.

4. [6] Нека су U и W потпростори векторског простора $V=\mathbb{R}^4$ такви да је $U=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)$ и $W=\mathcal{L}(w_1,w_2,w_3)$, где је $u_1=(1,1,2,-3)$, $u_2=(3,1,0,2)$, $u_3=(-1,1,4,-8)$ и $w_1=(1,-1,-6,5)$, $w_2=(5,1,-2,7)$, $w_3=(2,1,2,1)$. Одредити димензије потпростора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

5. [6] Нека је $L:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ пресликавање дато са $L(a,b,c,d)=(2a+b-d,a+c+2d,-b+3c+4d)$. Доказати да је L линеарно пресликавање и наћи матрицу пресликавања L у пару канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

колоквијум 2017.

1. [6] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x+y+3z+5w+9u&=10\\ x+2y+z-w+2u&=6\\ 3x-3y+2z-2w+u&=16\\ -x+y-3z+w&=9 \end{aligned}$$

2. [6] Наћи ранг матрице A, њену детерминанту и њен инверз (уколико постоји), ако је

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&-1&1\\1&3&1&-2\\1&4&-2&4\end{bmatrix}.$$

3. [6] Нека је $V=M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и нека је $U=\left\{\begin{bmatrix}a&b&0\\0&0&a\end{bmatrix}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{R}\right\}$ његов подскуп.

   (а) [2] Доказати да је U векторски потпростор простора V.

   (б) [2] Наћи бар једну базу потпростора U и одредити његову димензију.

   (в) [2] Ако је $W=\left\{\begin{bmatrix}0&0&c\\d&e&f\end{bmatrix}\;\middle|\;c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$, одредити да ли је $V=U\oplus W$.

4. [6] Нека су U и W потпростори векторског простора $V=\mathbb{R}^4$ такви да је $U=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)$ и $W=\mathcal{L}(w_1,w_2,w_3)$, где је $u_1=(1,1,2,-3)$, $u_2=(3,1,0,2)$, $u_3=(-1,1,4,-8)$ и $w_1=(1,-1,-6,5)$, $w_2=(5,1,-2,7)$, $w_3=(2,1,2,1)$. Одредити димензије потпростора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

5. [6] Нека је $L:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ пресликавање дато са $L(a,b,c,d)=(2a+b-d,a+c+2d,-b+3c+4d)$. Доказати да је L линеарно пресликавање и наћи матрицу пресликавања L у пару канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 03.09.2017.

Други ток

1. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & 4 \\ 8 & -7 & -5 \end{bmatrix}$.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.

2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $x_1 - 2x_4 = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (7,6,6,1)$ на потпросторе W и $W^\perp$. Са којим од простора W и $W^\perp$ вектор v заклапа мањи угао?

3. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1,1,1,1)$, $f_2 = (1,0,1,0)$ и $f_3 = (-1,2,0,1)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V. Затим одредити и базу за $V^\perp$.

4. Одредити једначину равни која садржи праву $p: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+4}{1}$ и нормална је на раван $\alpha: 2x + y - z + 14 = 0$.

5. Свести једначину криве $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 5 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жиже и директрисе.

6. Нека су A и B квадратне матрице реда n такве да је њихов производ AB нула матрица. Доказати да је $rang(A) + rang(B) \leq n$. За матрицу A из првог задатка одредити матрицу B такву да је $AB = 0$ и $rang(A) + rang(B) = n$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 03.09.2017.

Други ток

1. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & 4 \\ 8 & -7 & -5 \end{bmatrix}$.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.

2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $x_1 - 2x_4 = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (7,6,6,1)$ на потпросторе W и $W^\perp$. Са којим од простора W и $W^\perp$ вектор v заклапа мањи угао?

3. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1,1,1,1)$, $f_2 = (1,0,1,0)$ и $f_3 = (-1,2,0,1)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V. Затим одредити и базу за $V^\perp$.

4. Одредити једначину равни која садржи праву $p: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+4}{1}$ и нормална је на раван $\alpha: 2x + y - z + 14 = 0$.

5. Свести једначину криве $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 5 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жиже и директрисе.

6. Нека су A и B квадратне матрице реда n такве да је њихов производ AB нула матрица. Доказати да је $rang(A) + rang(B) \leq n$. За матрицу A из првог задатка одредити матрицу B такву да је $AB = 0$ и $rang(A) + rang(B) = n$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 11.06.2017.

Други ток

1. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.
2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $x - 2y + z - 2t = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^{\perp}$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (5, -2, 1, 0)$ на потпросторе W и $W^{\perp}$. Са којим од простора W и $W^{\perp}$ вектор v заклапа мањи угао?
3. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $f_1 = (1, 0, 1, 1, 1)$, $f_2 = (-1, 2, 3, 3, 7)$ и $f_3 = (1, 2, 8, 6, 9)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.
4. Одредити једначину праве која сече праве $p: \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-6}{2}$ и $q: \dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-8}{1}$ и садржи тачку $A(1, 2, 3)$.
5. Свести једначину криве $2x^2 - xy + 2y^2 - 6 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жиже и директрисе.
6. Нека су A и B матрице такве да је дефинисан производ AB. Доказати да је $rang(AB) \leq \min\{rang(A), rang(B)\}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 11.06.2017.

Други ток

1. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.
2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $x - 2y + z - 2t = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^{\perp}$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (5, -2, 1, 0)$ на потпросторе W и $W^{\perp}$. Са којим од простора W и $W^{\perp}$ вектор v заклапа мањи угао?
3. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $f_1 = (1, 0, 1, 1, 1)$, $f_2 = (-1, 2, 3, 3, 7)$ и $f_3 = (1, 2, 8, 6, 9)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.
4. Одредити једначину праве која сече праве $p: \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-6}{2}$ и $q: \dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-8}{1}$ и садржи тачку $A(1, 2, 3)$.
5. Свести једначину криве $2x^2 - xy + 2y^2 - 6 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жиже и директрисе.
6. Нека су A и B матрице такве да је дефинисан производ AB. Доказати да је $rang(AB) \leq \min\{rang(A), rang(B)\}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 08.02.2017.

Други ток

1. Нека је $L_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ фамилија линеарних оператора дефинисана са $L_\alpha(x,y,z) = (x + \alpha y - z, (\alpha+1)x + 6y - 3z, -x - 2y + (\alpha - 1)z), \alpha \in \mathbb{R}$.
   а) Одредити ранг оператора L_α у зависности од реалног параметра α
   б) Одредити језгро оператора L_α за случај када је ранг оператора једнак 2.
   в) За које α је L_α инвертибилан?
2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $x + y + z + t = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (3, -2, 4, 3)$ на потпросторе W и $W^\perp$. Ком од простора W и $W^\perp$ вектор v ближи?
3. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (5, -3, -1, 1)$, $f_2 = (21, 1, -5, 1)$ и $f_3 = (5, -15, 5, 7)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^\perp$.
4. Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha : x + 2y - z + 3 = 0$.
5. Свести једначину криве $x^2 - xy + y^2 - 3y - 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жижу и директрису.
6. Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора V. Ако је $L \neq 0$ и ако $(\exists k \in \mathbb{N}) L^k = 0$:
   а) Доказати да је $m_L(\lambda) = \lambda^m, m \in \mathbb{N}$ минимални полином оператора L.
   б) Доказати да за такво $m \in \mathbb{N}$ постоји вектор $u \in V$ такав да је $L^{m-1}(u) \neq 0$.
   в) Доказати да је за такво $u \in V$, $v = L^{m-1}(u) \in KerL \cap ImL$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 08.02.2017.

Други ток

1. Нека је $L_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ фамилија линеарних оператора дефинисана са $L_\alpha(x,y,z) = (x + \alpha y - z, (\alpha+1)x + 6y - 3z, -x - 2y + (\alpha - 1)z), \alpha \in \mathbb{R}$.
   а) Одредити ранг оператора L_α у зависности од реалног параметра α
   б) Одредити језгро оператора L_α за случај када је ранг оператора једнак 2.
   в) За које α је L_α инвертибилан?
2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $x + y + z + t = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (3, -2, 4, 3)$ на потпросторе W и $W^\perp$. Ком од простора W и $W^\perp$ вектор v ближи?
3. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (5, -3, -1, 1)$, $f_2 = (21, 1, -5, 1)$ и $f_3 = (5, -15, 5, 7)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^\perp$.
4. Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha : x + 2y - z + 3 = 0$.
5. Свести једначину криве $x^2 - xy + y^2 - 3y - 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жижу и директрису.
6. Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора V. Ако је $L \neq 0$ и ако $(\exists k \in \mathbb{N}) L^k = 0$:
   а) Доказати да је $m_L(\lambda) = \lambda^m, m \in \mathbb{N}$ минимални полином оператора L.
   б) Доказати да за такво $m \in \mathbb{N}$ постоји вектор $u \in V$ такав да је $L^{m-1}(u) \neq 0$.
   в) Доказати да је за такво $u \in V$, $v = L^{m-1}(u) \in KerL \cap ImL$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 25.01.2017.

Други ток

1. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 10 & -11 & 13 \\ 4 & -5 & 8 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.

2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^3$ решења једначине $x + 4y + z = 0$.

   а) Наћи неке ортонормиране базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.

   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (-3, 5, 1)$ на потпросторе W и $W^\perp$. Са којим од простора W и $W^\perp$ вектор v заклапа мањи угао?

3. Одредити ранг матрице $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & \alpha+1 & 2 & \alpha-5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & \alpha^2+4 \end{bmatrix}$ у зависности од реалног параметра α.

4. Одредити међусобни положај правих $p: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}$ и $q: 2x = y, 3x = z$.

5. Свести једначину криве $x^2 + 2xy + y^2 - 16x + 16 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жижу и директрису.

6. Нека су U и W разни шестодимензиони потпростори векторског простора V димензије 9. Одредити могуће вредности за $dim U \cap W$. Навести пример за сваку од вредности.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 25.01.2017.

Други ток

1. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 10 & -11 & 13 \\ 4 & -5 & 8 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.

2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^3$ решења једначине $x + 4y + z = 0$.

   а) Наћи неке ортонормиране базе, као и димензије потпростора W и $W^\perp$.

   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (-3, 5, 1)$ на потпросторе W и $W^\perp$. Са којим од простора W и $W^\perp$ вектор v заклапа мањи угао?

3. Одредити ранг матрице $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & \alpha+1 & 2 & \alpha-5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & \alpha^2+4 \end{bmatrix}$ у зависности од реалног параметра α.

4. Одредити међусобни положај правих $p: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}$ и $q: 2x = y, 3x = z$.

5. Свести једначину криве $x^2 + 2xy + y^2 - 16x + 16 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жижу и директрису.

6. Нека су U и W разни шестодимензиони потпростори векторског простора V димензије 9. Одредити могуће вредности за $dim U \cap W$. Навести пример за сваку од вредности.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
11.01.2017.

1. У зависности од реалних параметара α и β решити (Гаусовим методом) систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (2\beta-2)y & + & z & = & 4 \\ (\alpha+1)x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & (\beta-1)y & + & z & = & 3. \end{array}$$

2. Нека су $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0, x+2z+4t = 0\}$ и $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-t = 0, x+y+3t = 0, 2x+2y+z+2t = 0\}$ потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$. Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$. Да ли је сума $U+W$ директна?

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са $L(x,y,z,t) = (x+2y+4z, 3x+3y+4z-3t, 2x-2y-6t)$. Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе слике и језгра пресликавања L.

4. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y+4z, -x-4z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Одредити $\det A$.
Одредити $rang(A)$, образложити.

6. Ака је $u = (1,2,3,4), v = (1,1,1,1), x = (1,0,-1,-2), y = (-2,-5,-8,-11)$ и $z = (0,1,2,3)$ испитати да ли је $\mathcal{L}(u,v) = \mathcal{L}(x,y,z)$

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

11.01.2017.

1. У зависности од реалних параметара α и β решити (Гаусовим методом) систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (2\beta-2)y & + & z & = & 4 \\ (\alpha+1)x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & (\beta-1)y & + & z & = & 3. \end{array}$$

2. Нека су $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0, x+2z+4t=0\}$ и $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-t=0, x+y+3t=0, 2x+2y+z+2t=0\}$ потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$. Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$. Да ли је сума $U+W$ директна?

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са $L(x,y,z,t) = (x+2y+4z, 3x+3y+4z-3t, 2x-2y-6t)$. Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе слике и језгра пресликавања L.

4. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y+4z, -x-4z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Одредити $\det A$. Одредити $rang(A)$, образложити.

6. Ака је $u = (1,2,3,4), v = (1,1,1,1), x = (1,0,-1,-2), y = (-2,-5,-8,-11)$ и $z = (0,1,2,3)$ испитати да ли је $\mathcal{L}(u,v) = \mathcal{L}(x,y,z)$

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

16.11.2016.

1. У зависности од реалних параметара a и b решити (Гаусовим методом) систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b \\ x & + & a^2y & + & z & = & b. \end{array}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{ll} u_1 = (1, 2, 3, 4), & w_1 = (1, 1, 1, 1), \\ u_2 = (4, 3, 2, 1), & w_2 = (2, 2, 4, 3), \\ u_3 = (1, 1, 1, 2), & w_3 = (1, 1, 5, 4). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

3. Нека је $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + c = 0\}$.
   а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити му базу и димензију.
   б) Ако је $W = \{(-2t, 0, 0, 3t) | t \in \mathbb{R}\} \leqslant \mathbb{R}^4$, испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

4. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + 8z, x + 2y + 4z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике оператора L.
   в) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$. Одредити $\det A$. Ако је $n = 2016$ наћи неке $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $rang(A) = 2016$, и образложити.

6. Ака су u, v, w линеарно независни вектори векторског простора V испитати да ли су вектори $u + v, u - v, u - 2v + w$ линеарно независни.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

16.11.2016.

1. У зависности од реалних параметара a и b решити (Гаусовим методом) систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + a^2y + z &= b. \end{aligned}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, 3, 4), & w_1 &= (1, 1, 1, 1), \\ u_2 &= (4, 3, 2, 1), & w_2 &= (2, 2, 4, 3), \\ u_3 &= (1, 1, 1, 2), & w_3 &= (1, 1, 5, 4). \end{aligned}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Нека је $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + c = 0\}$.
   а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити му базу и димензију.
   б) Ако је $W = \{(-2t, 0, 0, 3t) | t \in \mathbb{R}\} \leqslant \mathbb{R}^4$, испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

4. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + 8z, x + 2y + 4z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике оператора L.
   в) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n \times n}$. Одредити $\det A$. Ако је $n = 2016$ наћи неке $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $rang(A) = 2016$, и образложити.

6. Ака су u, v, w линеарно независни вектори векторског простора V испитати да ли су вектори $u + v, u - v, u - 2v + w$ линеарно независни.

СРЕЋНО!