Криве

1. Параметризовати елипсу, хиперболу и параболу дате:
а) у канонском облику у Декартовом координатном систему
б) у поларном координатном систему чији је центар нека жижа криве другог реда, а оса се поклапа са осом криве која садржи жижу.

(а) елипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geq b>0$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

Основни тригонометријски идентитет: $\cos^2 t+\sin^2 t=1$

Идеја: ставити да буде $\frac{x}{a}=\cos t$, $\frac{y}{b}=\sin t$, тј. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Овиме се добија пресликавање $\alpha(t)=(a\cos t, b\sin t)$ и заиста, тачке са ове криве задовољавају $\left(\frac{a\cos t}{a}\right)^2+\left(\frac{b\sin t}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$, за свако t. Треба још само одредити домен овог пресликавања. Пошто су функције $\cos t$ и $\sin t$ периодичне с основним периодом 2π, довољно је за домен узети било који интервал дужине 2π, нпр. $(0,2\pi)$. Истина је да онда траг ове криве неће бити читава елипса, већ елипса без једне тачке, али то нам не смета. Према томе, параметризација елипсе може бити крива $\alpha:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(a\cos t, b\sin t)$.

хипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

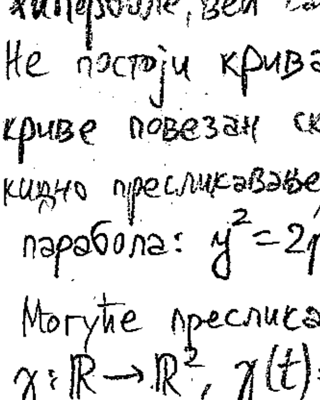
Основни хиперболички тригонометријски идентитет: $\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$

Идеја: ставити да буде $\frac{x}{a}=\operatorname{ch} t$, $\frac{y}{b}=\operatorname{sh} t$, тј. $x=a\operatorname{ch} t$, $y=b\operatorname{sh} t$. Овиме се добија пресликавање $\beta(t)=(a\operatorname{ch} t, b\operatorname{sh} t)$ и заиста, тачке са ове криве задовољавају $\left(\frac{a\operatorname{ch} t}{a}\right)^2-\left(\frac{b\operatorname{sh} t}{b}\right)^2=\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$, за свако t. Домен мора бити $\mathbb{R}$, али се и тада не добијају обе гране хиперболе, већ само једна (у овом случају, грана у полуравни $x>0$, јер је $x=a\operatorname{ch} t>0$). Не постоји крива (пресликавање) чији траг су обе гране хиперболе јер је траг криве повезан скуп (домен је повезан, јер је отворени интервал, а крива је непрекидно пресликавање), а две гране хиперболе не чине повезан скуп.

парабола: $y^2=2px,\ p>0$

Могуће пресликавање је $y=2pt$, $4p^2t^2=y^2=2px$, тј. $x=2pt^2$, $y=2pt$, односно $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(2pt^2,2pt)$.

(б)



Нека је $F(0,0)$ жижа криве другог реда и нека је $x=k$, $k>0$, једначина директрисе. Свака тачка $M(x,y)$ криве другог реда задовољава $\frac{d(M,F)}{d(M,d)}=e$, где је $e>0$ ексцентрицитет криве.

У поларним координатама је $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ и $d(M,F)=\rho$ јер је F центар (пол) поларног координатног система. Такође, $d(M,d)=k-\rho\cos\theta$ (разлика x-координата), па је $\frac{\rho}{k-\rho\cos\theta}=e$. Одавде следи:

$\rho = ke - \rho e\cos\theta$

$\rho(1+e\cos\theta) = ke$

$\rho = \frac{ke}{1+e\cos\theta}$

Ако ставимо $p \overset{\text{def}}{=} ke$, $p>0$, добијамо поларну једначину криве другог реда

$\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, $p, e>0$.

Према томе, како је $x=\rho\cos\theta$ и $y=\rho\sin\theta$, параметризација криве другог реда је $\left(\frac{p\cos\theta}{1+e\cos\theta}, \frac{p\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)$. Треба још одредити домен.

Како је $\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}\geq 0$ и $p>0$, мора бити $1+e\cos\theta>0$. Дакле, $e\cos\theta>-1$, тј. $\cos\theta > -\frac{1}{e}$ (пошто је $e>0$, дељењем се не мења знак неједнакости).

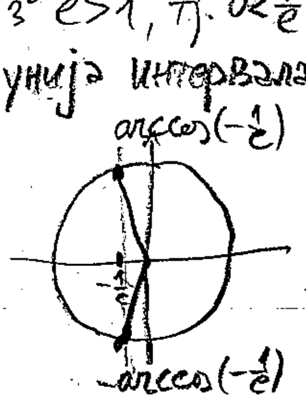
1° $\cos\theta \geq -1 > -\frac{1}{e}$, тј. $-1>-\frac{1}{e}$. Тада је $1<\frac{1}{e}$, тј. $e<1$ и неједнакост $\cos\theta>-\frac{1}{e}$ важи за све $\theta\in\mathbb{R}$. Како су функције $\cos\theta$ и $\sin\theta$ периодичне, с основним периодом 2π, за домен се може узети било који интервал дужине 2π, нпр. $(-\pi,\pi)$ (опет ће једна тачка из трага бити избачена, али нам то не смета). Дакле, у случају $0<e<1$ (елипса), параметризација је $\alpha:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$

$\alpha(\theta)=\left(\frac{p\cos\theta}{1+e\cos\theta}, \frac{p\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)$.

2° $e=1$, тј. $\cos\theta > -\frac{1}{e}=-1$. Тада је $\theta\neq\pi+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$, па како за домен треба узети отворени интервал, довољно је узети $\theta\in(-\pi,\pi)$. Дакле, у случају $e=1$ (парабола), параметризација је $\alpha:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta)=\left(\frac{p\cos\theta}{1+e\cos\theta}, \frac{p\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)$.

3° $e>1$, тј. $0<\frac{1}{e}<1$, односно $-1<-\frac{1}{e}<0$. Тада је решење неједначине $\cos\theta>-\frac{1}{e}$ унија интервала $\bigcup_{l\in\mathbb{Z}}\left(-\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)+2l\pi, \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)+2l\pi\right)$. Према томе, за домен се може узети интервал $\left(-\arccos\left(-\frac{1}{e}\right), \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)\right)$, па је у случају $e>1$ (хипербола) параметризација $\beta:\left(-\arccos\left(-\frac{1}{e}\right), \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)\right)\to\mathbb{R}^2$,

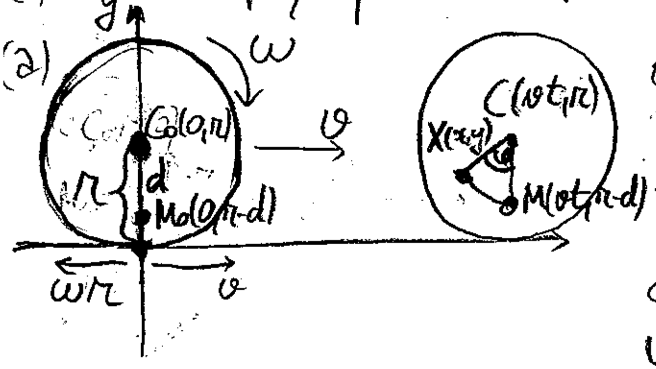
$\beta(\theta)=\left(\frac{p\cos\theta}{1+e\cos\theta}, \frac{p\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)$.



2. (а) Одредити неку параметризовану криву чији траг представља скуп свих тачака у равни које се добијају као траг фиксиране тачке на растојању d од центра диска полупречника r који се котрља без клизања по равној подлози. Скицирати.

(б) Испитати регуларност те криве у зависности од тога да ли је $d<r$, $d=r$ или $d>r$.

(а)



Диск у тренутку $t=0$ има центар у тачки $C_0(0,r)$. Пошто се он котрља без клизања по равној подлози, имамо композицију равномерног праволинијског кретања у смеру x-осе константном брзином v и ротационог кретања око центра диска C константном угаоном брзином ω, при чему у тачки у којој диск додирује подлогу укупна брзина (векторски збир брзине од праволинијског и ротационог кретања) мора бити 0. Како је од праволинијског кретања брзина v усмерена удесно, а од ротационог кретања је брзина $\omega \cdot r$ усмерена улево, следи да је $v-\omega r=0$, тј. $v=\omega r$.

Након времена t, центар диска ће се налазити у тачки $C(vt,r)$. Посматрамо траг тачке која је у почетном тренутку $t=0$ у положају $M_0(0,r-d)$. Уколико би се диск само кретао равномерно праволинијски, тачка M_0 би након времена t дошла у положај $M(vt,r-d)$. Међутим, диск се и ротира око свог центра C, па се након времена t заротира за угао $\varphi=\omega t$, а како је смер ротације негативан, потребно је тачку M заротирати око тачке C за угао $-\varphi$. Тиме се добија тачка $X(x,y)$, која представља положај фиксиране тачке M_0 на растојању d од центра диска након времена t.

$X=\mathcal{R}_{C,-\varphi}(M)$. Подсетимо се како се врши ротација око тачке $C(vt,r)$ у равни Oxy.

$$\begin{pmatrix} x-vt \\ y-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} vt-vt \\ r-d-r \end{pmatrix}$$

(од координата слике X и оригинала M одузимају се координате центра ротације C)

$$\begin{pmatrix} x-vt \\ y-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d\sin\varphi \\ -d\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$x = vt - d\sin\varphi$$
$$y = r - d\cos\varphi$$

Искористимо да је $v=\omega r$ и $\varphi=\omega t$. Добија се $vt=r\omega t=r\varphi$, па је $x=r\varphi-d\sin\varphi$, $y=r-d\cos\varphi$. То значи да је параметризација криве пресликавање $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(\varphi)=(r\varphi-d\sin\varphi,\ r-d\cos\varphi)$. Траг ове криве зове се трохоида, и то скраћена, ако је $d<r$, продужена, ако је $d>r$, а обична трохоида или циклоида ако је $d=r$.

(б) Крива α је регуларна ако је $\alpha'(\varphi)\neq(0,0)$ за свако $\varphi\in\mathbb{R}$.

$\alpha(\varphi)=(r\varphi-d\sin\varphi,\ r-d\cos\varphi)$

$\alpha'(\varphi)=(r-d\cos\varphi,\ d\sin\varphi)$

Испитајмо за које φ је $r-d\cos\varphi=0$ и $d\sin\varphi=0$. Како је $r,d>0$, следи да су једини кандидати за φ они за које је $\sin\varphi=0$, а то су $\varphi=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Потребно је да тада буде и $r-d\cos\varphi=0$, тј. $r-d\cdot\cos(k\pi)=0$. Како је $\cos(k\pi)=(-1)^k$, следи да мора бити испуњен услов $r-d\cdot(-1)^k=0$, тј. $r=d\cdot(-1)^k$. Како су $r,d>0$, ово је могуће ако и само ако је $k=2l$ и $r=d$. Према томе, закључак је следећи: Крива α је регуларна ако је $r\neq d$, а ако је $r=d$, крива није регуларна, јер је $\alpha'(2l\pi)=(0,0)$, за $l\in\mathbb{Z}$.

3. Дата је астроида својом једначином у Декартовим координатама $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ a>0$.

(а) Одредити неку параметризацију дате криве и доказати да њен траг представља трајекторију фиксиране тачке кружнице полупречника $\frac{a}{4}$ која се котрља без клизања изнутра по непокретном кругу полупречника a. Скицирати.

(б) Доказати да је дужина одсечка тангентне линије астроиде одређеног координатним осама константна.

(в) Одредити неку параметризовану криву на сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ чија је ортогонална пројекција на Oxy раван дата крива.

(а) $$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}=1$$

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2=1$$

Основни тригонометријски идентитет: $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$

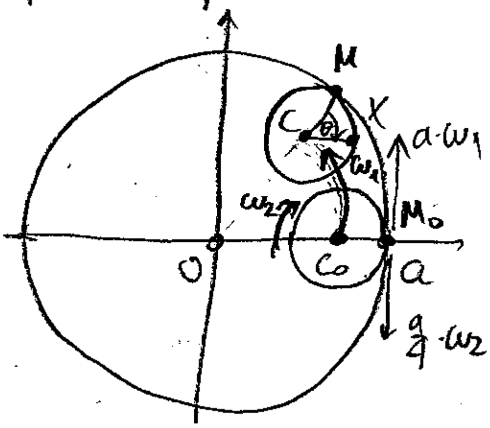
Идеја: $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}=\cos\varphi,\ \frac{y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}=\sin\varphi \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos\varphi,\ y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin\varphi \Rightarrow x=a\cos^3\varphi,\ y=a\sin^3\varphi$.

Дакле, могућа параметризација астроиде је крива $\alpha(\varphi)=(a\cos^3\varphi,\ a\sin^3\varphi)$. Основни период функција $\cos^3\varphi$ и $\sin^3\varphi$ је 2π. Заиста, важи

$$\cos3\varphi=\cos(2\varphi+\varphi)=\cos2\varphi\cos\varphi-\sin2\varphi\sin\varphi=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cos\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi=$$
$$=\cos^3\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi-2\sin^2\varphi\cos\varphi=\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi=\cos^3\varphi-3(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi=$$
$$=\cos^3\varphi-3\cos\varphi+3\cos^3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi \quad \text{и}$$

$$\sin3\varphi=\sin(2\varphi+\varphi)=\sin2\varphi\cos\varphi+\cos2\varphi\sin\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi+(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sin\varphi=$$
$$=2\sin\varphi\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi=3\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi=3\sin\varphi(1-\sin^2\varphi)-\sin^3\varphi=$$
$$=3\sin\varphi-3\sin^3\varphi-\sin^3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi,$$

па је $\cos^3\varphi=\frac{1}{4}(\cos 3\varphi+3\cos\varphi)$ и $\sin^3\varphi=\frac{1}{4}(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)$. Основни период функције $\cos 3\varphi$ је $\frac{2\pi}{3}$, а основни период функције $\cos\varphi$ је 2π, па је основни период функције $\cos^3\varphi$ једнак 2π. Слично је основни период функције $\sin\varphi$ једнак 2π, а основни период функције $\sin 3\varphi$ једнак $\frac{2\pi}{3}$, па је основни период функције $\sin^3\varphi$ једнак 2π. Дакле, за домен криве α може се узети неки интервал дужине 2π, нпр. $(0,2\pi)$, па је параметризација астроиде крива $\alpha:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(\varphi)=(a\cos^3\varphi, a\sin^3\varphi)$ (поново, траг ове криве не садржи тачку $(a,0)$, али нам то није битно).



Посматрајмо диск полупречника $\frac{a}{4}$ коме се у тренутку $t=0$ центар налази у тачки $C_0(\frac{3a}{4},0)$ и који се котрља без клизања по кругу с центром у $(0,0)$ и полупречником a. То котрљање је састављено из кружног кретања диска око тачке $(0,0)$ и из ротације тог диска око свог центра. Нека се диск креће кружно око тачке $(0,0)$ угаоном брзином ω_1, а нека се он ротира око свог центра угаоном брзином ω_2. Тачка додира диска полупречника $\frac{a}{4}$ и круга полупречника a не сме имати брзину, јер је котрљање без клизања. Од кружног кретања диска око тачке $(0,0)$ додирна тачка има брзину $a\cdot\omega_1$, док од ротације диска око свог центра додирна тачка има брзину $\frac{a}{4}\cdot\omega_2$ усмерену супротно. Дакле, векторски збир ових двеју брзина мора бити 0, па је $a\cdot\omega_1-\frac{a}{4}\omega_2=0$, тј. $\omega_1=\frac{1}{4}\omega_2$, односно $\omega_2=4\omega_1$.

Центар диска се кружно креће око тачке $(0,0)$, па ће се након времена t наћи у положају $C=\mathcal{R}_{O,\omega_1 t}(C_0)$. Ако означимо $\omega_1 t=\varphi$ и $C(x_0,y_0)$, добијамо

$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3a}{4}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3a}{4}\cos\varphi\\ \frac{3a}{4}\sin\varphi\end{pmatrix},$$

тј. $x_0=\frac{3a}{4}\cos\varphi$, $y_0=\frac{3a}{4}\sin\varphi$. Дакле, $C(\frac{3a}{4}\cos\varphi, \frac{3a}{4}\sin\varphi)$. Посматрајмо путању тачке диска полупречника $\frac{a}{4}$, која је у тренутку $t=0$ у положају $M_0(a,0)$. Након времена t, због кружног кретања диска око тачке $(0,0)$, тачка M_0 ће доћи у положај $M=\mathcal{R}_{O,\omega_1 t}(M_0)$, па ако је $M(x_1,y_1)$, тај положај је $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\varphi\\ a\sin\varphi\end{pmatrix}$, тј. $x_1=a\cos\varphi$, $y_1=a\sin\varphi$, односно $M(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$. Међутим, диск се ротира око свог центра C угаоном брзином ω_2 у негативном смеру, па ће услед те ротације посматрана тачка бити у положају $X=\mathcal{R}_{C,-\omega_2 t}(M)$. Ако је $X(x,y)$ и $\omega_2 t=\theta$, онда је

$$\begin{pmatrix}x-\frac{3a}{4}\cos\varphi\\ y-\frac{3a}{4}\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\cos\varphi-\frac{3a}{4}\cos\varphi\\ a\sin\varphi-\frac{3a}{4}\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a}{4}\cos\varphi\\ \frac{a}{4}\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Заменом $\omega_2=4\omega_1$ и $\omega_1 t=\varphi$ добијамо $\theta=\omega_2 t=4\omega_1 t=4\varphi$, па је

$$x-\frac{3a}{4}\cos\varphi=\frac{a}{4}\cos4\varphi\cos\varphi+\frac{a}{4}\sin4\varphi\sin\varphi=\frac{a}{4}\cos(4\varphi-\varphi)=\frac{a}{4}\cos3\varphi \text{ и}$$

$$y-\frac{3a}{4}\sin\varphi=-\frac{a}{4}\sin4\varphi\cos\varphi+\frac{a}{4}\cos4\varphi\sin\varphi=-\frac{a}{4}\sin(4\varphi-\varphi)=-\frac{a}{4}\sin3\varphi.$$ Дакле

$x=\frac{3a}{4}\cos\varphi+\frac{a}{4}\cos 3\varphi$ и $y=\frac{3a}{4}\sin\varphi-\frac{a}{4}\sin 3\varphi$. Уколико искористимо да је $\cos^3\varphi=\frac{1}{4}(\cos 3\varphi+3\cos\varphi)$ и $\sin^3\varphi=\frac{1}{4}(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)$, добијамо $x=\frac{a}{4}(3\cos\varphi+\cos 3\varphi)=a\cos^3\varphi$ и $y=\frac{a}{4}(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)=a\sin^3\varphi$, тј. добијамо тачку $X(a\cos^3\varphi, a\sin^3\varphi)$ која припада астроиди, чиме је доказано да је астроида траг фиксиране тачке диска полупречника $\frac{a}{4}$ који се котрља без клизања изнутра по кругу полупречника a.

(б) Нека је $\varphi\in(0,2\pi)$ произвољно и $\alpha(\varphi)=(a\cos^3\varphi, a\sin^3\varphi)$ одговарајућа тачка са астроиде. Вектор брзине у тој тачки је $\alpha'(\varphi)=(a\cdot 3\cos^2\varphi\cdot(-\sin\varphi), a\cdot 3\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi)=$ $=(-3a\cos^2\varphi\sin\varphi, 3a\sin^2\varphi\cos\varphi)$. Ако вектор брзине није $(0,0)$, онда он одређује правац тангенте астроиде у тачки $\alpha(\varphi)$. Одредимо за које $\varphi\in(0,2\pi)$ је $\alpha'(\varphi)=(0,0)$.

$-3a\cos^2\varphi\sin\varphi=0$

$3a\sin^2\varphi\cos\varphi=0$

$\cos^2\varphi\sin\varphi=0 \Rightarrow \cos^2\varphi=0$ или $\sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ или $\varphi=\pi$

$\sin^2\varphi\cos\varphi=0 \Rightarrow \sin^2\varphi=0$ или $\cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=\pi$ или $\varphi\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$

За све три вредности φ је $\alpha'(\varphi)=(0,0)$, па у тим тачкама вектор брзине не одређује тангенту. Претпоставимо зато да је $\varphi\in(0,2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Једначина тангенте је онда $p: \frac{x-a\cos^3\varphi}{-3a\cos^2\varphi\sin\varphi}=\frac{y-a\sin^3\varphi}{3a\sin^2\varphi\cos\varphi}$, тј. $p: \frac{x-a\cos^3\varphi}{-\cos\varphi}=\frac{y-a\sin^3\varphi}{\sin\varphi}$.

Пресечна тачка тангенте p и x-осе је тачка $A(a_0,0)$, а пресечна тачка тангенте p и y-осе је тачка $B(0,b_0)$. Тачке A,B припадају правој p, па је

$$\frac{a_0-a\cos^3\varphi}{-\cos\varphi}=\frac{0-a\sin^3\varphi}{\sin\varphi}=\frac{-a\sin^{\cancel{3}2}\varphi}{\cancel{\sin\varphi}}=-a\sin^2\varphi=-a(1-\cos^2\varphi)=-a+a\cos^2\varphi$$

$$a_0\cancel{-a\cos^3\varphi}=-\cos\varphi(-a+a\cos^2\varphi)=a\cos\varphi\cancel{-a\cos^3\varphi}$$

$$\boxed{a_0=a\cos\varphi}$$

$$\frac{0-a\cos^3\varphi}{-\cos\varphi}=\frac{-a\cos^3\varphi}{-\cos\varphi}=a\cos^2\varphi=a(1-\sin^2\varphi)=a-a\sin^2\varphi=\frac{b_0-a\sin^3\varphi}{\sin\varphi}$$

$$b_0\cancel{-a\sin^3\varphi}=a\sin\varphi\cancel{-a\sin^3\varphi}$$

$$\boxed{b_0=a\sin\varphi}$$

Дакле, тачке пресека тангенте p и координатних оса су тачке $A(a\cos\varphi,0)$ и $B(0,a\sin\varphi)$. Дужина дужи AB је $\sqrt{(0-a\cos\varphi)^2+(a\sin\varphi-0)^2}=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}=\sqrt{a^2}=a$ што дужина не зависи од избора тачке $\alpha(\varphi)=(a\cos^3\varphi,a\sin^3\varphi)$ са астроиде, тј. константна је.

(в) Тачка $M(x,y,z)$ се пројектује у тачку $M'(x,y,0)$ у равни Oxy. Према томе, тачке (x,y,z) са криве на сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ се пројектују у тачке $(a\cos^3\varphi, a\sin^3\varphi, 0)$ на астроиди. Како је пројекција тачке (x,y,z) тачка $(x,y,0)$, следи да је $x=a\cos^3\varphi$ и $y=a\sin^3\varphi$, а како тачка (x,y,z) припада сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, следи да је

$(a\cos^3\varphi)^2+(a\sin^3\varphi)^2+z^2=a^2$, тј.

$a^2\cos^6\varphi+a^2\sin^6\varphi+z^2=a^2$.

Дакле, $z^2=a^2-a^2\cos^6\varphi-a^2\sin^6\varphi=a^2(1-\cos^6\varphi-\sin^6\varphi)$.

$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1\ /^3$

$\cos^6\varphi+3\cos^4\varphi\sin^2\varphi+3\cos^2\varphi\sin^4\varphi+\sin^6\varphi=1$

$\cos^6\varphi+3\cos^2\varphi\sin^2\varphi\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}+\sin^6\varphi=1$

$1-\cos^6\varphi-\sin^6\varphi=3\cos^2\varphi\sin^2\varphi$

Следи да је $z^2=a^2\cdot 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi$, па за $z(\varphi)$ треба узети неку диференцијабилну функцију такву да је $(z(\varphi))^2=a^2\cdot 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Једна таква функција је $z(\varphi)=a\sqrt{3}\cos\varphi\sin\varphi$, па је тражена крива на сфери крива $\beta:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $\beta(\varphi)=(a\cos^3\varphi, a\sin^3\varphi, a\sqrt{3}\cos\varphi\sin\varphi)$. Крива мора бити диференцијабилна, по дефиницији, па зато захтевамо да $z(\varphi)$ буде диференцијабилна и не треба узимати никакве апсолутне вредности.

4. Дата је кардиоида својом поларном једначином $\rho=a(1+\cos\theta)$, $a>0$.

(а) Доказати да је крива затворена и израчунати њену дужину.

(б) Доказати да траг ове криве представља трајекторију фиксиране тачке кружнице полупречника $\frac{a}{2}$ која се котрља без клизања споља по непокретном кругу полупречника $\frac{a}{2}$. Скицирати.

(а) Крива $\alpha:(a,b)\to S$ (S је еуклидска раван $\mathbb{R}^2$ или еуклидски простор $\mathbb{R}^3$) је затворена ако постоје коначне граничне вредности $\lim\limits_{t\to a+}\alpha(t)$ и $\lim\limits_{t\to b-}\alpha(t)$ и једнаке су. Интуитивно гледано, „почетна" тачка $\lim\limits_{t\to a+}\alpha(t)$ и „крајња" тачка $\lim\limits_{t\to b-}\alpha(t)$ криве морају бити коначне тачке (зато се тражи да су те граничне вредности коначне) и потребно је да се поклапају.

Крива која параметризује кардиоиду је $\alpha(\theta)=(a(1+\cos\theta)\cos\theta, a(1+\cos\theta)\sin\theta)$ (ако је једначина криве у поларним координатама $\rho=\rho(\theta)$, онда је $x=\rho\cos\theta$ и $y=\rho\sin\theta$, па је параметризација криве $(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$). Шта узети за домен?

$a(1+\cos\theta)\cos\theta=a\cos\theta+a\cos^2\theta=a\cos\theta+a\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}=a\cos\theta+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos 2\theta$

$a(1+\cos\theta)\sin\theta=a\sin\theta+a\cos\theta\sin\theta=a\sin\theta+\frac{a}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta=a\sin\theta+\frac{a}{2}\sin 2\theta$

Основни период функције $\cos\theta$ је 2π, а основни период функције $\cos 2\theta$ је $\frac{2\pi}{2}=\pi$, па је основни период функције $a\cos\theta+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos 2\theta$ једнак 2π. Такође, основни период функције $\sin\theta$ је 2π, а основни период функције $\sin 2\theta$ је $\frac{2\pi}{2}=\pi$, па је основни период функције $a\sin\theta+\frac{a}{2}\sin 2\theta$ једнак 2π. Према томе, за домен треба узети неки интервал дужине 2π, нпр. $(0,2\pi)$. Дакле, $\alpha:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta)=(a(1+\cos\theta)\cos\theta, a(1+\cos\theta)\sin\theta)$.

Како је $\lim_{\theta\to 0+}\alpha(\theta)=\lim_{\theta\to 0+}(a(1+\cos\theta)\cos\theta, a(1+\cos\theta)\sin\theta)=(a\cdot(1+1)\cdot 1, a(1+1)\cdot 0)=(2a,0)$, и $\lim_{\theta\to 2\pi-}\alpha(\theta)=\lim_{\theta\to 2\pi-}(a(1+\cos\theta)\cos\theta, a(1+\cos\theta)\sin\theta)=(a(1+1)\cdot 1, a(1+1)\cdot 0)=(2a,0)$, следи да у обе граничне вредности коначне и једнаке, па је крива α затворена.

Дужина криве $\alpha:(a,b)\to S$ се рачуна по обрасцу $L(\alpha)=\int_a^b\|\alpha'(u)\|du$. У овом задатку је $\alpha:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta)=(a(1+\cos\theta)\cos\theta, a(1+\cos\theta)\sin\theta)$.

$$\alpha'(\theta)=(a(-\sin\theta)\cos\theta+a(1+\cos\theta)\cdot(-\sin\theta), a(-\sin\theta)\sin\theta+a(1+\cos\theta)\cos\theta)$$

$$\alpha'(\theta)=(-a\sin\theta\cos\theta-a\sin\theta-a\sin\theta\cos\theta, -a\sin^2\theta+a\cos\theta+a\cos^2\theta)$$

$$\alpha'(\theta)=(-a\sin\theta-a\cdot 2\sin\theta\cos\theta, a\cos\theta+a(\cos^2\theta-\sin^2\theta))$$

$$\alpha'(\theta)=(-a\sin\theta-a\sin 2\theta, a\cos\theta+a\cos 2\theta)$$

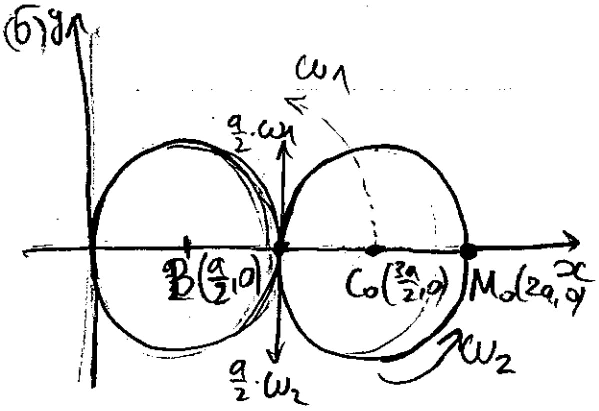
$$\|\alpha'(\theta)\|^2=(-a\sin\theta-a\sin 2\theta)^2+(a\cos\theta+a\cos 2\theta)^2=\underline{a^2\sin^2\theta}+2a^2\sin\theta\sin 2\theta+\underline{a^2\sin^2 2\theta}+$$
$$+\underline{a^2\cos^2\theta}+2a^2\cos\theta\cos 2\theta+\underline{a^2\cos^2 2\theta}=a^2+a^2+2a^2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)=$$
$$=2a^2+2a^2\cos(2\theta-\theta)=2a^2+2a^2\cos\theta=2a^2(1+\cos\theta)=2a^2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}=4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(\theta)\|=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|,\ \theta\in(0,2\pi)$$

Како је $\cos\frac{\theta}{2}\geq 0$ за $\theta\in(0,\pi]$ (тада је $\frac{\theta}{2}\in(0,\frac{\pi}{2}]$, па је $\cos\frac{\theta}{2}\geq 0$) и $\cos\frac{\theta}{2}<0$ за $\theta\in(\pi,2\pi)$ (тада је $\frac{\theta}{2}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, па је $\cos\frac{\theta}{2}<0$), следи да је $\alpha'(\theta)=\begin{cases}2a\cos\frac{\theta}{2}, & \theta\in(0,\pi]\\ -2a\cos\frac{\theta}{2}, & \theta\in(\pi,2\pi)\end{cases}$.

Према томе, $L(\alpha)=\int_0^{2\pi}\|\alpha'(u)\|du=\int_0^{\pi}2a\cos\frac{u}{2}du+\int_{\pi}^{2\pi}-2a\cos\frac{u}{2}du=2a\cdot\int_0^{\pi}\cos\frac{u}{2}du-2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{u}{2}du=$
$=4a\cdot\int_0^{\pi}\cos\frac{u}{2}d(\frac{u}{2})-4a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{u}{2}d(\frac{u}{2})=4a\cdot\sin\frac{u}{2}\Big|_0^{\pi}-4a\cdot\sin\frac{u}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}=4a(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)-4a(\sin\frac{2\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2})=$
$=4a\cdot(1-0)-4a(0-1)=4a+4a=8a$.

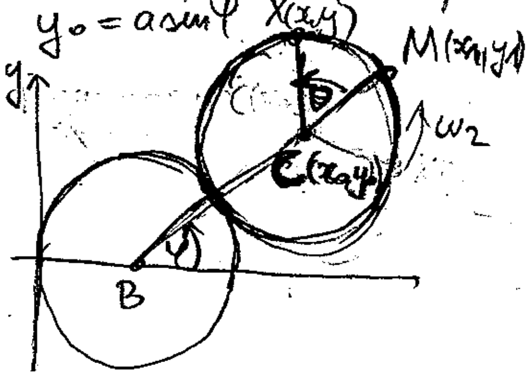
б)



Диск у почетном тренутку $t=0$ има центар у тачки $C_0(\frac{3a}{2},0)$ и он се котрља без клизања споља по кругу с центром у тачки $B(\frac{a}{2},0)$. То котрљање се састоји из кружног кретања диска око тачке B угаоном брзином ω_1 и ротације диска око свог центра угаоном брзином ω_2. У тачки додира укупна брзина је нула, јер је котрљање без клизања. Од кружног кретања око тачке B додирна тачка има брзину $\frac{a}{2}\cdot\omega_1$, а од ротације диска око свог центра има брзину $\frac{a}{2}\cdot\omega_2$ у супротном смеру. Векторски збир ових брзина је 0, па је $\frac{a}{2}\omega_1-\frac{a}{2}\omega_2=0$, тј. $\omega_1=\omega_2$. Положај центра диска након времена t одређен је са $C=\mathcal{R}_{B,\omega_1 t}(C_0)$. Ако је $C(x_0,y_0)$ и $\omega_1 t=\varphi$, онда је
$$\begin{pmatrix}x_0-\frac{a}{2}\\ y_0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}\\ 0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix},$$ па је

$x_0-\frac{a}{2}=a\cos\varphi$ Дакле, положај центра диска је $C(\frac{a}{2}+a\cos\varphi, a\sin\varphi)$.

$y_0=a\sin\varphi$



Посматрамо путању по којој се креће тачка која је у тренутку $t=0$ у положају $M_0(2a,0)$. Због кружног кретања диска око тачке B, након времена t она ће бити у положају одређеном са $M=\mathcal{R}_{B,\omega_1 t}(M_0)$. Ако је $M(x_1,y_1)$, онда је $(\omega_1 t=\varphi)$

$$\begin{pmatrix} x_1-\frac{a}{2}\\ y_1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a-\frac{a}{2}\\ 0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3a}{2}\\ 0\end{pmatrix},$$ па је

$x_1-\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}\cos\varphi$

$y_1=\frac{3a}{2}\sin\varphi$, тј. $M(\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}\cos\varphi, \frac{3a}{2}\sin\varphi)$. Међутим, диск се ротира око свог центра C угаоном брзином ω_2, па посматрана тачка долази у положај X одређен са $X=\mathcal{R}_{C,\omega_2 t}(M)$. Како је $\omega_1=\omega_2$, следи да је $\omega_2 t=\varphi$, па је

$$\begin{pmatrix} x-\frac{a}{2}-a\cos\varphi\\ y-a\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cancel{\frac{a}{2}}+\frac{3a}{2}\cos\varphi-\cancel{\frac{a}{2}}-a\cos\varphi\\ \frac{3a}{2}\sin\varphi-a\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\cos\varphi\\ \frac{a}{2}\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$x-\cancel{\frac{a}{2}}-a\cos\varphi=\frac{a}{2}\cos^2\varphi-\frac{a}{2}\sin^2\varphi=\frac{a}{2}\cos^2\varphi-\frac{a}{2}(1-\cos^2\varphi)=\frac{a}{2}\cos^2\varphi-\cancel{\frac{a}{2}}+\frac{a}{2}\cos^2\varphi$$

$$y-a\sin\varphi=\frac{a}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{a}{2}\cos\varphi\sin\varphi=a\sin\varphi\cos\varphi$$

$$x=a\cos\varphi+a\cos^2\varphi=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi$$

$$y=a\sin\varphi+a\sin\varphi\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

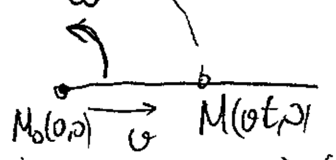
Дакле, посматрана тачка се креће по кривој $(a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, a(1+\cos\varphi)\sin\varphi)$, па ако преименујемо φ у θ, добијамо да се та тачка креће по кривој $\alpha(\theta)=(a(1+\cos\theta)\cos\theta, a(1+\cos\theta)\sin\theta)$, тј. по кардиоиди, што је и требало доказати.

5. Дата је Архимедова спирала својом поларном једначином $\rho=a\theta$ $(a\neq 0)$.

(а) Доказати да дата крива представља трајекторију тачке која се креће константном брзином по полуправој са почетком у координатном почетку, која ротира константном угаоном брзином око координатног почетка.

(б) Одредити неку параметризовану криву на конусу $x^2+y^2=a^2z^2$ чија је ортогонална пројекција на Oxy раван дата крива.

(а)



Нека се у тренутку $t=0$ тачка налази у координатном почетку $M_0(0,0)$. Након времена t, њен положај на полуправој је у тачки $M(vt,0)$, али пошто се полуправа ротира око координатног почетка угаоном брзином ω, положај тачке ће бити у тачки $X=\mathcal{R}_{O,\omega t}(M)$. Дакле

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}vt\\ 0\end{pmatrix}$$ $(X(x,y), \varphi=\omega t)$, па је $x=vt\cos\varphi$, $y=vt\sin\varphi$. Како је $\varphi=\omega t$, следи да је $t=\frac{\varphi}{\omega}$, па је $x=v\cdot\frac{\varphi}{\omega}\cos\varphi$, $y=v\cdot\frac{\varphi}{\omega}\sin\varphi$. Ако ставимо $\frac{v}{\omega}=a$ и преименујемо φ у θ, добијамо

x

$x=a\theta\cos\theta$, $y=a\theta\sin\theta$. Како је параметризација Архимедове спирале $\rho=a\theta$ дата са $\alpha(\theta)=(a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta)$, следи да се посматрана тачка креће по Архимедовој спирали. При томе, ако је $a>0$, домен Архимедове спирале је $\theta\in(0,+\infty)$ (да би било $\rho>0$), а ако је $a<0$, домен Архимедове спирале је $\theta\in(-\infty,0)$ и смер ротације полуправе је негативан.

(б) Ортогонална пројекција тачке $M(x,y,z)$ на раван Oxy тачка $M'(x,y,0)$. Стога крива на конусу $x^2+y^2=a^2z^2$, чије се тачке (x,y,z) пројектују на Архимедову спиралу $(a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta, 0)$, задовољавају $x=a\theta\cos\theta$, $y=a\theta\sin\theta$ и $(a\theta\cos\theta)^2+(a\theta\sin\theta)^2=a^2z^2$, тј. $a^2\theta^2\cos^2\theta+a^2\theta^2\sin^2\theta=a^2z^2$, односно $z^2=\theta^2$. За пресликавање $z(\theta)$ је потребно узети неко диференцијабилно пресликавање које задовољава $z^2=\theta^2$ (јер је крива диференцијабилно пресликавање), па можемо узети $z=\theta$. Дакле, крива на конусу $x^2+y^2=a^2z^2$, која се пројектује на Архимедову спиралу, може бити крива $\beta(\theta)=(a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta, \theta)$, при чему је $\theta\in(0,+\infty)$ ако је $a>0$, односно $\theta\in(-\infty,0)$ ако је $a<0$.

6. Дата је логаритамска спирала својом поларном једначином $\rho=ca^\theta$ $(a>0, a\neq1, c>0)$.

(а) Доказати да је угао између вектора положаја и тангенте логаритамске спирале константан.

б) Одредити природну параметризацију дате криве узимајући за почетну тачку координатни почетак. Образложити зашто је то могуће.

(в) Доказати да су криве $\rho_1=c_1a^\theta$ и $\rho_2=c_2a^\theta$ $(c_1\neq c_2)$ подударне међусобно.

а) Параметризација логаритамске спирале је крива $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta)=(ca^\theta\cos\theta, ca^\theta\sin\theta)$ (домен за θ је $\mathbb{R}$ јер је $c\cdot a^\theta>0$ за све $\theta\in\mathbb{R}$). Вектор положаја тачке $\alpha(\theta)$ на логаритамској спирали је $\alpha(\theta)$, а вектор брзине $\alpha'(\theta)$ је вектор правца тангенте. Дакле, треба доказати да угао између вектора $\alpha(\theta)$ и $\alpha'(\theta)$ не зависи од избора тачке са логаритамске спирале. Угао између вектора u и v се рачуна по обрасцу $\cos\sphericalangle(u,v)=\dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$, па је потребно израчунати $\langle\alpha(\theta),\alpha'(\theta)\rangle$, $\|\alpha(\theta)\|$ и $\|\alpha'(\theta)\|$.

$$\alpha'(\theta)=(ca^\theta\ln a\cos\theta+ca^\theta(-\sin\theta), ca^\theta\ln a\sin\theta+ca^\theta\cos\theta)$$

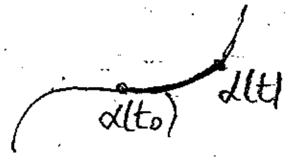
$$\langle\alpha(\theta),\alpha'(\theta)\rangle=\langle(ca^\theta\cos\theta, ca^\theta\sin\theta),(ca^\theta\ln a\cos\theta-ca^\theta\sin\theta, ca^\theta\ln a\sin\theta+ca^\theta\cos\theta)\rangle=$$
$$=c^2a^{2\theta}\ln a\cos^2\theta-\cancel{c^2a^{2\theta}\cos\theta\sin\theta}+c^2a^{2\theta}\ln a\sin^2\theta+\cancel{c^2a^{2\theta}\sin\theta\cos\theta}=c^2a^{2\theta}\ln a$$

$$\|\alpha(\theta)\|^2=c^2a^{2\theta}\cos^2\theta+c^2a^{2\theta}\sin^2\theta=c^2a^{2\theta}\Rightarrow\|\alpha(\theta)\|=ca^\theta$$

$$\|\alpha'(\theta)\|^2=c^2a^{2\theta}\ln^2a\cos^2\theta-\cancel{2c^2a^{2\theta}\ln a\cos\theta\sin\theta}+c^2a^{2\theta}\sin^2\theta+c^2a^{2\theta}\ln^2a\sin^2\theta+\cancel{2c^2a^{2\theta}\ln a\sin\theta\cos\theta}+c^2a^{2\theta}\cos^2\theta$$
$$=c^2a^{2\theta}\ln^2a+c^2a^{2\theta}=c^2a^{2\theta}(\ln^2a+1)\Rightarrow\|\alpha'(\theta)\|=ca^\theta\sqrt{\ln^2a+1}$$

$$\Rightarrow\cos\sphericalangle(\alpha(\theta),\alpha'(\theta))=\frac{c^2a^{2\theta}\ln a}{ca^\theta\cdot ca^\theta\sqrt{\ln^2a+1}}=\frac{\ln a}{\sqrt{\ln^2a+1}}$$ — не зависи од θ, па је угао између $\alpha(\theta)$ и $\alpha'(\theta)$ константан дуж криве

(б) Ако је $\alpha:(a,b)\to S$ (S је еуклидска раван $\mathbb{R}^2$ или еуклидски простор $\mathbb{R}^3$), функција дужине лука је пресликавање $s:(a,b)\to\mathbb{R}$ такво да је $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(u)\|du$, при чему је $t_0\in(a,b)$ произвољно.



Вредност функције дужине лука у тачки $t\in(a,b)$ представља дужину лука криве од тачке $\alpha(t_0)$ до тачке $\alpha(t)$ и то са знаком плус, ако је $t>t_0$, тј. са знаком минус, ако је $t<t_0$. Дужину лука криве меримо од тачке $\alpha(t_0)$, тј. тачка $\alpha(t_0)$ је почетна тачка за функцију дужине лука. У њој је функција дужине лука једнака 0, за $t<t_0$ је негативна дужина лука од тачке $\alpha(t_0)$ до тачке $\alpha(t)$, а за $t>t_0$ је позитивна дужина лука од тачке $\alpha(t_0)$ до тачке $\alpha(t)$. За почетну тачку функције дужине лука може се узети и (гранична) тачка $\lim_{t\to a+}\alpha(t)$ или $\lim_{t\to b-}\alpha(t)$, тј. може се узети да је $s(t)=\int_a^t\|\alpha'(u)\|du$ или да је $s(t)=\int_t^b\|\alpha'(u)\|du$, ако ови интеграли конвергирају за свако $t\in(a,b)$ (тј. ако су дужине лукова од тачке $\lim_{t\to a-}\alpha(t)$ или тачке $\lim_{t\to b+}\alpha(t)$ коначне).

Крива $\alpha:(a,b)\to S$ је природно параметризована ако је њена функција дужине лука $s(t)=t-t_0$, $t_0\in(a,b)$ (или $s(t)=t-a$, $s(t)=b-t$), тј. ако је разлика између параметра t и одабране почетне тачке функције дужине лука једнака дужини лука криве између тих тачака. Пошто је параметар природно параметризоване криве у тесној вези с дужином лука, за природно параметризоване криве се још каже да су параметризоване дужином лука.

За сваку криву $\alpha:(a,b)\to S$ постоји њој еквивалентна крива β која је природно параметризована. Наиме, ако је $s:(a,b)\to\mathbb{R}$ функција дужине лука криве α и s^{-1} њен инверз, онда је $\beta=\alpha\circ s^{-1}$. Теоријски је ово увек могуће, а практично је тешко израчунати функцију дужине лука s (интеграл је често нерешив) или њен инверз s^{-1}, па је често непозната природна параметризација кривих.

<u>Пример</u>: $\alpha:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(a\cos t, b\sin t)$, $a>b>0$

Функција дужине лука је $s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2u+b^2\cos^2u}\,du$, а ово је елиптички интеграл и није решив преко елементарних функција (ни обим елипсе није елементарна функција полуоса елипсе).

За логаритамску спиралу $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta)=(ca^\theta\cos\theta, ca^\theta\sin\theta)$, тражимо природну параметризацију чија је почетна тачка координатни почетак. Координатни почетак се добија као $\lim_{\theta\to-\infty}\alpha(\theta)=\lim_{\theta\to-\infty}(ca^\theta\cos\theta,ca^\theta\sin\theta)=(0,0)$, ако је $a>1$, тј. као $\lim_{\theta\to+\infty}\alpha(\theta)=\lim_{\theta\to+\infty}(ca^\theta\cos\theta,ca^\theta\sin\theta)=(0,0)$, ако је $0<a<1$. Ову тачку је могуће узети као почетну, јер интеграл $\int_{-\infty}^{\theta}\|\alpha'(u)\|du$, ако је $a>1$, тј. интеграл $\int_{\theta}^{+\infty}\|\alpha'(u)\|du$, ако је $0<a<1$, конвергира за свако $\theta\in\mathbb{R}$.

Ако је $a>1$: $\int\limits_{-\infty}^{\theta}\|\alpha'(u)\|du=\int\limits_{-\infty}^{\theta}ca^u\sqrt{\ln^2a+1}\,du=c\sqrt{\ln^2a+1}\cdot\frac{a^u}{\ln a}\Big|_{-\infty}^{\theta}=\frac{c\sqrt{\ln^2a+1}}{\ln a}a^\theta$

Ако је $0<a<1$: $\int\limits_{\theta}^{+\infty}\|\alpha'(u)\|du=\int\limits_{\theta}^{+\infty}ca^u\sqrt{\ln^2a+1}\,du=c\sqrt{\ln^2a+1}\cdot\frac{a^u}{\ln a}\Big|_{\theta}^{+\infty}=\frac{c\sqrt{\ln^2a+1}}{\ln a}\cdot(-a^\theta)$

Дакле, $s=\frac{c\sqrt{\ln^2a+1}}{\ln a}a^\theta$, па је $a^\theta=\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}$, тј. $\theta=\log_a\left(\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)$, $s\in(0,+\infty)$, ако је $a>1$.

Ако је $0<a<1$, онда је $s=-\frac{c\sqrt{\ln^2a+1}}{\ln a}a^\theta$, па је $a^\theta=-\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}$, тј. $\theta=\log_a\left(-\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)$, $s\in(0,+\infty)$.

Према томе, природна параметризација криве α је крива $\beta:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ дата са

$\beta(s)=\alpha\left(\log_a\left(\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)\right)=\left(x\cdot\frac{s\ln a}{x\sqrt{\ln^2a+1}}\cos\left(\log_a\left(\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)\right),x\cdot\frac{s\ln a}{x\sqrt{\ln^2a+1}}\sin\left(\log_a\left(\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)\right)\right)$, ако је $a>1$,

тј. $\beta(s)=\alpha\left(\log_a\left(-\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)\right)=\left(x\left(-\frac{s\ln a}{x\sqrt{\ln^2a+1}}\right)\cos\left(\log_a\left(-\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)\right),c\cdot\left(-\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)\sin\left(\log_a\left(-\frac{s\ln a}{c\sqrt{\ln^2a+1}}\right)\right)\right)$, ако је $0<a<1$. Могуће је за почетну тачку узети координатни почетак јер је дужина криве од координатног почетка до произвољне њене тачке коначна.

в) Нека је $\alpha_1(\theta)=(c_1a^\theta\cos\theta,c_1a^\theta\sin\theta)$ једна логаритамска спирала и $\alpha_2(\theta)=(c_2a^\theta\cos\theta,c_2a^\theta\sin\theta)$ друга логаритамска спирала. Тада је

$\alpha_2(\theta)=\left(c_1\cdot\frac{c_2}{c_1}a^\theta\cos\theta,c_1\cdot\frac{c_2}{c_1}a^\theta\sin\theta\right)=(c_1\cdot a^c a^\theta\cos\theta,c_1\cdot a^c a^\theta\sin\theta)=(c_1\cdot a^{\theta+c}\cos\theta,c_2\cdot a^{\theta+c}\sin\theta)$

$\log_a\left(\frac{c_2}{c_1}\right)=c$, $a^c=\frac{c_2}{c_1}$ $\quad=(c_1\cdot a^\varphi\cos(\varphi-c),c_1\cdot a^\varphi\sin(\varphi-c))$ (репараметризација, $\theta+c=\varphi$ – нов параметар)

Дакле, крива $\tilde{\alpha}_2(\varphi)=(c_1a^\varphi\cos(\varphi-c),c_1\cdot a^\varphi\sin(\varphi-c))$ је репараметризована крива α_2, тј. има исти траг. Докажимо да ротацијом око координатног почетка за угао c од криве α_2, тј. њене репараметризације $\tilde{\alpha}_2$, добијамо криву α_1.

$$R_{0,c}(\tilde{\alpha}_2(\varphi))=\begin{pmatrix}\cos c & -\sin c\\ \sin c & \cos c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1a^\varphi\cos(\varphi-c)\\ c_1a^\varphi\sin(\varphi-c)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1a^\varphi(\cos(\varphi-c)\cos c-\sin(\varphi-c)\sin c)\\ c_1a^\varphi(\sin c\cos(\varphi-c)+\cos c\sin(\varphi-c))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1a^\varphi\cos(\varphi-c+c)\\ c_1a^\varphi\sin(c+\varphi-c)\end{pmatrix}$$

$$=(c_1a^\varphi\cos\varphi,c_2a^\varphi\sin\varphi)=\alpha_1(\varphi)$$

Дакле, криве α_1 и α_2 су подударне, јер ротацијом криве α_2 (тј. њене репараметризације $\tilde{\alpha}_2$) око координатног почетка за угао $c=\log_a\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$ настаје крива α_1.

7. (домаћи) Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих тачака у координатној равни које задовољавају услов да је производ растојања од тачака $(-a,0)$ и $(a,0)$ једнак b^2 $(a,b>0)$.

(а) Доказати да поларне координате тачака скупа $\mathcal{S}$ задовољавају једначину $\rho^4-2a^2\rho^2\cos(2\theta)=b^4-a^4$. Скицирати скуп $\mathcal{S}$ за $a<b$, $a=b$, $a>b$.

(б) Уколико је $a=b=1$, доказати да је $\gamma(t)=\left(\frac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2t},\frac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\sin^2t}\right)$, $t\in(0,2\pi)$, једна параметризована крива чији је траг скуп $\mathcal{S}$ (без једне тачке), са самопресеком у координатном почетку.

(в) Одредити једначине оскулаторних кругова и тангенти криве γ у координатном почетку.

а) Нека је $M(x,y)$ произвољна тачка скупа $\mathcal{S}$. Тада је растојање тачке $M(x,y)$ од тачке $(-a,0)$ једнако $\sqrt{(x-(-a))^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$, а растојање тачке $M(x,y)$ од тачке $(a,0)$ је једнако $\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, па је производ ових растојања једнак b^2. Дакле,

$\sqrt{x^2+2ax+a^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2-2ax+a^2+y^2}=b^2\ /^2$

$$(x^2+a^2+y^2-2ax)(x^2+a^2+y^2+2ax)=b^4$$
$$(x^2+a^2+y^2)^2-(2ax)^2=b^4$$
$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ поларне координате
$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=\rho^2$$
$$(\rho^2+a^2)^2-4a^2\rho^2\cos^2\theta=b^4$$
$$\rho^4+2a^2\rho^2+a^4-4a^2\rho^2\cos^2\theta=b^4$$
$$\rho^4-2a^2\rho^2(2\cos^2\theta-1)=b^4-a^4$$
$$\rho^4-2a^2\rho^2(\cancel{1}+\cos2\theta\cancel{-1})=b^4-a^4$$
$$\rho^4-2a^2\rho^2\cos2\theta=b^4-a^4$$
(б) $\gamma(t)=\left(\frac{\sqrt2\cos t}{1+\sin^2 t},\frac{\sqrt2\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$, $t\in(0,2\pi)$

Треба доказати да је $(x^2+y^2+1^2)^2-4\cdot1^2\cdot x^2=1^4$, где је $x=\frac{\sqrt2\cos t}{1+\sin^2 t}$, $y=\frac{\sqrt2\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}$.
$$x^2+y^2=\frac{2\cos^2 t}{(1+\sin^2 t)^2}+\frac{2\sin^2 t\cos^2 t}{(1+\sin^2 t)^2}=\frac{2\cos^2 t}{(1+\sin^2 t)^{\cancel{2}}}\cancel{(1+\sin^2 t)}=\frac{2\cos^2 t}{1+\sin^2 t}$$
$$x^2+y^2+1=\frac{2\cos^2 t}{1+\sin^2 t}+1=\frac{2\cos^2 t+1+\sin^2 t}{1+\sin^2 t}=\frac{\cos^2 t+\cos^2 t+1+\sin^2 t}{1+\sin^2 t}=\frac{\cos^2 t+2}{1+\sin^2 t}$$
$$(x^2+y^2+1)^2-4x^2=\left(\frac{\cos^2 t+2}{1+\sin^2 t}\right)^2-4\cdot\frac{2\cos^2 t}{(1+\sin^2 t)^2}=\frac{\cos^4 t+4\cos^2 t+4}{(1+\sin^2 t)^2}-\frac{8\cos^2 t}{(1+\sin^2 t)^2}=\frac{\cos^4 t-4\cos^2 t+4}{(1+\sin^2 t)^2}=$$
$$=\frac{(\cos^2 t-2)^2}{(1+\sin^2 t)^2}=\frac{(1-\sin^2 t-2)^2}{(1+\sin^2 t)^2}=\frac{(-1-\sin^2 t)^2}{(1+\sin^2 t)^2}=\frac{(1+\sin^2 t)^2}{(1+\sin^2 t)^2}=1$$
Дакле, траг криве γ је скуп $\mathcal{S}$ без тачке $\lim\limits_{t\to0+}\gamma(t)=\lim\limits_{t\to0+}\left(\frac{\sqrt2\cos t}{1+\sin^2 t},\frac{\sqrt2\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)=\left(\frac{\sqrt2\cdot1}{1+0^2},\frac{\sqrt2\cdot0\cdot1}{1+0^2}\right)=(\sqrt2,0)$ и тачке $\lim\limits_{t\to2\pi-}\gamma(t)=\lim\limits_{t\to2\pi-}\left(\frac{\sqrt2\cos t}{1+\sin^2 t},\frac{\sqrt2\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)=\left(\frac{\sqrt2\cdot1}{1+0^2},\frac{\sqrt2\cdot0\cdot1}{1+0^2}\right)=(\sqrt2,0)$. Ова крива има самопресек у тачки $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt2\cdot0}{1+1^2},\frac{\sqrt2\cdot1\cdot0}{1+1^2}\right)=(0,0)$ и $\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt2\cdot0}{1+(-1)^2},\frac{\sqrt2\cdot(-1)\cdot0}{1+(-1)^2}\right)=(0,0)$.

(в) Оскулаторни круг криве $\alpha:(a,b)\to\mathbf{S}$ у тачки $\alpha(t)$, $t\in(a,b)$, јесте круг који најбоље апроксимира криву α у околини тачке $\alpha(t)$. Центар оскулаторног круга криве α у тачки $\alpha(t)$ је тачка $\alpha(t)+\frac{1}{K(t)}\mathbf{N}(t)$, где је $K(t)$ кривина криве α у тачки $t\in(a,b)$, а $\mathbf{N}(t)$ је нормални вектор (јединични вектор истог смера као центрипетално, тј. нормално убрзање криве) у тачки $t\in(a,b)$. Кривина криве α се рачуна по обрасцу $K(t)=\frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$, а нормални вектор по обрасцу $\mathbf{N}(t)=\mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t)$, где је $\mathbf{B}(t)$ бинормални вектор, који се рачуна по обрасцу $\mathbf{B}(t)=\frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}$, а $\mathbf{T}(t)$ је тангентни вектор (јединични вектор истог смера као вектор брзине), који се рачуна по обрасцу $\mathbf{T}(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$.

У случају криве $\gamma(t)=\left(\frac{\sqrt2\cos t}{1+\sin^2 t},\frac{\sqrt2\cos t\sin t}{1+\sin^2 t}\right)$ је:
$$\gamma'(t)=\left(\sqrt2\cdot\frac{-\sin t(1+\sin^2 t)-\cos t\cdot2\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^2},\sqrt2\cdot\frac{(-\sin^2 t+\cos^2 t)(1+\sin^2 t)-\cos t\sin t\cdot2\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^2}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{-\sin t-\sin^3 t-2\sin t(1-\sin^2 t)}{(1+\sin^2 t)^2},\ \sqrt{2}\cdot\frac{(-\sin^2 t+1-\sin^2 t)(1+\sin^2 t)-2\sin^2 t(1-\sin^2 t)}{(1+\sin^2 t)^2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\,\frac{-\sin t-\sin^3 t-2\sin t+2\sin^3 t}{(1+\sin^2 t)^2},\ \sqrt{2}\cdot\frac{(1-2\sin^2 t)(1+\sin^2 t)-2\sin^2 t+2\sin^4 t}{(1+\sin^2 t)^2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\,\frac{\sin^3 t-3\sin t}{(1+\sin^2 t)^2},\ \sqrt{2}\cdot\frac{1+\sin^2 t-2\sin^2 t-\cancel{2\sin^4 t}-2\sin^2 t\cancel{+2\sin^4 t}}{(1+\sin^2 t)^2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\,\frac{\sin^3 t-3\sin t}{(1+\sin^2 t)^2},\ \sqrt{2}\cdot\frac{1-3\sin^2 t}{(1+\sin^2 t)^2}\right)$$

$$\gamma''(t)=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{(3\sin^2 t\cos t-3\cos t)(1+\sin^2 t)^{\cancel{2}\,1}-(\sin^3 t-3\sin t)\cdot 2\cancel{(1+\sin^2 t)}\cdot 2\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^{\cancel{4}\,3}},\right.$$

$$\left.\sqrt{2}\cdot\frac{-3\cdot 2\sin t\cos t(1+\sin^2 t)^{\cancel{2}}-(1-3\sin^2 t)\cdot 2\cancel{(1+\sin^2 t)}\cdot 2\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^{\cancel{4}\,3}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{3\cos t(\sin^2 t-1)(1+\sin^2 t)-\sin t(\sin^2 t-3)\cdot 4\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^3},\ \sqrt{2}\cdot\frac{-6\sin t\cos t(1+\sin^2 t)-(1-3\sin^2 t)\cdot 4\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^3}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{3\cos t(\sin^4 t-1)-4\sin^2 t\cos t(\sin^2 t-3)}{(1+\sin^2 t)^3},\ \sqrt{2}\cdot\frac{-2\sin t\cos t\,(3(1+\sin^2 t)-2(1-3\sin^2 t))}{(1+\sin^2 t)^3}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{\cos t(3\sin^4 t-3-4\sin^4 t+12\sin^2 t)}{(1+\sin^2 t)^3},\ \sqrt{2}\cdot\frac{-2\sin t\cos t\,(3+3\sin^2 t-2+6\sin^2 t)}{(1+\sin^2 t)^2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{\cos t(-\sin^4 t+12\sin^2 t-3)}{(1+\sin^2 t)^3},\ \sqrt{2}\cdot\frac{-2\sin t\cos t(1+9\sin^2 t)}{(1+\sin^2 t)^2}\right)$$

Координатни почетак се добија за $t=\frac{\pi}{2}$ и $t=\frac{3\pi}{2}$ (~~јер~~ је $\gamma(\frac{\pi}{2})=\gamma(\frac{3\pi}{2})=(0,0)$), па израчунајмо $K(\frac{\pi}{2})$, $K(\frac{3\pi}{2})$, $\mathbf{N}(\frac{\pi}{2})$ и $\mathbf{N}(\frac{3\pi}{2})$.

$$\gamma'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1^3-3\cdot 1}{(1+1^2)^2},\ \sqrt{2}\cdot\frac{1-3\cdot 1^2}{(1+1^2)^2}\right)=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1-3}{2^2},\sqrt{2}\,\frac{1-3}{2^2}\right)=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{-\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_2},\ \sqrt{2}\cdot\frac{-\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\gamma''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{0\cdot(-1^4+12\cdot 1^2-3)}{(1+1^2)^2},\ \sqrt{2}\cdot\frac{-2\cdot 1\cdot 0(1+9\cdot 1^2)}{(1+1^2)^2}\right)=(0,0)$$

$$\gamma'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\times\gamma''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,0,0)$$

$$K\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{\|\gamma'(\frac{\pi}{2})\times\gamma''(\frac{\pi}{2})\|}{\|\gamma'(\frac{\pi}{2})\|^3}=\frac{\|(0,0,0)\|}{\|(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\|^3}=0$$

У тачкама у којима је кривина једнака 0 нису дефинисани вектор нормале $\mathbf{N}$, бинормале $\mathbf{B}(t)$, као ни оскулаторни круг (јер би полупречник таквог круга био $\frac{1}{K}=\frac{1}{0}$, што није дефинисано). Дакле, крива γ нема оскулаторни круг у координатном почетку (једноставно се добија и $\gamma''(\frac{3\pi}{2})=(0,0)$, што повлачи да је $K(\frac{3\pi}{2})=0$).

Тангента криве у координатном почетку је $p: \frac{x-0}{-\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{y-0}{-\frac{\sqrt2}{2}}$ (вектор правца у тачки $(0,0)=\gamma(\frac{\pi}{2})$ је вектор $(-\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}) = \gamma'(\frac{\pi}{2})$), тј. једначина тангенте је $p: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}$, односно $p: y=x$. Како се тачка $(0,0)$ добија и за $t=\frac{3\pi}{2}$, друга тангента има вектор правца $\gamma'(\frac{3\pi}{2}) = \left(\sqrt2\cdot\frac{(-1)^3-3\cdot(-1)}{(1+(-1)^2)^2}, \sqrt2\cdot\frac{1-3\cdot(-1)^2}{(1+(-1)^2)^2}\right) =$
$=\left(\sqrt2\cdot\frac{-1+3}{2^2}, \sqrt2\cdot\frac{1-3}{2^2}\right) = \left(\sqrt2\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}_2}, \sqrt2\cdot\frac{-\cancel{2}}{\cancel{4}_2}\right) = (\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2})$, па је њена једначина

$p_2: \frac{x-0}{\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{y-0}{-\frac{\sqrt2}{2}}$, тј. $p_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}$, односно $p_2: y=-x$.

8. Дата је ланчаница као график функције $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, $a>0$.
(а) Параметризовати дату криву на два начина – тако да јој означена кривина буде позитивна, а затим негативна. Одредити Френеов репер обе те параметризоване криве.
(б) Одредити геометријско место тачака (тј. њену инволуту) коју описује фиксирана тачка праве која се лепи за ланчаницу без клизања, с почетком у тачки $(0,a)$.

(а) Једна параметризација ланчанице је $\alpha: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(t, a\,\mathrm{ch}\frac{t}{a})$. Тада је
$\alpha'(t) = (1, a\,\mathrm{sh}\frac{t}{a}\cdot\frac{1}{a}) = (1, \mathrm{sh}\frac{t}{a})$, $\alpha''(t) = (0, \mathrm{ch}\frac{t}{a}\cdot\frac{1}{a}) = (0, \frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{t}{a})$, па је

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \mathrm{sh}\frac{t}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{t}{a} & 0 \end{vmatrix} = (0,0,\tfrac{1}{a}\mathrm{ch}\tfrac{t}{a}).$$

Дакле, $\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\| = |\frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{t}{a}| = \frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{t}{a}$, па је

$B(t) = \frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|} = \frac{(0,0,\frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{t}{a})}{\frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{t}{a}} = (0,0,1)$. Такође, $\|\alpha'(t)\|^2 = 1^2+\mathrm{sh}^2\frac{t}{a} = \mathrm{ch}^2\frac{t}{a}$, тј. $\|\alpha'(t)\| = \mathrm{ch}\frac{t}{a}$ (јер је $\mathrm{ch}\frac{t}{a}>0$ за свако $t\in\mathbb{R}$). Према томе, $\mathbf{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(1,\mathrm{sh}\frac{t}{a})}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}} = \left(\frac{1}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}}, \mathrm{th}\frac{t}{a}\right)$.

За равanске криве (криве чији траг припада једној равни) постоји тзв. означена нормала $\mathbf{N_Z}$. По дефиницији, тангентни вектор $\mathbf{T}$ и вектор означене нормале $\mathbf{N_Z}$ су такви да $(\mathbf{T},\mathbf{N_Z})$ чине позитивно оријентисану ОНБ равни којој припада траг криве. Дакле,

$$\mathbf{N_Z} = \mathcal{R}_{0,\frac{\pi}{2}}(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}} \\ \mathrm{th}\frac{t}{a}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}} \\ \mathrm{th}\frac{t}{a}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{th}\frac{t}{a} \\ \frac{1}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}}\end{pmatrix}.$$

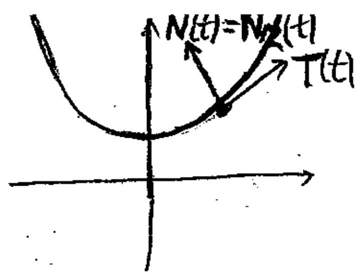
Дакле, $\mathbf{N_Z}(t) = \left(-\mathrm{th}\frac{t}{a}, \frac{1}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}}\right)$.

„Обична" нормала $\mathbf{N}$ је јединични вектор истог смера као вектор центрипеталног, тј. нормалног убрзања и добија се по обрасцу $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t)$.

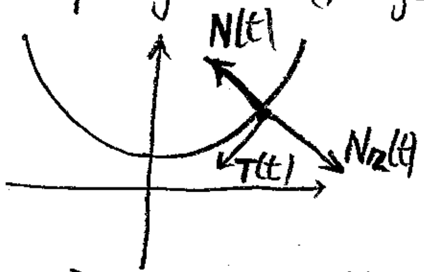
$$\mathbf{N}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}} & \mathrm{th}\frac{t}{a} & 0\end{vmatrix} = \left(-\mathrm{th}\tfrac{t}{a}, \tfrac{1}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}}, 0\right),$$ тј. $\mathbf{N}(t) = \left(-\mathrm{th}\frac{t}{a}, \frac{1}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}}\right) = \mathbf{N_Z}(t)$.

Означена кривина криве $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ је пресликавање $k_Z:(a,b)\to\mathbb{R}$ такво да је $k_Z\mathbf{N_Z} = k\mathbf{N}$. Како је у овом случају $\mathbf{N_Z}(t)=\mathbf{N}(t)$, за свако $t\in\mathbb{R}$, следи да је означена кривина $k_Z(t)=k(t)\geq 0$, за свако $t\in\mathbb{R}$.

$k(t) = \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{t}{a}}{\mathrm{ch}^3\frac{t}{a}} = \frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{t}{a}}$, па је и $k_Z(t) = \frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{t}{a}} > 0$.



Кад је смер кретања по кривој као на овој слици, вектори $T(t)$ и $N(t)$ чине позитивно оријентисану ОНБ равни, те се нормала N и означена нормала N_r поклапају. Нека је $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\beta(t)=(-t, a\,ch\frac{t}{a})$ репараметризација криве α таква да је смер кретања по кривој β супротан од смера кретања по кривој α. Тада је:



Заиста, $\beta'(t)=(-1, a\cdot sh\frac{t}{a}\cdot\frac{1}{a})=(-1, sh\frac{t}{a})$, $\beta''(t)=(0, ch\frac{t}{a}\cdot\frac{1}{a})=(0,\frac{1}{a}ch\frac{t}{a})$,

$$\beta'(t)\times\beta''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & sh\frac{t}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{a}ch\frac{t}{a} & 0\end{vmatrix}=(0,0,-\tfrac{1}{a}ch\tfrac{t}{a}),\ \|\beta'(t)\times\beta''(t)\|=|-\tfrac{1}{a}ch\tfrac{t}{a}|=\tfrac{1}{a}ch\tfrac{t}{a}$$

$$B_\beta(t)=\frac{\beta'(t)\times\beta''(t)}{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}=\frac{(0,0,-\frac{1}{a}ch\frac{t}{a})}{\frac{1}{a}ch\frac{t}{a}}=(0,0,-1),\ \|\beta'(t)\|^2=(-1)^2+sh^2\tfrac{t}{a}=1+sh^2\tfrac{t}{a}=$$

$$=ch^2\tfrac{t}{a}\Rightarrow\|\beta'(t)\|=ch\tfrac{t}{a},\ T_\beta(t)=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}=\frac{(-1,sh\frac{t}{a})}{ch\frac{t}{a}}=\left(-\frac{1}{ch\frac{t}{a}}, th\tfrac{t}{a}\right),\ N_\beta(t)=B_\beta(t)\times T_\beta(t)=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{1}{ch\frac{t}{a}} & th\frac{t}{a} & 0\end{vmatrix}=\left(th\tfrac{t}{a},\frac{1}{ch\frac{t}{a}},0\right),\ \text{тј. } N_\beta(t)=\left(th\tfrac{t}{a},\frac{1}{ch\frac{t}{a}}\right).$$

Коначно, означена нормала је

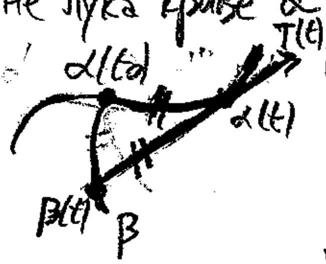
$$N_{r\beta}(t)=\mathcal{R}_{0,\frac{\pi}{2}}(T_\beta(t))=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{ch\frac{t}{a}}\\ th\frac{t}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{ch\frac{t}{a}}\\ th\frac{t}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-th\frac{t}{a}\\ -\frac{1}{ch\frac{t}{a}}\end{pmatrix}=-N_\beta(t),$$

па из $K_{r\beta}(t)N_{r\beta}(t)=K_\beta(t)N_\beta(t)$ следи $-K_{r\beta}(t)N_\beta(t)=K_\beta(t)N_\beta(t)$, тј. $K_{r\beta}(t)=-K_\beta(t)\leq 0$, тј. означена кривина криве β је негативна.

$$K_\beta(t)=\frac{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3}=\frac{\frac{1}{a}\cancel{ch\frac{t}{a}}}{ch^{\cancel{3}2}\frac{t}{a}}=\frac{1}{a\,ch^2\frac{t}{a}},\ \text{па је } K_{r\beta}(t)=-\frac{1}{a\,ch^2\frac{t}{a}}<0.$$

Френеов репер криве $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(t,a\,ch\frac{t}{a})$ је $T_\alpha(t)=\left(\frac{1}{ch\frac{t}{a}}, th\frac{t}{a}\right)$, $N_\alpha(t)=\left(-th\frac{t}{a},\frac{1}{ch\frac{t}{a}}\right)$, $B_\alpha(t)=(0,0,1)$, а Френеов репер криве $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\beta(t)=(-t,a\,ch\frac{t}{a})$ је $T_\beta(t)=\left(-\frac{1}{ch\frac{t}{a}}, th\frac{t}{a}\right)$, $N_\beta(t)=\left(th\frac{t}{a},\frac{1}{ch\frac{t}{a}}\right)$, $B_\beta(t)=(0,0,-1)$.

(б) Инволута криве $\alpha:(a,b)\to S$ која почиње у тачки $\alpha(t_0)$, $t_0\in(a,b)$ је крива $\beta:(a,b)\to S$ дата са $\beta(t)=\alpha(t)-s(t)T(t)$, где је $s:(a,b)\to\mathbb{R}$ функција дужине лука криве α с почетком у тачки t_0, а $T:(a,b)\to S$ је тангентни вектор криве α.



Идеја је да је тачка $\beta(t)$ таква да је вектор који спаја $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ (а то је вектор $\beta(t)-\alpha(t)$) супротно усмерен од тангентног вектора $T(t)$ и да је дужина тог вектора иста као дужина криве од $\alpha(t_0)$ до $\alpha(t)$, што је $s(t)$ ако је $\alpha(t_0)$ почетна тачка за функцију дужине лука. Дакле $\beta(t)-\alpha(t)=-s(t)T(t)$, тј. $\beta(t)=\alpha(t)-s(t)T(t)$.

$\alpha(t)=(t,a\,ch\frac{t}{a})$, $\alpha(0)=(0,a)\Rightarrow$ почетна тачка је $t_0=0$.

$\alpha'(t)=(1,a\,sh\frac{t}{a}\cdot\frac{1}{a})=(1,sh\frac{t}{a})$

$\|\alpha'(t)\|^2=1^2+sh^2\frac{t}{a}=ch^2\frac{t}{a}\Rightarrow\|\alpha'(t)\|=ch\frac{t}{a}$, $T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}=\left(\frac{1}{ch\frac{t}{a}}, th\frac{t}{a}\right)$

$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\int_0^t ch\frac{u}{a}du=a\int_0^t ch\frac{u}{a}d\left(\frac{u}{a}\right)=a\,sh\frac{u}{a}\Big|_0^t=a\,sh\frac{t}{a}\Rightarrow\beta(t)=(t,a\,ch\frac{t}{a})-a\,sh\frac{t}{a}\left(\frac{1}{ch\frac{t}{a}}, th\frac{t}{a}\right)$

$$\beta(t)=\left(t,a\,\mathrm{ch}\tfrac{t}{a}\right)-\left(a\,\mathrm{th}\tfrac{t}{a},a\frac{\mathrm{sh}^2\frac{t}{a}}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}}\right)=\left(t-a\,\mathrm{th}\tfrac{t}{a},\frac{a}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}}\underbrace{\left(\mathrm{ch}^2\tfrac{t}{a}-\mathrm{sh}^2\tfrac{t}{a}\right)}_{=1}\right)=\left(t-a\,\mathrm{th}\tfrac{t}{a},\frac{a}{\mathrm{ch}\frac{t}{a}}\right).$$

9. Дата је трактриса $\beta(t)=2\left(\cos t+\ln\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right),\sin t\right)$, $t\in(0,\pi)$.

(а) Доказати да је одсечак тангенте дате криве одређен тачком криве и пресеком са x-осом константне дужине.

(б) Доказати да је
$$\gamma(s)=\begin{cases}\left(\int_0^s\sqrt{1-e^{-t}}\,dt,\;2e^{-\frac{s}{2}}\right), & s\geq 0\\ \left(\int_0^s\sqrt{1-e^{t}}\,dt,\;2e^{\frac{s}{2}}\right), & s\leq 0\end{cases}$$
једна природна репараметризација дате криве.

(в) Одредити геометријско место центара оскулаторних кругова дате криве (тј. њену еволуту).

(а)
$$\beta'(t)=2\left(-\sin t+\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2},\cos t\right)=2\left(-\sin t+\frac{1}{\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cancel{\cos\frac{t}{2}}}\cdot\cos^{\cancel{2}}\frac{t}{2}\cdot 2},\cos t\right)=2\left(-\sin t+\frac{1}{\sin t},\cos t\right)$$

$$\beta'(t)=2\left(\frac{-\sin^2 t+1}{\sin t},\cos t\right)=2\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t},\cos t\right)$$

Тангента трактрисе у тачки $\beta(t)=2\left(\cos t+\ln\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right),\sin t\right)$ је права $p:\ \dfrac{x-2\cos t-2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)}{2\frac{\cos^2 t}{\sin t}}=\dfrac{y-2\sin t}{2\cos t}$, ако је вектор брзине $\beta'(t)=2\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t},\cos t\right)$ различит од $(0,0)$, што је тачно за $\cos t\neq 0$, тј. $t\neq\frac{\pi}{2}$.

$$p:\ \frac{x-2\cos t-2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)}{\cancel{2}\frac{\cos^{\cancel{2}} t}{\sin t}}=\frac{y-2\sin t}{\cancel{2}\cancel{\cos t}}\quad /\cdot\frac{1}{\sin t}$$

$$p:\ \frac{x-2\cos t-2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)}{\cos t}=\frac{y-2\sin t}{\sin t}$$

Пресек тангенте p са x-осом је тачка $A(x_0,0)$ и она задовољава једначину тангенте p.

$$\frac{x_0-2\cos t-2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)}{\cos t}=\frac{0-2\sin t}{\sin t}=\frac{-2\cancel{\sin t}}{\cancel{\sin t}}=-2$$

$$x_0-\cancel{2\cos t}-2\ln\left(\mathrm{tg}\tfrac{t}{2}\right)=\cancel{-2\cos t}$$

$$\boxed{x_0=2\ln\left(\mathrm{tg}\tfrac{t}{2}\right)}$$

Одсечак тангенте одређен тачком $\beta(t)=2\left(\cos t+\ln\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right),\sin t\right)$ и тачком $A\left(2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right),0\right)$ је дужине
$$\sqrt{\left(\cancel{2\ln\left(\mathrm{tg}\tfrac{t}{2}\right)}-2\cos t-\cancel{2\ln\left(\mathrm{tg}\tfrac{t}{2}\right)}\right)^2+(0-2\sin t)^2}=\sqrt{(-2\cos t)^2+(-2\sin t)^2}=\sqrt{4\cos^2 t+4\sin^2 t}=\sqrt{4}=2,$$
тј. не зависи од избора тачке $\beta(t)$ са трактрисе.

(б) Израчунајмо најпре интеграле $\int_0^s\sqrt{1-e^{-t}}\,dt$ и $\int_0^s\sqrt{1-e^{t}}\,dt$.

$$\int_0^s\sqrt{1-e^{-t}}\,dt=\left\{\begin{array}{ll}\text{смена: }\sqrt{1-e^{-t}}=u & dt=-\frac{1}{1-u^2}\cdot(-2u)\,du=\frac{2u\,du}{1-u^2}\\ 1-e^{-t}=u^2 & \\ e^{-t}=1-u^2 & t=0,\ u=\sqrt{1-e^{-0}}=\sqrt{1-1}=0\\ t=-\ln(1-u^2) & t=s,\ u=\sqrt{1-e^{-s}}\end{array}\right\}=\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}u\cdot\frac{2u\,du}{1-u^2}=\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}\frac{2u^2}{1-u^2}\,du=-2\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}\frac{-u^2}{1-u^2}\,du=$$

$$=-2\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}\frac{1-u^2-1}{1-u^2}\,du=-2\left(\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}du-\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}\frac{du}{1-u^2}\right)=-2u\Big|_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}+\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}\frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)}\,du=$$

$$=-2\sqrt{1-e^{-s}}+\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}\frac{1}{1+u}\,du+\int_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}\frac{1}{1-u}\,du=-2\sqrt{1-e^{-s}}+\ln(1+u)\Big|_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}-\ln(1-u)\Big|_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}=$$

$$=-2\sqrt{1-e^{-s}}+\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\Big|_0^{\sqrt{1-e^{-s}}}=-2\sqrt{1-e^{-s}}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-e^{-s}}}{1-\sqrt{1-e^{-s}}}\right)-\underbrace{\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right)}_{\ln 1=0}=-2\sqrt{1-e^{-s}}+\ln\frac{\left(1+\sqrt{1-e^{-s}}\right)^2}{1^2-\left(\sqrt{1-e^{-s}}\right)^2}=$$

$$=-2\sqrt{1-e^{-s}}+\ln\frac{\left(1+\sqrt{1-e^{-s}}\right)^2}{\cancel{1-1}+e^{-s}}=-2\sqrt{1-e^{-s}}+2\ln\left(1+\sqrt{1-e^{-s}}\right)-\ln e^{-s}=-2\sqrt{1-e^{-s}}+2\ln\left(1+\sqrt{1-e^{-s}}\right)+s.$$

$$\int_0^s \sqrt{1-e^t}\,dt = \left\{\begin{array}{ll} \text{смена: } \sqrt{1-e^t}=u & dt=\frac{1}{1-u^2}\cdot(-2u)\,du=\frac{-2u}{1-u^2}\,du \\ 1-e^t=u^2 & t=0,\ u=\sqrt{1-e^0}=\sqrt{1-1}=0 \\ e^t=1-u^2 & t=s,\ u=\sqrt{1-e^s} \\ t=\ln(1-u^2) & \end{array}\right\} = \int_0^{\sqrt{1-e^s}} u\cdot\frac{-2u}{1-u^2}\,du = 2\int_0^{\sqrt{1-e^s}}\frac{-u^2}{1-u^2}\,du =$$

$$=2\int_0^{\sqrt{1-e^s}}\frac{1-u^2-1}{1-u^2}\,du = 2\int_0^{\sqrt{1-e^s}}du-2\int\frac{1}{1-u^2}\,du = 2u\Big|_0^{\sqrt{1-e^s}}-\int_0^{\sqrt{1-e^s}}\frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)}\,du = 2\sqrt{1-e^s}-\int_0\frac{1}{1+u}\,du-$$

$$-\int_0^{\sqrt{1-e^s}}\frac{1}{1-u}\,du = 2\sqrt{1-e^s}-\ln(1+u)\Big|_0^{\sqrt{1-e^s}}+\ln(1-u)\Big|_0^{\sqrt{1-e^s}} = 2\sqrt{1-e^s}+\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\Big|_0^{\sqrt{1-e^s}} =$$

$$=2\sqrt{1-e^s}+\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-e^s}}{1+\sqrt{1-e^s}}\right)-\underbrace{\ln\left(\frac{1-0}{1+0}\right)}_{\ln 1=0} = 2\sqrt{1-e^s}+\ln\frac{(1-\sqrt{1-e^s})^2}{1^2-(\sqrt{1-e^s})^2} = 2\sqrt{1-e^s}+\ln\frac{(1-\sqrt{1-e^s})^2}{\cancel{1}-\cancel{1}+e^s} =$$

$$=2\sqrt{1-e^s}+2\ln(1-\sqrt{1-e^s})-\ln e^s = 2\sqrt{1-e^s}+2\ln(1-\sqrt{1-e^s})-s$$

Сад одредимо функцију дужине лука трактрисе, узимајући тачку $t=\frac{\pi}{2}$ за почетну.

$$\beta'(t)=2\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t},\cos t\right)$$

$$\|\beta'(t)\|^2=\left(2\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)^2+(2\cos t)^2=4\frac{\cos^4 t}{\sin^2 t}+4\cos^2 t=4\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+1\right)=\frac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}(\overbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}^{1})=\frac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

$\|\beta'(t)\|=\frac{2|\cos t|}{\sin t}$, $t\in(0,\pi)$ ($\sin t>0$, $\cos t\geq 0$ за $t\in(0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos t<0$ за $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$).

$$\|\beta'(t)\|=\begin{cases}\frac{2\cos t}{\sin t}, & t\in(0,\frac{\pi}{2}] \\ -\frac{2\cos t}{\sin t}, & t\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$$

$$s(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\|\beta'(u)\|\,du=\begin{cases}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{2\cos u}{\sin u}\,du, & t\in(0,\frac{\pi}{2}] \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{t}-\frac{2\cos u}{\sin u}\,du, & t\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}=\begin{cases}2\ln(\sin u)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{t}, & t\in(0,\frac{\pi}{2}] \\ -2\ln(\sin u)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{t}, & t\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}=\begin{cases}2\ln(\sin t), & t\in(0,\frac{\pi}{2}] \\ -2\ln(\sin t), & t\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$$

$s=2\ln(\sin t)$, $s\leq 0$, $t\in(0,\frac{\pi}{2}]$

$\ln(\sin t)=\frac{s}{2}$

$\sin t=e^{\frac{s}{2}}$

$t=\arcsin(e^{\frac{s}{2}})$, $s\leq 0$, $t\in(0,\frac{\pi}{2}]$

$s=-2\ln(\sin t)$, $s>0$, $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

$\ln(\sin t)=-\frac{s}{2}$

$\sin t=e^{-\frac{s}{2}}$

$t=\pi-\arcsin(e^{-\frac{s}{2}})$, $s>0$, $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

$$\gamma(s)=\begin{cases}\beta(\arcsin(e^{\frac{s}{2}})), & s\leq 0 \\ \beta(\pi-\arcsin(e^{-\frac{s}{2}})), & s>0\end{cases}$$

Потребно је одредити $\cos t$ и $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, за $t=\arcsin(e^{\frac{s}{2}})$ и $t=\pi-\arcsin(e^{-\frac{s}{2}})$.

Кад је $t=\arcsin(e^{\frac{s}{2}})$, онда је $t\in(0,\frac{\pi}{2}]$, па је $\cos t\geq 0$. Дакле, $\cos t=\sqrt{\cos^2 t}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-(e^{\frac{s}{2}})^2}=\sqrt{1-e^s}$. Такође, $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\frac{1-\sqrt{1-e^s}}{e^{\frac{s}{2}}}$, па је $\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2})=\ln\frac{1-\sqrt{1-e^s}}{e^{\frac{s}{2}}}=\ln(1-\sqrt{1-e^s})-\ln e^{\frac{s}{2}}=\ln(1-\sqrt{1-e^s})-\frac{s}{2}$. Следи да је

$$\beta(\arcsin(e^{\frac{s}{2}}))=2\left(\sqrt{1-e^s}+\ln(1-\sqrt{1-e^s})-\frac{s}{2},e^{\frac{s}{2}}\right)=\left(2\sqrt{1-e^s}+2\ln(1-\sqrt{1-e^s})-s,2e^{\frac{s}{2}}\right)=$$

$$=\left(\int_0^s\sqrt{1-e^t}\,dt,2e^{\frac{s}{2}}\right),\ s\leq 0.$$

Кад је $t=\pi-\arcsin(e^{-\frac{s}{2}})$, онда је $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, па је $\cos t<0$. Дакле, $\cos t=-\sqrt{\cos^2 t}=-\sqrt{1-\sin^2 t}=-\sqrt{1-(e^{-\frac{s}{2}})^2}=-\sqrt{1-e^{-s}}$. Такође, $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\frac{1+\sqrt{1-e^{-s}}}{e^{-\frac{s}{2}}}$, па је $\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2})=\ln\frac{1+\sqrt{1-e^{-s}}}{e^{-\frac{s}{2}}}=$

$= \ln(1+\sqrt{1-e^{-s}}) - \ln e^{-\frac{s}{2}} = \ln(1+\sqrt{1-e^{-s}}) + \frac{s}{2}$. Следи да је

$$\beta(\pi - \arcsin(e^{-\frac{s}{2}})) = 2\left(-\sqrt{1-e^{-s}} + \ln(1+\sqrt{1-e^{-s}}) + \frac{s}{2}, e^{-\frac{s}{2}}\right) = \left(-2\sqrt{1-e^{-s}} + 2\ln(1+\sqrt{1-e^{-s}}) + s, 2e^{-\frac{s}{2}}\right) =$$

$$= \left(\int_0^s \sqrt{1-e^{-t}}\,dt, 2e^{-\frac{s}{2}}\right),\ s>0,$$ што значи да је

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(s) = \begin{cases} \left(\int_0^s \sqrt{1-e^{-t}}\,dt, 2e^{-\frac{s}{2}}\right), & s>0 \\ \left(\int_0^s \sqrt{1-e^{t}}\,dt, 2e^{\frac{s}{2}}\right), & s \le 0 \end{cases}$$ природна репараметризација криве β.

(в) Еволута криве $\beta: (a,b) \to \mathbb{S}$, $\kappa_\beta(t) > 0$ за свако $t \in (a,b)$, јесте крива $\alpha: (a,b) \to \mathbb{S}$ таква да је $\alpha(t)$ центар оскулаторног круга криве β у тачки $\beta(t)$. Како је центар оскулаторног круга криве β у тачки t тачка $\beta(t) + \frac{1}{\kappa_\beta(t)} N_\beta(t)$, следи да је
$\alpha(t) = \beta(t) + \frac{1}{\kappa_\beta(t)} N_\beta(t)$.

$$\beta'(t) = 2\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}, \cos t\right),\ \|\beta'(t)\| = \frac{2|\cos t|}{\sin t},\ \|\beta'(t)\| = 0 \text{ за } t = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta''(t) = 2\left(\frac{2\cos t(-\sin t)\sin t - \cos^2 t \cdot \cos t}{\sin^2 t}, -\sin t\right) = 2\left(\frac{-2\sin^2 t\cos t - \cos^3 t}{\sin^2 t}, -\sin t\right) = 2\left(\frac{-\cos t(2\sin^2 t + \cos^2 t)}{\sin^2 t}, -\sin t\right)$$

$$\beta''(t) = 2\left(\frac{-\cos t(\sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t)}{\sin^2 t}, -\sin t\right) = 2\left(\frac{-\cos t(\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t}, -\sin t\right)$$

$$\beta'(t) \times \beta''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\frac{\cos^2 t}{\sin t} & 2\cos t & 0 \\ \frac{-2\cos t(\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t} & -2\sin t & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, -4\cos^2 t + \frac{4\cos^2 t(\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t}\right) =$$

$$= \left(0, 0, 4\cos^2 t\left(-1 + \frac{\sin^2 t + 1}{\sin^2 t}\right)\right) = \left(0, 0, 4\cos^2 t\, \frac{\cancel{-\sin^2 t} + \cancel{\sin^2 t} + 1}{\sin^2 t}\right) = \left(0, 0, \frac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)$$

$$\|\beta'(t) \times \beta''(t)\| = \left|\frac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}\right| = \frac{4\cos^2 t}{\sin^2 t},\ \|\beta'(t) \times \beta''(t)\| = 0 \text{ за } t = \frac{\pi}{2}$$

$$B(t) = \frac{\beta'(t) \times \beta''(t)}{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|} = \frac{\left(0, 0, \frac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)}{\frac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}} = (0, 0, 1)$$

$$T(t) = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{\cancel{2}\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}, \cos t\right)}{\frac{\cancel{2}|\cos t|}{\sin t}} = \left(\frac{\frac{\cos^2 t}{\cancel{\sin t}}}{\frac{|\cos t|}{\cancel{\sin t}}}, \frac{\cos t}{\frac{|\cos t|}{\sin t}}\right) = \left(\frac{|\cos t|^{\cancel{2}}}{\cancel{|\cos t|}}, \frac{\cancel{|\cos t|} \cdot \operatorname{sgn}(\cos t) \cdot \sin t}{\cancel{|\cos t|}}\right)$$

$$T(t) = (|\cos t|, \operatorname{sgn}(\cos t) \cdot \sin t),\ t \in (0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$T(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ (-\cos t, -\sin t), & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ |\cos t| & \operatorname{sgn}(\cos t) \cdot \sin t & 0 \end{vmatrix} = (-\operatorname{sgn}(\cos t)\sin t, |\cos t|, 0)$$

$$N(t) = \begin{cases} (-\sin t, \cos t), & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ (\sin t, -\cos t), & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{\frac{\cancel{4}\cos^2 t}{\sin^2 t}}{\frac{2\cancel{8}|\cos t|^3}{\sin^3 t}} = \frac{\cancel{\cos^2 t}\,\sin^{\cancel{3}} t}{2\cancel{\sin^2 t} \cdot \cancel{\cos^2 t} \cdot |\cos t|} = \frac{\sin t}{2|\cos t|},\ t \in (0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

Дакле, еволута трактрисе су криве $\alpha_1:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}^2$ и $\alpha_2:(\frac{\pi}{2},\pi)\to\mathbb{R}^2$,

$\alpha_1(t)=\beta(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}(t)=(2\cos t+2\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}),2\sin t)+\frac{2\cos t}{\sin t}(-\sin t,\cos t)=$

$=(2\cos t+2\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}),2\sin t)+(-2\cos t,\frac{2\cos^2t}{\sin t})=(2\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}),\frac{2\sin^2t+2\cos^2t}{\sin t})=(2\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}),\frac{2}{\sin t})$

$\alpha_2(t)=\beta(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}(t)=(2\cos t+2\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}),2\sin t)+\frac{-2\cos t}{\sin t}(\sin t,-\cos t)=$

$=(2\cos t+2\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}),2\sin t)+(-2\cos t,\frac{2\cos^2t}{\sin t})=(2\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}),\frac{2\sin^2t+2\cos^2t}{\sin t})=(2\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}),\frac{2}{\sin t})$.

(еволута се састоји од две криве јер не постоји оскулаторни круг трактрисе у тачки $t=\frac{\pi}{2}$, па еволута има прекид у тој тачки).

10. Дат је кружни хеликс $\beta(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$, $a>0$, $b\neq0$, $t\in\mathbb{R}$.

а) Одредити Френеов репер, кривину и торзију ове криве. Израчунати углове које координатне равни Френеовог репера образују с z-осом.

б) Одредити параметризоване криве на јединичној сфери које описују тангентно/нормално/бинормално векторско поље дате криве транслирани у координатни почетак.

в) Одредити параметризоване криве чији су трагови на фиксираном растојању d од кружног хеликса дуж његових тангентних/нормалних/бинормалних линија.

а) $\beta'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)$

$\beta''(t)=(-a\cos t,-a\sin t,0)$

$\|\beta'(t)\|^2=(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2=a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+b^2=a^2+b^2\Rightarrow\|\beta'(t)\|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\mathbf{T}(t)=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}=\frac{(-a\sin t,a\cos t,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$\beta'(t)\times\beta''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-a\sin t&a\cos t&b\\-a\cos t&-a\sin t&0\end{vmatrix}=(ab\sin t,-ab\cos t,a^2\sin^2t+a^2\cos^2t)=(ab\sin t,-ab\cos t,a^2)$

$\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|^2=a^2b^2\sin^2t+a^2b^2\cos^2t+a^4=a^2b^2+a^4=a^2(b^2+a^2)\Rightarrow\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|=a\sqrt{a^2+b^2}$

$\mathbf{B}(t)=\frac{\beta'(t)\times\beta''(t)}{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}=\frac{(ab\sin t,-ab\cos t,a^2)}{a\sqrt{a^2+b^2}}=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$\mathbf{N}(t)=\mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t&-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t&\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t&\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t&\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{vmatrix}=$

$=\left(-\frac{b^2}{a^2+b^2}\cos t-\frac{a^2}{a^2+b^2}\cos t,-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin t-\frac{b^2}{a^2+b^2}\sin t,\cancel{\frac{ab}{a^2+b^2}\sin t\cos t}-\cancel{\frac{ab}{a^2+b^2}\sin t\cos t}\right)$

$=\left(-\frac{b^2+a^2}{a^2+b^2}\cos t,-\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\sin t,0\right)=(-\cos t,-\sin t,0)$

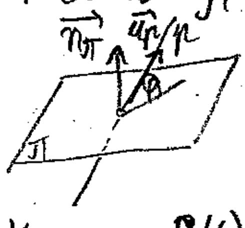
$\kappa(t)=\frac{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}$, τ

$\beta'''(t)=(a\sin t,-a\cos t,0)$, $[\beta'(t),\beta''(t),\beta'''(t)]=\langle\beta'(t)\times\beta''(t),\beta'''(t)\rangle=ab\sin t\cdot a\sin t-ab\cos t\cdot(-a\cos t)+0=$
$=a^2b\sin^2t+a^2b\cos^2t=a^2b$

$$\tau(t)=\frac{[\beta'(t),\beta''(t),\beta'''(t)]}{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|^2}=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

Координатне равни Френеовог репера су оскулаторна раван, нормална раван и ректификациона раван. Оскулаторна раван криве $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ у тачки $t\in(a,b)$ је раван која садржи тачку $\alpha(t)$, тангентни вектор $\mathbf{T}(t)$ у тој тачки и нормални вектор $\mathbf{N}(t)$ у тој тачки. Нормална раван криве $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ у тачки $t\in(a,b)$ је раван која садржи тачку $\alpha(t)$, нормални вектор $\mathbf{N}(t)$ у тој тачки и бинормални вектор $\mathbf{B}(t)$ у тој тачки. Ректификациона раван криве $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ у тачки $t\in(a,b)$ је раван која садржи тачку $\alpha(t)$, тангентни вектор $\mathbf{T}(t)$ у тој тачки и бинормални вектор $\mathbf{B}(t)$ у тој тачки. Другим речима, оскулаторна раван криве $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ у тачки $t\in(a,b)$ је раван која садржи тачку $\alpha(t)$ и нормална је на бинормалном вектору $\mathbf{B}(t)$ у тој тачки, нормална раван криве $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ у тачки $t\in(a,b)$ је раван која садржи тачку $\alpha(t)$ и нормална је на тангентном вектору $\mathbf{T}(t)$ у тој тачки, а ректификациона раван криве $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ у тачки $t\in(a,b)$ је раван која садржи тачку $\alpha(t)$ и нормална је на нормалном вектору $\mathbf{N}(t)$ у тој тачки.

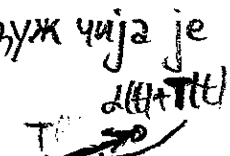
Угао између праве p и равни π:



$\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\frac{\langle\vec{n_\pi},\vec{u_p}\rangle}{\|\vec{n_\pi}\|\cdot\|\vec{u_p}\|}$, где је $\vec{n_\pi}$ вектор нормалан на равни π, а $\vec{u_p}$ вектор правца праве p (φ је угао између праве p и равни π).

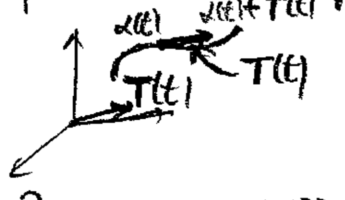
Како је $\mathbf{B}(t)$ вектор нормалан на оскулаторној равни криве β у тачки $\beta(t)$, а вектор $\vec{e_3}=(0,0,1)$ је вектор правца z-осе, следи да оскулаторна раван у тачки $\beta(t)$ заклапа са z-осом угао φ_1 такав да је $\sin\varphi_1=\frac{\langle\mathbf{B}(t),\vec{e_3}\rangle}{\underbrace{\|\mathbf{B}(t)\|}_{1}\cdot\underbrace{\|\vec{e_3}\|}_{1}}=\left\langle\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),(0,0,1)\right\rangle=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Како је $\mathbf{T}(t)$ вектор нормалан на нормалној равни криве β у тачки $\beta(t)$, следи да нормална раван у тачки $\beta(t)$ заклапа са z-осом угао φ_2 такав да је $\sin\varphi_2=\frac{\langle\mathbf{T}(t),\vec{e_3}\rangle}{\underbrace{\|\mathbf{T}(t)\|}_{1}\underbrace{\|\vec{e_3}\|}_{1}}=\left\langle\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),(0,0,1)\right\rangle=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Како је $\mathbf{N}(t)$ вектор нормалан на ректификационој равни криве β у тачки $\beta(t)$ следи да нормална раван у тачки $\beta(t)$ заклапа са z-осом угао φ_3 такав да је $\sin\varphi_3=\frac{\langle\mathbf{N}(t),\vec{e_3}\rangle}{\underbrace{\|\mathbf{N}(t)\|}_{1}\cdot\underbrace{\|\vec{e_3}\|}_{1}}=\langle(-\cos t,-\sin t,0),(0,0,1)\rangle=0$, тј. да је ректификациона раван криве β у тачки $\beta(t)$ паралелна са z-осом.

(б) Тангентни вектор $\mathbf{T}(t)$ криве $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ обично замишљамо као оријентисану дуж чија је почетна тачка тачка $\alpha(t)$, а крајња тачка је тачка $\alpha(t)+\mathbf{T}(t)$.



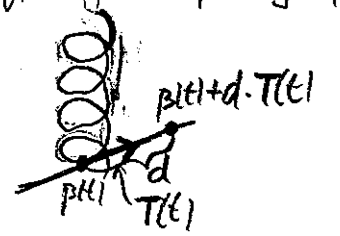
Међутим, саму вредност $\mathbf{T}(t)$ можемо схватити као тачку у простору такву да је оријентисана дуж чија је почетна тачка координатни почетак $(0,0,0)$ и крајња тачка $\mathbf{T}(t)$ представник тангентног вектора $\mathbf{T}(t)$. Према томе, крива коју описује тангентно векторско поље транслирано у координатни почетак је заправо крива $\alpha_1:(a,b)\to\mathbb{R}^3$, $\alpha_1(t)\overset{\text{деф}}{=}\mathbf{T}(t)$ (дакле, $\mathbf{T}(t)$ је заправо тачка у простору таква да је оријентисана дуж чија је почетна тачка $(0,0,0)$, а крајња тачка $\mathbf{T}(t)$

представник вектора $\mathbf{T}(t)$).



Према томе, крива коју описује тангентно векторско поље криве β транслирано у координатни почетак је крива $\beta_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\beta_1(t)=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, што је кружница у пресеку јединичне сфере и равни $z=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Сасвим слично, криве које описују нормално/бинормално векторско поље криве β транслирани у координатни почетак су редом криве $\beta_2,\beta_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\beta_2(t)=(-\cos t,-\sin t,0)$, што је кружница у пресеку јединичне сфере и равни $z=0$ и $\beta_3(t)=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, што је кружница у пресеку јединичне сфере и равни $z=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(в) Крива $\gamma_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, чија је свака тачка $\gamma_1(t)$ на растојању d од тачке $\beta(t)$ кружног хеликса дуж тангентне линије у тачки $\beta(t)$, задовољава $\gamma_1(t)=\beta(t)+d\cdot\mathbf{T}(t)$ (дакле, тачка $\gamma_1(t)$ је на растојању d од тачке $\beta(t)$ у смеру тангентног вектора $\mathbf{T}(t)$).



Сасвим слично, криве $\gamma_2,\gamma_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, чије су тачке $\gamma_2(t),\gamma_3(t)$ редом на растојању d од тачке $\beta(t)$ кружног хеликса дуж нормалне, односно бинормалне линије у тачки $\beta(t)$, задовољавају $\gamma_2(t)=\beta(t)+d\cdot\mathbf{N}(t)$ и $\gamma_3(t)=\beta(t)+d\cdot\mathbf{B}(t)$. Дакле, тражене криве су

$$\gamma_1(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)+d\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=$$
$$=\left(a\cos t-\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\ a\sin t+\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\ bt+\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

$$\gamma_2(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)+d\cdot(-\cos t,-\sin t,0)=((a-d)\cos t,(a-d)\sin t,bt);$$

$$\gamma_3(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)+d\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=$$
$$=\left(a\cos t+\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,a\sin t-\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,bt+\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

11. Нека је α просторна крива која представља скуп решења једначине у цилиндричним координатама $z=\rho=e^{2\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

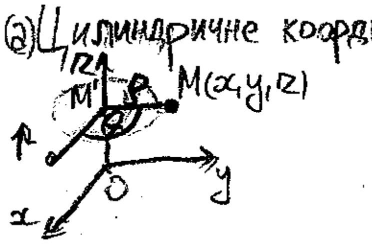
(а) Одредити параметризацију криве α, доказати да крива припада конусу $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и скицирати је. Која крива је пројекција криве α на Oxy раван?

(б) Одредити природну параметризацију криве узимајући за почетну тачку врх конуса (образложити зашто је то могуће).

(в) Одредити Френеов репер, кривину и торзију криве. Написати Френе–Сереове формуле у тачки $(0,e^{\pi},e^{\pi})$ користећи добијене вредности.

(г) Одредити једначине оскулаторне, ректификационе и нормалне равни криве у тачки $(0,e^{\pi},e^{\pi})$.

(а) Цилиндричне координате:



Ако је $M(x,y,z)$ тачка у простору, M' њена пројекција на z-оси и $M'p$ полуправа паралелна полуправој Ox, онда су цилиндричне координате тачке M растојање ρ од M' до M, угао θ од полуправе $M'p$ до $M'M$ и z-координата. Веза цилиндричних и Декартових координата је $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, z.

Како је $z=\rho=e^{2\theta}$, следи да је тражена крива $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(\theta)=(e^{2\theta}\cos\theta, e^{2\theta}\sin\theta, e^{2\theta})$. Како је $x=e^{2\theta}\cos\theta$, $y=e^{2\theta}\sin\theta$, $z=e^{2\theta}$, лако се види да је $x^2+y^2=e^{4\theta}\cos^2\theta+e^{4\theta}\sin^2\theta=e^{4\theta}=z^2$, а пошто је $z=e^{2\theta}>0$, следи да је $z=\sqrt{x^2+y^2}$, па траг криве α припада овом конусу. Пројекција криве α на Oxy равни је крива $\beta(\theta)=(e^{2\theta}\cos\theta, e^{2\theta}\sin\theta, 0)$, а препознајемо да је то логаритамска спирала $x=ca^\theta\cos\theta$, $y=ca^\theta\sin\theta$ ($c=1$, $a=e^2$).

(б) Врх конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ је тачка $(0,0,0)$. Како је $\lim\limits_{\theta\to-\infty}\alpha(\theta)=\lim\limits_{\theta\to-\infty}(e^{2\theta}\cos\theta, e^{2\theta}\sin\theta, e^{2\theta})=(0,0,0)$, можемо за почетну тачку функције дужине лука узети ту тачку ако је дужина лука криве од ње до произвољне тачке криве коначна, тј. ако одговарајући интеграл конвергира. $\alpha'(\theta)=(e^{2\theta}\cdot 2\cos\theta+e^{2\theta}\cdot(-\sin\theta), e^{2\theta}\cdot 2\sin\theta+e^{2\theta}\cos\theta, e^{2\theta}\cdot 2)$

$$\|\alpha'(\theta)\|^2=(2e^{2\theta}\cos\theta-e^{2\theta}\sin\theta)^2+(2e^{2\theta}\sin\theta+e^{2\theta}\cos\theta)^2+(2e^{2\theta})^2=4e^{4\theta}\cos^2\theta-\cancel{4e^{4\theta}\cos\theta\sin\theta}+e^{4\theta}\sin^2\theta+$$
$$+4e^{4\theta}\sin^2\theta+\cancel{4e^{4\theta}\sin\theta\cos\theta}+e^{4\theta}\cos^2\theta+4e^{4\theta}=4e^{4\theta}+e^{4\theta}+4e^{4\theta}=9e^{4\theta}$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(\theta)\|=3e^{2\theta}$$

$$s:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ s(\theta)=\int_{-\infty}^{\theta}\|\alpha'(u)\|du=\int_{-\infty}^{\theta}3e^{2u}du=\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\theta}e^{2u}d(2u)=\frac{3}{2}e^{2u}\Big|_{-\infty}^{\theta}=\frac{3}{2}e^{2\theta} \text{ — конвергира}$$

$$s=\frac{3}{2}e^{2\theta}\Rightarrow e^{2\theta}=\frac{2s}{3}\Rightarrow \theta=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2s}{3}\right),\ s>0$$

$\gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^3$ репараметризација криве α природним параметром

$$\gamma(s)=\alpha\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2s}{3}\right)\right)=\left(\frac{2s}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2s}{3}\right)\right), \frac{2s}{3}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2s}{3}\right)\right), \frac{2s}{3}\right)$$

Могуће је за почетну тачку узети врх конуса јер је дужина лука криве од њега до произвољне тачке криве коначна.

(в) $$\alpha''(\theta)=(2\cdot e^{2\theta}\cdot 2\cos\theta+2\cdot e^{2\theta}\cdot(-\sin\theta)-e^{2\theta}\cdot 2\sin\theta-e^{2\theta}\cdot\cos\theta, 2\cdot e^{2\theta}\cdot 2\sin\theta+2e^{2\theta}\cos\theta+e^{2\theta}\cdot 2\cos\theta+e^{2\theta}\cdot(-\sin\theta), 2e^{2\theta}\cdot 2)$$
$$=(3e^{2\theta}\cos\theta-4e^{2\theta}\sin\theta, 3e^{2\theta}\sin\theta+4e^{2\theta}\cos\theta, 4e^{2\theta})$$

$$\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2e^{2\theta}\cos\theta-e^{2\theta}\sin\theta & 2e^{2\theta}\sin\theta+e^{2\theta}\cos\theta & 2e^{2\theta}\\ 3e^{2\theta}\cos\theta-4e^{2\theta}\sin\theta & 3e^{2\theta}\sin\theta+4e^{2\theta}\cos\theta & 4e^{2\theta}\end{vmatrix}=(8e^{4\theta}\sin\theta+4e^{4\theta}\cos\theta-6e^{4\theta}\sin\theta-8e^{4\theta}\cos\theta,$$
$$6e^{4\theta}\cos\theta-8e^{4\theta}\sin\theta-8e^{4\theta}\cos\theta+4e^{4\theta}\sin\theta, \cancel{6e^{4\theta}\cos\theta\sin\theta}+8e^{4\theta}\cos^2\theta-3e^{4\theta}\sin^2\theta-\cancel{4e^{4\theta}\sin\theta\cos\theta}-\cancel{6e^{4\theta}\cos\theta\sin\theta}-3e^{4\theta}\cos^2\theta$$
$$+8e^{4\theta}\sin^2\theta+\cancel{4e^{4\theta}\sin\theta\cos\theta})=(2e^{4\theta}\sin\theta-4e^{4\theta}\cos\theta, -2e^{4\theta}\cos\theta-4e^{4\theta}\sin\theta, 8e^{4\theta}-3e^{4\theta})$$

$$\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|^2=4e^{8\theta}\sin^2\theta-\cancel{16e^{8\theta}\sin\theta\cos\theta}+16e^{8\theta}\cos^2\theta+4e^{8\theta}\cos^2\theta+\cancel{16e^{8\theta}\cos\theta\sin\theta}+16e^{8\theta}\sin^2\theta+25e^{8\theta}=$$
$$=4e^{8\theta}+16e^{8\theta}+25e^{8\theta}=45e^{8\theta}\Rightarrow\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|=3\sqrt{5}e^{4\theta}$$

$$T(\theta)=\frac{\alpha'(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\|}=\frac{(2e^{2\theta}\cos\theta-e^{2\theta}\sin\theta,\ 2e^{2\theta}\sin\theta+e^{2\theta}\cos\theta,\ 2e^{2\theta})}{3e^{2\theta}}=\left(\frac{2}{3}\cos\theta-\frac{1}{3}\sin\theta,\ \frac{2}{3}\sin\theta+\frac{1}{3}\cos\theta,\ \frac{2}{3}\right)$$

$$B(\theta)=\frac{\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|}=\frac{(2e^{4\theta}\sin\theta-4e^{4\theta}\cos\theta,\ -2e^{4\theta}\cos\theta-4e^{4\theta}\sin\theta,\ 5e^{4\theta})}{3\sqrt5 e^{4\theta}}=\left(\frac{2}{3\sqrt5}\sin\theta-\frac{4}{3\sqrt5}\cos\theta,\ -\frac{2}{3\sqrt5}\cos\theta-\frac{4}{3\sqrt5}\sin\theta,\ \frac{5}{3\sqrt5}\right)$$

$$N(\theta)=B(\theta)\times T(\theta)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{2}{3\sqrt5}\sin\theta-\frac{4}{3\sqrt5}\cos\theta & -\frac{2}{3\sqrt5}\cos\theta-\frac{4}{3\sqrt5}\sin\theta & \frac{5}{3\sqrt5}\\ \frac{2}{3}\cos\theta-\frac{1}{3}\sin\theta & \frac{2}{3}\sin\theta+\frac{1}{3}\cos\theta & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=\left(-\frac{4}{9\sqrt5}\cos\theta-\frac{8}{9\sqrt5}\sin\theta-\frac{10}{9\sqrt5}\sin\theta-\frac{5}{9\sqrt5}\cos\theta,\ \frac{10}{9\sqrt5}\cos\theta-\frac{5}{9\sqrt5}\sin\theta-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{9\sqrt5}\sin\theta+\frac{8}{9\sqrt5}\cos\theta,\ \cancel{\frac{4}{9\sqrt5}\sin^2\theta}+\cancel{\frac{2}{9\sqrt5}\sin\theta\cos\theta}-\cancel{\frac{8}{9\sqrt5}\cos\theta\sin\theta}-\cancel{\frac{4}{3\sqrt5}\cos^2\theta}+\cancel{\frac{4}{9\sqrt5}\cos^2\theta}+\cancel{\frac{8}{9\sqrt5}\cos\theta\sin\theta}-\cancel{\frac{2}{9\sqrt5}\sin\theta\cos\theta}-\cancel{\frac{4}{9\sqrt5}\sin^2\theta}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt5}\cos\theta-\frac{2}{\sqrt5}\sin\theta,\ \frac{2}{\sqrt5}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt5}\sin\theta,\ 0\right)$$

$$\kappa(\theta)=\frac{\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|}{\|\alpha'(\theta)\|^3}=\frac{3\sqrt5 e^{4\theta}}{27e^{6\theta}}=\frac{\sqrt5}{9e^{2\theta}}$$

$$\alpha'''(\theta)=\left(3e^{2\theta}\cdot2\cos\theta+3e^{2\theta}(-\sin\theta)-4e^{2\theta}\cdot2\sin\theta-4e^{2\theta}\cos\theta,\ 3e^{2\theta}\cdot2\sin\theta+3e^{2\theta}\cos\theta+4e^{2\theta}\cdot2\cos\theta+4e^{2\theta}(-\sin\theta),\ 4e^{2\theta}\cdot2\right)=$$

$$=\left(2e^{2\theta}\cos\theta-11e^{2\theta}\sin\theta,\ 2e^{2\theta}\sin\theta+11e^{2\theta}\cos\theta,\ 8e^{2\theta}\right)$$

$$[\alpha'(\theta),\alpha''(\theta),\alpha'''(\theta)]=\langle\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta),\alpha'''(\theta)\rangle=(2e^{4\theta}\sin\theta-4e^{4\theta}\cos\theta)\cdot(2e^{2\theta}\cos\theta-11e^{2\theta}\sin\theta)+$$

$$+(-2e^{4\theta}\cos\theta-4e^{4\theta}\sin\theta)\cdot(2e^{2\theta}\sin\theta+11e^{2\theta}\cos\theta)+5e^{4\theta}\cdot8e^{2\theta}=\cancel{4e^{6\theta}\sin\theta\cos\theta}-22e^{6\theta}\sin^2\theta-8e^{6\theta}\cos^2\theta\cancel{+44e^{6\theta}\cos\theta\sin\theta}$$

$$\cancel{-4e^{6\theta}\cos\theta\sin\theta}-22e^{6\theta}\cos^2\theta-8e^{6\theta}\sin^2\theta\cancel{-44e^{6\theta}\sin\theta\cos\theta}+40e^{6\theta}=-22e^{6\theta}-8e^{6\theta}+40e^{6\theta}=10e^{6\theta}$$

$$\tau(\theta)=\frac{[\alpha'(\theta),\alpha''(\theta),\alpha'''(\theta)]}{\|\alpha'(\theta)\times\alpha''(\theta)\|^2}=\frac{10e^{6\theta}}{45e^{8\theta}}=\frac{2}{9e^{2\theta}}$$

Тачка $(0,e^{\pi},e^{\pi})$ се добија за $\theta=\frac{\pi}{2}$, тј. $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2},\ e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2},\ e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}\right)=(0,e^{\pi},e^{\pi})$.

Френе-Сереове формуле су:

$$T'(\theta)=\upsilon(\theta)\kappa(\theta)N(\theta)$$
$$N'(\theta)=-\upsilon(\theta)\kappa(\theta)T(\theta)+\upsilon(\theta)\tau(\theta)B(\theta)$$
$$B'(\theta)=-\upsilon(\theta)\tau(\theta)N(\theta)$$

где је $\upsilon(\theta)=\|\alpha'(\theta)\|=3e^{2\theta}$ интензитет вектора брзине. Дакле, у тачки $\theta=\frac{\pi}{2}$ је

$$T'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=3e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt5}{9e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}}\left(-\frac{1}{\sqrt5}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\sqrt5}\sin\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{\sqrt5}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt5}\sin\frac{\pi}{2},\ 0\right)=\frac{\sqrt5}{3}\left(-\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5},0\right)=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\right)$$

$$T'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{2}{3}\sin\theta-\frac{1}{3}\cos\theta,\ \frac{2}{3}\cos\theta-\frac{1}{3}\sin\theta,\ 0\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\right)$$

$$N'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=-3e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt5}{9e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\right)+3e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{2}{9e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{2}{3\sqrt5}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3\sqrt5}\cos\frac{\pi}{2},\ -\frac{2}{3\sqrt5}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3\sqrt5}\sin\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{3\sqrt5}\right)=$$

$$=-\frac{5}{3\sqrt5}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3\sqrt5},-\frac{4}{3\sqrt5},\frac{5}{3\sqrt5}\right)=\left(\frac{5}{9\sqrt5},-\frac{10}{9\sqrt5},-\frac{10}{9\sqrt5}\right)+\left(\frac{4}{9\sqrt5},-\frac{8}{9\sqrt5},\frac{10}{9\sqrt5}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5},0\right)$$

$$N'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt5}\sin\theta-\frac{2}{\sqrt5}\cos\theta,\ -\frac{2}{\sqrt5}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt5}\cos\theta,\ 0\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5},0\right)$$

$$B'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=-3e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{2}{9e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}}\left(-\frac{1}{\sqrt5}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\sqrt5}\sin\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{\sqrt5}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt5}\sin\frac{\pi}{2},\ 0\right)=-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5},0\right)=\left(\frac{4}{3\sqrt5},\frac{2}{3\sqrt5},0\right)$$

$$B'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{2}{3\sqrt5}\cos\theta+\frac{4}{3\sqrt5}\sin\theta,\ \frac{2}{3\sqrt5}\sin\theta-\frac{4}{3\sqrt5}\cos\theta,\ 0\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{4}{3\sqrt5},\frac{2}{3\sqrt5},0\right)$$

(в) Оскулаторна раван криве у тачки $(0,e^{\pi},e^{\pi})=\alpha(\frac{\pi}{2})$ је раван која садржи ту тачку и нормална је на бинормалном вектору $\mathbf{B}(\frac{\pi}{2})$ у тој тачки (тј. садржи тангентни вектор $\mathbf{T}(\frac{\pi}{2})$ и нормални вектор $\mathbf{N}(\frac{\pi}{2})$ у тој тачки). Како је $\mathbf{B}(\frac{\pi}{2})=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},-\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$, једначина оскулаторне равни је $\frac{2}{3\sqrt{5}}(x-0)-\frac{4}{3\sqrt{5}}(y-e^{\pi})+\frac{5}{3\sqrt{5}}(z-e^{\pi})=0$. Након мањег сређивања добија се $2x-4y+4e^{\pi}+5z-5e^{\pi}=0$, тј. $2x-4y+5z-e^{\pi}=0$.

Ректификациона раван криве у тачки $(0,e^{\pi},e^{\pi})=\alpha(\frac{\pi}{2})$ је раван која садржи ту тачку и нормална је на нормалном вектору $\mathbf{N}(\frac{\pi}{2})$ у тој тачки (тј. садржи тангентни вектор $\mathbf{T}(\frac{\pi}{2})$ и бинормални вектор $\mathbf{B}(\frac{\pi}{2})$ у тој тачки). Како је $\mathbf{N}(\frac{\pi}{2})=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$, једначина ректификационе равни је $-\frac{2}{\sqrt{5}}(x-0)-\frac{1}{\sqrt{5}}(y-e^{\pi})+0\cdot(z-e^{\pi})=0$. Након мањег сређивања добија се $-2x-y+e^{\pi}=0$, тј. $2x+y-e^{\pi}=0$.

Нормална раван криве у тачки $(0,e^{\pi},e^{\pi})=\alpha(\frac{\pi}{2})$ је раван која садржи ту тачку и нормална је на тангентном вектору $\mathbf{T}(\frac{\pi}{2})$ у тој тачки (тј. садржи нормални вектор $\mathbf{N}(\frac{\pi}{2})$ и бинормални вектор $\mathbf{B}(\frac{\pi}{2})$ у тој тачки). Како је $\mathbf{T}(\frac{\pi}{2})=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, једначина нормалне равни је $-\frac{1}{3}(x-0)+\frac{2}{3}(y-e^{\pi})+\frac{2}{3}(z-e^{\pi})=0$. Након мало сређивања добија се $-x+2y-2e^{\pi}+2z-2e^{\pi}=0$, тј. $x-2y-2z+4e^{\pi}=0$.

12. Дата је регуларна раванска крива α и тачке P и Q ван ње. Нека је M_0 тачка криве у којој збир растојања $PM+QM$, $M\in\alpha$, достиже минимум. Доказати да је симетрала угла $\measuredangle PM_0Q$ нормална на тангенту криве α у тачки M_0.

Нека је $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, задата регуларна крива и нека је $M_0=\alpha(t_0)$ за неко $t_0\in I$. Дефинишимо функцију $f: I\to\mathbb{R}$, $f(t)=\sqrt{\langle\alpha(t)-P,\alpha(t)-P\rangle}+\sqrt{\langle\alpha(t)-Q,\alpha(t)-Q\rangle}$. Тада је $f(t)$ збир растојања $PM+QM$, где је $M=\alpha(t)$ (заиста, $PM=\|\overrightarrow{PM}\|=\sqrt{\langle\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PM}\rangle}=\sqrt{\langle\alpha(t)-P,\alpha(t)-P\rangle}$ и $QM=\|\overrightarrow{QM}\|=\sqrt{\langle\overrightarrow{QM},\overrightarrow{QM}\rangle}=\sqrt{\langle\alpha(t)-Q,\alpha(t)-Q\rangle}$). Како је $M_0=\alpha(t_0)$, следи да функција f достиже локални минимум у тачки t_0 (јер је $f(t_0)=PM_0+QM_0$), па је $f'(t_0)=0$.

Ако су $g,h: I\to\mathbb{R}^2$ функције, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, $g(t)=(g_1(t),g_2(t))$, $h(t)=(h_1(t),h_2(t))$, онда је $\langle g(t),h(t)\rangle=\langle(g_1(t),g_2(t)),(h_1(t),h_2(t))\rangle=g_1(t)h_1(t)+g_2(t)h_2(t)$, па је

$$\frac{d}{dt}\langle g(t),h(t)\rangle=g_1'(t)h_1(t)+g_1(t)h_1'(t)+g_2'(t)h_2(t)+g_2(t)h_2'(t)=\langle(g_1'(t),g_2'(t)),(h_1(t),h_2(t))\rangle+$$
$$+\langle(g_1(t),g_2(t)),(h_1'(t),h_2'(t))\rangle=\langle g'(t),h(t)\rangle+\langle g(t),h'(t)\rangle.$$

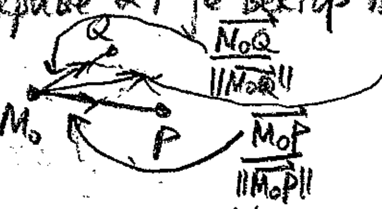
Дакле, Лајбницово правило (извод производа) важи и за скаларни производ. Такође, оно важи и ако су $g,h: I\to\mathbb{R}^3$, а важи и за векторски производ $\times$.

Према томе,
$$0=f'(t_0)=\left[\frac{1}{2\sqrt{\langle\alpha(t)-P,\alpha(t)-P\rangle}}\cdot\left(\langle\alpha'(t),\alpha(t)-P\rangle+\langle\alpha(t)-P,\alpha'(t)\rangle\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{\langle\alpha(t)-Q,\alpha(t)-Q\rangle}}\cdot\left(\langle\alpha'(t),\alpha(t)-Q\rangle+\langle\alpha(t)-Q,\alpha'(t)\rangle\right)\right]\Bigg|_{t=t_0}=$$

$$=\frac{2\langle\alpha'(t_0),\alpha(t_0)-P\rangle}{2\sqrt{\langle\alpha(t_0)-P,\alpha(t_0)-P\rangle}}+\frac{2\langle\alpha'(t_0),\alpha(t_0)-Q\rangle}{2\sqrt{\langle\alpha(t_0)-Q,\alpha(t_0)-Q\rangle}}=\left\langle\alpha'(t_0),\frac{\alpha(t_0)-P}{\|\alpha(t_0)-P\|}\right\rangle+\left\langle\alpha'(t_0),\frac{\alpha(t_0)-Q}{\|\alpha(t_0)-Q\|}\right\rangle=$$

$$=\left\langle\alpha'(t_0),\frac{\alpha(t_0)-P}{\|\alpha(t_0)-P\|}+\frac{\alpha(t_0)-Q}{\|\alpha(t_0)-Q\|}\right\rangle=\left\langle\alpha'(t_0),\frac{\overrightarrow{PM_0}}{\|\overrightarrow{PM_0}\|}+\frac{\overrightarrow{QM_0}}{\|\overrightarrow{QM_0}\|}\right\rangle=-\left\langle\alpha'(t_0),\frac{\overrightarrow{M_0P}}{\|\overrightarrow{M_0P}\|}+\frac{\overrightarrow{M_0Q}}{\|\overrightarrow{M_0Q}\|}\right\rangle$$

Дакле, $0=-\left\langle\alpha'(t_0),\frac{\overrightarrow{M_0P}}{\|\overrightarrow{M_0P}\|}+\frac{\overrightarrow{M_0Q}}{\|\overrightarrow{M_0Q}\|}\right\rangle$, па је $\alpha'(t_0)\perp\frac{\overrightarrow{M_0P}}{\|\overrightarrow{M_0P}\|}+\frac{\overrightarrow{M_0Q}}{\|\overrightarrow{M_0Q}\|}$. Како је вектор правца симетрале угла $\measuredangle PM_0Q$ управо вектор $\frac{\overrightarrow{M_0P}}{\|\overrightarrow{M_0P}\|}+\frac{\overrightarrow{M_0Q}}{\|\overrightarrow{M_0Q}\|}$ (потребно је да се саберу вектори исте дужине, у смеру кракова угла $\measuredangle PM_0Q$ (што су M_0P и M_0Q), да би на основу правила паралелограма њихов збир ишао по дијагонали тог паралелограма; како се сабирају вектори исте дужине, паралелограм је ромб, па је његова дијагонала симетрала угла), а $\alpha'(t_0)\neq\vec{0}$ (због регуларности криве α) је вектор правца тангенте криве α у тачки $M_0=\alpha(t_0)$, тврђење је доказано.



њихов векторски збир је дијагонала ромба, па је уједно и симетрала угла $\measuredangle PM_0Q$

13. (а) Доказати да постоји јединствено векторско поље $X(t)$ (Дарбуово векторско поље) дуж криве $\alpha=\alpha(t)$ параметризоване произвољним параметром, за које важи:
$\mathbf{T}'=X\times\mathbf{T},\ \mathbf{N}'=X\times\mathbf{N},\ \mathbf{B}'=X\times\mathbf{B}$.

(б) Одредити Дарбуов вектор кружног хеликса.

(а) Како у свакој тачки $\alpha(t)$ криве $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, вектори $\mathbf{T}(t),\mathbf{N}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ Френеовог репера чине ОНБ, онда постоје бројеви $f(t),g(t),h(t)\in\mathbb{R}$ такви да је $\mathbf{X}(t)=f(t)\mathbf{T}(t)+g(t)\mathbf{N}(t)+h(t)\mathbf{B}(t)$ (изражавање вектора $X(t)$ у тој ОНБ је једнозначно). Из Френе-Серeових формула $\mathbf{T}'(t)=\nu(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{N}'(t)=-\nu(t)\kappa(t)\mathbf{T}(t)+\nu(t)\tau(t)\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{B}'(t)=-\nu(t)\tau(t)\mathbf{N}(t)$ ($\nu(t)\overset{\text{def}}{=}\|\alpha'(t)\|$ је интензитет вектора брзине, $\kappa(t)$ је кривина, а $\tau(t)$ је торзија криве α у тачки $t\in I$) следе једначине:

$$(f(t)\mathbf{T}(t)+g(t)\mathbf{N}(t)+h(t)\mathbf{B}(t))\times\mathbf{T}(t)=\mathbf{X}(t)\times\mathbf{T}(t)=\mathbf{T}'(t)=\nu(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t)$$
$$(f(t)\mathbf{T}(t)+g(t)\mathbf{N}(t)+h(t)\mathbf{B}(t))\times\mathbf{N}(t)=X(t)\times\mathbf{N}(t)=\mathbf{N}'(t)=-\nu(t)\kappa(t)\mathbf{T}(t)+\nu(t)\tau(t)\mathbf{B}(t)$$
$$(f(t)\mathbf{T}(t)+g(t)\mathbf{N}(t)+h(t)\mathbf{B}(t))\times\mathbf{B}(t)=\mathbf{X}(t)\times\mathbf{B}(t)=\mathbf{B}'(t)=-\nu(t)\tau(t)\mathbf{N}(t)$$

$$f(t)\cdot\vec{0}+g(t)\underbrace{\mathbf{N}(t)\times\mathbf{T}(t)}_{-\mathbf{B}(t)}+h(t)\underbrace{\mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t)}_{\mathbf{N}(t)}=\nu(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t)$$
$$f(t)\underbrace{\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)}_{\mathbf{B}(t)}+g(t)\cdot\vec{0}+h(t)\underbrace{\mathbf{B}(t)\times\mathbf{N}(t)}_{-\mathbf{T}(t)}=-\nu(t)\kappa(t)\mathbf{T}(t)+\nu(t)\tau(t)\mathbf{B}(t)$$
$$f(t)\cdot\underbrace{\mathbf{T}(t)\times\mathbf{B}(t)}_{-\mathbf{N}(t)}+g(t)\cdot\underbrace{\mathbf{N}(t)\times\mathbf{B}(t)}_{\mathbf{T}(t)}+h(t)\vec{0}=-\nu(t)\tau(t)\mathbf{N}(t)$$

$$-g(t)\mathbf{B}(t)+h(t)\mathbf{N}(t)=\nu(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t)$$
$$f(t)\mathbf{B}(t)-h(t)\mathbf{T}(t)=-\nu(t)\kappa(t)\mathbf{T}(t)+\nu(t)\tau(t)\mathbf{B}(t)$$
$$-f(t)\mathbf{N}(t)+g(t)\mathbf{T}(t)=-\nu(t)\tau(t)\mathbf{N}(t)$$

Из линеарне независности вектора $\mathbf{T}(t),\mathbf{N}(t),\mathbf{B}(t)$ следи да је $f(t)=\nu(t)\tau(t)$, $g(t)=0$, $h(t)=\nu(t)\kappa(t)$

Према томе, постоји јединствено векторско поље $X(t)=\upsilon(t)\tau(t)T(t)+\upsilon(t)\kappa(t)B(t)$ за које важи: $T'=X\times T$, $N'=X\times N$, $B'=X\times B$.

(б) Кружни хеликс је крива $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, $a>0$, $b\neq 0$. На основу дела (а), његово Дарбуово векторско поље је $X(t)=\upsilon(t)\tau(t)T(t)+\upsilon(t)\kappa(t)B(t)$, па треба одредити $T, B, \upsilon, \kappa, \tau$.

$\alpha'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$

$\|\alpha'(t)\|^2=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2=a^2+b^2 \Rightarrow \|\alpha'(t)\|=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \upsilon(t)=\sqrt{a^2+b^2}$.

$$T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}=\frac{(-a\sin t, a\cos t, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$\alpha''(t)=(-a\cos t, -a\sin t, 0)$

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=(ab\sin t, -ab\cos t, a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t)=(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2=a^2b^2\sin^2 t+a^2b^2\cos^2 t+a^4=a^2b^2+a^4=a^2(b^2+a^2)\Rightarrow \|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|=a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$B(t)=\frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}=\frac{(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)}{a\sqrt{a^2+b^2}}=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\kappa(t)=\frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$\alpha'''(t)=(a\sin t, -a\cos t, 0)$

$[\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)]=\langle\alpha'(t)\times\alpha''(t),\alpha'''(t)\rangle=ab\sin t\cdot a\sin t+(-ab\cos t)\cdot(-a\cos t)+0=a^2b\sin^2 t+a^2b\cos^2 t=a^2b$

$$\tau(t)=\frac{[\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2}=\frac{\cancel{a^2}b}{\cancel{a^2}(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

Дакле, Дарбуово векторско поље кружног хеликса је

$$X(t)=\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{a^2+b^2}\cdot\left(-\frac{a}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\sin t, \frac{a}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos t, \frac{b}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\right)+\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{b}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\sin t, -\frac{b}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos t, \frac{a}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\right)=$$

$$=\left(-\frac{ab}{a^2+b^2}\sin t, \frac{ab}{a^2+b^2}\cos t, \frac{b^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\sin t, -\frac{ab}{a^2+b^2}\cos t, \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)=\left(0,0,\frac{b^2+a^2}{a^2+b^2}\right)=(0,0,1).$$

14. Доказати да за природно параметризовану криву важи:

(а) $[B',B'',B''']=\tau^5\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$, $\kappa,\tau\neq 0$

(б) (домаћи) $[T',T'',T''']=\kappa^5\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$, $\kappa\neq 0$

(а) За природно параметризовану криву $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, важи $\upsilon(s)=1$, за свако $s\in I$, тј. $\|\alpha'(s)\|=1$, за свако $s\in I$. Зато су Френе–Серeове формуле за природно параметризоване криве облика: $T'(s)=\kappa(s)N(s)$, $N'(s)=-\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)$, $B'(s)=-\tau(s)N(s)$.

$B'=-\tau N$, $B''=-\tau' N-\tau N'=-\tau' N-\tau(-\kappa T+\tau B)=\tau\kappa T-\tau' N-\tau^2 B$

$B'''=(\tau'\kappa+\tau\kappa')T+\tau\kappa T'-\tau'' N-\tau' N'-2\tau\tau' B-\tau^2 B'=(\tau'\kappa+\tau\kappa')T+\tau\kappa\cdot\kappa N-\tau' N-\tau'(-\kappa T+\tau B)-2\tau\tau' B-\tau^2(-\tau N)=(\tau'\kappa+\tau\kappa'+\tau'\kappa)T+(\tau\kappa^2-\tau''+\tau^3)N+(-\tau\tau'-2\tau\tau')B=(2\tau'\kappa+\tau\kappa')T+(\tau\kappa^2-\tau''+\tau^3)N-3\tau\tau' B$

$[B',B'',B''']=\langle B'\times B'', B'''\rangle$

$$B'\times B''=(-\tau N)\times(\tau\kappa T-\tau' N-\tau^2 B)=-\tau^2\kappa\overbrace{N\times T}^{-B}+\tau\tau'\vec{0}+\tau^3\overbrace{N\times B}^{T}=\tau^3 T+\tau^2\kappa B$$

$$[B',B'',B'''] = \langle \tau^3 T + \tau^2 \kappa B, (2\tau'\kappa+\tau\kappa')T + (\tau\kappa^2 - \tau'' + \tau^3)N + 3\tau\tau' B\rangle =$$
$$= 2\tau^3\tau'\kappa + \tau^4\kappa' - 3\tau^3\tau'\kappa = \tau^3(2\tau'\kappa+\tau\kappa'-3\tau'\kappa) = \tau^3(\kappa'\tau - \kappa\tau') = \tau^5 \frac{\kappa'\tau-\kappa\tau'}{\tau^2} = \tau^5\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'.$$

б) $T' = \kappa N$, $T'' = \kappa' N + \kappa N' = \kappa'N + \kappa(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B$

$$T''' = -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 T' + \kappa'' N + \kappa' N' + (\kappa'\tau + \kappa\tau')B + \kappa\tau B' = -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 \kappa N + \kappa'' N + \kappa'(-\kappa T + \tau B) + (\kappa'\tau+\kappa\tau')B$$
$$+ \kappa\tau(-\tau N) = (-2\kappa'\kappa - \kappa'\kappa)T + (-\kappa^3 + \kappa'' - \kappa\tau^2)N + (\kappa'\tau + \kappa'\tau + \kappa\tau')B = -3\kappa'\kappa T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B$$

$$[T',T'',T'''] = \langle T'\times T'', T'''\rangle$$
$$T'\times T'' = (\kappa N)\times(-\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B) = -\kappa^3 \overbrace{N\times T}^{-B} + \kappa\kappa' \cdot 0 + \kappa^2\tau \overbrace{N\times B}^{T} = \kappa^2\tau T + \kappa^3 B$$
$$[T',T'',T'''] = \langle \kappa^2\tau T + \kappa^3 B, -3\kappa'\kappa T + (\kappa''-\kappa^3-\kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau+\kappa\tau')B\rangle =$$
$$= -3\kappa^3\kappa'\tau + 2\kappa^3\kappa'\tau + \kappa^4\tau' = \kappa^3(-3\kappa'\tau + 2\kappa'\tau + \kappa\tau') = \kappa^3(\tau'\kappa - \tau\kappa') = \kappa^5\frac{\tau'\kappa-\tau\kappa'}{\kappa^2} = \kappa^5\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

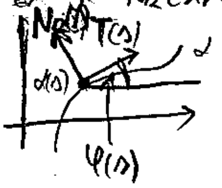
15. Одредити параметризацију раванске криве (до на директну изометријску трансформацију равни) чија је дата означена кривина у зависности од природног параметра s и доказати да је у питању назначена крива:

(а) $k_2(s) = \frac{1}{as+b}$ $(a\neq 0)$ — логаритамска спирала;

(б) $k_2(s)=\frac{a}{a^2+s^2}$ $(a\neq 0)$ — ланчаница;

(в) $k_2(s) = \frac{1}{\sqrt{as}}$ $(a>0)$ — кружна инволута.

Нека је $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, природно параметризована крива. Тада је за свако $s\in I$ интензитет вектора брзине једнак 1, тј. $\|\alpha'(s)\|=1$ за свако $s\in I$. Према томе, важи $T(s)=\alpha'(s)$. Такође, пошто је $v(s)=\|\alpha'(s)\|=1$, из Френе-Сереових формула следи да је $T'(s)=v(s)\kappa(s)N(s)=\kappa(s)N(s)$. Сетимо се да је означена нормала $N_2(s)$ вектор такав да $(T(s),N_2(s))$ чине позитивно оријентисану ОНБ равни и да је означена кривина функција $k_2: I\to\mathbb{R}$ таква да је $k_2(s)N_2(s)=\kappa(s)N(s)$.



Тангентни вектор $T(s)$ је јединични вектор у равни. Као такав, он гради угао $\varphi(s)$ са јединичним вектором $\vec{e}_1=(1,0)$ x-осе, па следи да је

$$T(s)=\begin{pmatrix}\cos\varphi(s) & -\sin\varphi(s)\\ \sin\varphi(s) & \cos\varphi(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi(s)\\ \sin\varphi(s)\end{pmatrix} = (\cos\varphi(s),\sin\varphi(s)).$$

$$T'(s) = (-\sin\varphi(s)\cdot\varphi'(s), \cos\varphi(s)\cdot\varphi'(s)) = \varphi'(s)(-\sin\varphi(s),\cos\varphi(s)).$$

Вектор $N_2(s)$ гради угао $\varphi(s)+\frac{\pi}{2}$ с вектором $\vec{e}_1$, јер $(T(s),N_2(s))$ чине позитивно оријентисану ОНБ равни, па је

$$N_2(s)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi(s)+\frac{\pi}{2}) & -\sin(\varphi(s)+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\varphi(s)+\frac{\pi}{2}) & \cos(\varphi(s)+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi(s) & -\cos\varphi(s)\\ \cos\varphi(s) & -\sin\varphi(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi(s)\\ \cos\varphi(s)\end{pmatrix} = (-\sin\varphi(s),\cos\varphi(s)).$$

Следи да је $k_2(s)N_2(s)=\kappa(s)N(s)=T'(s)=\varphi'(s)(-\sin\varphi(s),\cos\varphi(s))=\varphi'(s)N_2(s)$, па је $\varphi'(s)=k_2(s)$.

(а) Дакле, $\varphi'(s)=k_2(s)=\frac{1}{as+b}$, па је $\varphi(s)=\int\frac{1}{as+b}ds=\frac{1}{a}\int\frac{d(as+b)}{as+b}=\frac{1}{a}\ln|as+b|+\varphi_0$. Пошто се тражи да пронађемо криву до на директну изометријску трансформацију равни, смемо да заротирамо криву око координатног почетка за угао $-\varphi_0$. Тиме се и сви њени тангентни вектори $T(s)$ ротирају за угао $-\varphi_0$, па се добија да је $\varphi(s)=\frac{1}{a}\ln|as+b|+\varphi_0-\varphi_0=\frac{1}{a}\ln|as+b|$. Дакле, $T(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))=\left(\cos\left(\frac{1}{a}\ln|as+b|\right),\sin\left(\frac{1}{a}\ln|as+b|\right)\right)$, па како је $T(s)=\alpha'(s)$, следи да је $\alpha'(s)=\left(\cos\left(\frac{1}{a}\ln|as+b|\right),\sin\left(\frac{1}{a}\ln|as+b|\right)\right)$, па је $\alpha(s)=\left(\int\cos\left(\frac{1}{a}\ln|as+b|\right)ds,\int\sin\left(\frac{1}{a}\ln|as+b|\right)ds\right)$.

Домен криве α је неки отворени интервал $I\subset\mathbb{R}$. Према томе, пошто је $as+b\neq 0$, тј. $s\neq -\frac{b}{a}$, домен криве је $(-\infty,-\frac{b}{a})$ или $(-\frac{b}{a},+\infty)$. Претпоставимо да је $a>0$ и да је домен криве $(-\frac{b}{a},+\infty)$ (тада је $s>-\frac{b}{a}$, па је $as+b>0$).

$$\int\cos\left(\frac{1}{a}\ln(as+b)\right)ds=\left\{\begin{array}{l}\text{смена: } \frac{1}{a}\ln(as+b)=t\\ as+b=e^{at}\\ s=\frac{1}{a}(e^{at}-b)\ \ ds=\frac{1}{a}e^{at}\cdot a\,dt\end{array}\right\}=\int\cos t\cdot e^{at}dt=\left\{\begin{array}{l}u=\cos t\ \ dv=e^{at}dt\\ du=-\sin t\,dt,\ v=\frac{1}{a}e^{at}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}e^{at}\cos t+\frac{1}{a}\int e^{at}\sin t\,dt=\left\{\begin{array}{l}u=\sin t,\ dv=e^{at}dt\\ du=\cos t\,dt,\ v=\frac{1}{a}e^{at}\end{array}\right\}=\frac{1}{a}e^{at}\cos t+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{at}\sin t-\frac{1}{a}\int e^{at}\cos t\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{a}e^{at}\cos t+\frac{1}{a^2}e^{at}\sin t-\frac{1}{a^2}\int e^{at}\cos t\,dt+C$$

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\int\cos t\,e^{at}dt=\frac{1}{a}e^{at}\cos t+\frac{1}{a^2}e^{at}\sin t+C$$

$$\int\cos t\,e^{at}dt=\frac{a^2}{a^2+1}\left(\frac{1}{a}e^{at}\cos t+\frac{1}{a^2}e^{at}\sin t+C\right)=\frac{a}{a^2+1}e^{at}\cos t+\frac{1}{a^2+1}e^{at}\sin t+c,\quad c=\frac{a^2C}{a^2+1}$$

Ако је $t_0\in[0,2\pi)$ такво да је $\cos t_0=\dfrac{\frac{a}{a^2+1}}{\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{1}{(a^2+1)^2}}}=\dfrac{\frac{a}{a^2+1}}{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ и $\sin t_0=\dfrac{\frac{1}{a^2+1}}{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$,

онда је $\int\cos t\,e^{at}dt=\frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\sin t\right)+c=\frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}(\cos t_0\cos t+\sin t_0\sin t)+c=\frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}\cos(t-t_0)+c.$

$$\int\sin\left(\frac{1}{a}\ln(as+b)\right)ds=\left\{\begin{array}{l}\text{смена: } \frac{1}{a}\ln(as+b)=t\\ as+b=e^{at}\\ s=\frac{1}{a}(e^{at}-b)\ \ ds=\frac{1}{a}e^{at}\cdot a\,dt\end{array}\right\}=\int\sin t\cdot e^{at}dt=\left\{\begin{array}{l}u=\sin t\ \ dv=e^{at}dt\\ du=\cos t\,dt\ \ v=\frac{1}{a}e^{at}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}e^{at}\sin t-\frac{1}{a}\int e^{at}\cos t\,dt=\left\{\begin{array}{l}u=\cos t\ \ dv=e^{at}dt\\ du=-\sin t\,dt,\ v=\frac{1}{a}e^{at}\end{array}\right\}=\frac{1}{a}e^{at}\sin t-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{at}\cos t+\frac{1}{a}\int e^{at}\sin t\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{a}e^{at}\sin t-\frac{1}{a^2}e^{at}\cos t-\frac{1}{a^2}\int e^{at}\sin t\,dt+D$$

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\int e^{at}\sin t\,dt=\frac{1}{a}e^{at}\sin t-\frac{1}{a^2}e^{at}\cos t+D$$

$$\int e^{at}\sin t\,dt=\frac{a^2}{a^2+1}\left(\frac{1}{a}e^{at}\sin t-\frac{1}{a^2}e^{at}\cos t+D\right)=\frac{a}{a^2+1}e^{at}\sin t-\frac{1}{a^2+1}e^{at}\cos t+d,\quad d=\frac{a^2D}{a^2+1}.$$

Како смо одабрали $t_0\in[0,2\pi)$ тако да важи $\cos t_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, $\sin t_0=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, онда је

$$\int e^{at}\sin t\,dt=\frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos t\right)+d=\frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}(\cos t_0\sin t-\sin t_0\cos t)+d=\frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}\sin(t-t_0)+d.$$

Дакле, крива $\alpha(s)$ има репараметризацију $\bar{\alpha}(t)=\left(\frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}\cos(t-t_0)+c,\ \frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}\sin(t-t_0)+d\right)$.

Можемо извршити транслацију криве за вектор $(-c,-d)$ (јер се тражи да одредимо криву до на директну изометријску трансформацију равни) и добијамо криву $\bar{\alpha}_1(t)=\left(\frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}\cos(t-t_0),\ \frac{e^{at}}{\sqrt{a^2+1}}\sin(t-t_0)\right)$

Такође, можемо је репараметризовати увођењем параметра $\theta=t-t_0$ и добијамо криву $\beta(\theta)=\left(\frac{e^{at_0}}{\sqrt{a^2+1}}\cdot e^{a\theta}\cos\theta,\ \frac{e^{at_0}}{\sqrt{a^2+1}}e^{a\theta}\sin\theta\right)$. Приметимо да ова крива заиста јесте логаритамска спирала (у ознакама $(c_1a_1^{\theta}\cos\theta,\ c_1a_1^{\theta}\sin\theta)$, ако узмемо $c_1=\frac{e^{at_0}}{\sqrt{a^2+1}}$, $a_1=e^{a}$).

(б) $\varphi'(s)=k_2(s)=\frac{a}{a^2+s^2}$, $a\neq0$

$$\varphi(s)=\int\frac{a}{a^2+s^2}ds=\frac{a}{a^2}\int\frac{1}{1+\frac{s^2}{a^2}}ds=\int\frac{1}{1+\left(\frac{s}{a}\right)^2}d\left(\frac{s}{a}\right)=\operatorname{arctg}\frac{s}{a}+\varphi_0$$

Слично као у делу (а), можемо заротирати криву око координатног почетка за угао $-\varphi_0$ и тиме заротирати све њене тангентне векторе за угао $-\varphi_0$. Добијамо $\varphi(s)=\operatorname{arctg}\frac{s}{a}+\varphi_0-\varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{s}{a}$.

Како је $\cos^2\varphi(s)+\sin^2\varphi(s)=1$, добијамо $1+tg^2\varphi(s)=\frac{1}{\cos^2\varphi(s)}$, па је $\cos^2\varphi(s)=\frac{1}{1+tg^2\varphi(s)}$. Како је $\varphi(s)=\operatorname{arctg}\frac{s}{a}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, онда је $\cos\varphi(s)>0$, па је $\cos\varphi(s)=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi(s)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}$.

Такође, $\sin\varphi(s)=tg\varphi(s)\cdot\cos\varphi(s)=\frac{s}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}$.

$\alpha'(s)=T(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}},\frac{s}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}\right)$, па је $\alpha(s)=\left(\int\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}ds,\int\frac{s}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}ds\right)$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}ds=\left\{\begin{array}{l}\text{смена: }\frac{s}{a}=sh t\\ \frac{ds}{a}=ch t\,dt\end{array}\right\}=\int\frac{1}{\sqrt{1+sh^2t}}\cdot a\,ch t\,dt=\int\frac{1}{\cancel{ch t}}\cdot a\cancel{ch t}\,dt=at+c$$

$$\int\frac{s}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}ds=\left\{\begin{array}{l}\text{смена: }\frac{s}{a}=sh t\\ \frac{ds}{a}=ch t\,dt\end{array}\right\}=\int sh t\cdot\frac{1}{\sqrt{1+sh^2t}}\cdot a\,ch t\,dt=\int sh t\cdot\frac{1}{\cancel{ch t}}\cdot a\cancel{ch t}\,dt=a\,ch t+d$$

Репараметризација криве α је крива $\tilde{\alpha}(t)=(at+c,a\,ch t+d)$. Можемо извршити транслацију криве за вектор $(-c,-d)$ (јер се тражи да одредимо криву до на директну изометријску трансформацију равни) и добићемо криву $\tilde{\alpha}_1(t)=(at,a\,ch t)$. Како је $x=at$, онда је $t=\frac{x}{a}$, па је $y=a\,ch t=a\,ch\frac{x}{a}$, па је у питању график функције $y=a\,ch\frac{x}{a}$, што је ланчаница.

(в) $\varphi'(s)=k_2(s)=\frac{1}{\sqrt{as}}$, $a>0$, $s>0$

$$\varphi(s)=\int\frac{1}{\sqrt{as}}ds=\frac{1}{\sqrt{a}}\int s^{-\frac{1}{2}}ds=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{s^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\varphi_0=\frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{a}}+\varphi_0=2\sqrt{\frac{s}{a}}+\varphi_0$$

Можемо заротирати криву око координатног почетка за угао φ_0 (јер се тражи да одредимо криву до на директну изометријску трансформацију равни). Тада се и њени тангентни вектори $T(s)$ ротирају за угао $-\varphi_0$, па је $\varphi(s)=2\sqrt{\frac{s}{a}}+\cancel{\varphi_0}-\cancel{\varphi_0}=2\sqrt{\frac{s}{a}}$.

$T(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))=\left(\cos\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right),\sin\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\right)$

$\alpha'(s)=T(s)=\left(\cos\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right),\sin\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\right)$, па је $\alpha(s)=\left(\int\cos\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)ds,\int\sin\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)ds\right)$.

$$\int\cos\left(2\sqrt{\tfrac{s}{a}}\right)ds=\left\{\begin{array}{l}\text{смена: }2\sqrt{\frac{s}{a}}=t\\ s=\frac{at^2}{4},\ ds=\frac{2at\,dt}{4}=\frac{a}{2}t\,dt\end{array}\right\}=\int\cos t\cdot\frac{a}{2}t\,dt=\frac{a}{2}\int t\cos t\,dt=\left\{\begin{array}{l}u=t,\ dv=\cos t\,dt\\ du=dt,\ v=\sin t\end{array}\right\}$$

$$=\frac{a}{2}\left(t\sin t-\int\sin t\,dt\right)=\frac{a}{2}t\sin t+\frac{a}{2}\cos t+c$$

$$\int\sin\left(2\sqrt{\tfrac{s}{a}}\right)ds=\left\{\begin{array}{l}\text{смена: }2\sqrt{\frac{s}{a}}=t\\ s=\frac{at^2}{4},\ ds=\frac{2at\,dt}{4}=\frac{a}{2}t\,dt\end{array}\right\}=\int\sin t\cdot\frac{a}{2}t\,dt=\frac{a}{2}\int t\sin t\,dt=\left\{\begin{array}{l}u=t,\ dv=\sin t\,dt\\ du=dt,\ v=-\cos t\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{a}{2}\left(-t\cos t+\int\cos t\,dt\right)=-\frac{a}{2}t\cos t+\frac{a}{2}\sin t+d$$

Репараметризација криве α је крива $\tilde{\alpha}(t)=\left(\frac{a}{2}t\sin t+\frac{a}{2}\cos t+c,-\frac{a}{2}t\cos t+\frac{a}{2}\sin t+d\right)$. Можемо извршити транслацију криве за вектор $(-c,-d)$ и добићемо криву $\tilde{\alpha}_1(t)=\left(\frac{a}{2}t\sin t+\frac{a}{2}\cos t,-\frac{a}{2}t\cos t+\frac{a}{2}\sin t\right)=\left(\frac{a}{2}\cos t,\frac{a}{2}\sin t\right)-\left(-\frac{a}{2}t\sin t,\frac{a}{2}t\cos t\right)$. Докажимо да је ова крива инволута круга $\beta(t)=\left(\frac{a}{2}\cos t,\frac{a}{2}\sin t\right)$ с почетком у тачки $\beta(0)=\left(\frac{a}{2},0\right)$.

$\beta'(t)=\left(-\frac{a}{2}\sin t,\frac{a}{2}\cos t\right)$, $\|\beta'(t)\|^2=\frac{a^2}{4}\sin^2t+\frac{a^2}{4}\cos^2t=\frac{a^2}{4}\Rightarrow\|\beta'(t)\|=\frac{a}{2}$

$s_\beta(t)=\int_0^t\|\beta'(u)\|du=\int_0^t\frac{a}{2}du=\frac{a}{2}\cdot u\Big|_0^t=\frac{a}{2}\cdot t$, $T_\beta(t)=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}=\frac{\left(-\frac{a}{2}\sin t,\frac{a}{2}\cos t\right)}{\frac{a}{2}}=(-\sin t,\cos t)$

$\Rightarrow\tilde{\alpha}_1(t)=\left(\frac{a}{2}\cos t,\frac{a}{2}\sin t\right)-\frac{a}{2}\cdot t(-\sin t,\cos t)=\beta(t)-s_\beta(t)T_\beta(t)$, што је инволута круга β с почетком у тачки $\beta(0)=\left(\frac{a}{2},0\right)$.

16. (а) Доказати да је слика криве $\alpha(t)=(\sqrt{2}\cos t+\sin t+1,-\sqrt{2}\sin t+2,-\sqrt{2}\cos t+\sin t+3)$, $t\in\mathbb{R}$, кружница. Одредити раван и неку сферу у чијем пресеку лежи слика дате криве.

(б) Доказати да је слика криве $\beta(t)=(5\cos t,3\cos t-4\sin t,4\cos t+3\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$, елипса. Одредити раван и неки елипсоид у чијем пресеку лежи слика дате криве.

Постоји теорема која говори да уколико две криве имају исту кривину и торзију, онда постоји изометријска трансформација која пресликава траг једне на траг друге криве. Дакле, кривина и торзија једнозначно одређују тип криве, а њихов положај се може мењати коришћењем неке изометријске трансформације простора. Такође, раванске криве (криве чији траг припада некој равни) имају особину да је њихов бинормални вектор константан на интервалима дефинисаности (бинормални вектор није дефинисан у тачкама у којима је кривина једнака нули), јер се оскулаторна раван криве у свакој тачки поклапа с равни којој припада траг криве, те је бинормални вектор увек исти и то је јединични вектор нормалан на равни којој припада траг криве. Обрнуто важи ако је бинормални вектор исти на свим интервалима дефинисаности или евентуално мења смер, тј. прелази у супротан вектор на различитим интервалима.

(а) Нека је $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t)$, $r>0$, параметризација кружнице полупречника r.

$\gamma'(t)=(-r\sin t,r\cos t)$

$\|\gamma'(t)\|^2=r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t=r^2\Rightarrow\|\gamma'(t)\|=r$

$\gamma''(t)=(-r\cos t,-r\sin t)$

$$\gamma'(t)\times\gamma''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-r\sin t&r\cos t&0\\-r\cos t&-r\sin t&0\end{vmatrix}=(0,0,r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t)=(0,0,r^2)$$

$\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|=|r^2|=r^2$

$$K_\gamma(t)=\frac{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{r^{\cancel{2}}}{r^{\cancel{3}}}=\frac{1}{r}$$

Дакле, кривина кружнице полупречника r је $\frac{1}{r}$. Ово је и очекиван резултат, јер је кружница у свакој својој тачки уједно и оскулаторна кружница самој себи (оскулаторна кружница је кружница која најбоље апроксимира криву у датој тачки, а кружница је сама себи најбоља апроксимација у свакој тачки), а кривина је реципрочна вредност полупречника оскулаторне кружнице у одговарајућој тачки.

$\alpha'(t)=(-\sqrt{2}\sin t+\cos t,-\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t+\cos t)$

$\alpha''(t)=(-\sqrt{2}\cos t-\sin t,\sqrt{2}\sin t,\sqrt{2}\cos t-\sin t)$

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\sqrt{2}\sin t+\cos t&-\sqrt{2}\cos t&\sqrt{2}\sin t+\cos t\\-\sqrt{2}\cos t-\sin t&\sqrt{2}\sin t&\sqrt{2}\cos t-\sin t\end{vmatrix}=$$

$$=(-2\cos^2 t+\cancel{\sqrt{2}\cos t\sin t}-2\sin^2 t-\cancel{\sqrt{2}\sin t\cos t},\ \cancel{-2\sin t\cos t}-\sqrt{2}\sin^2 t-\sqrt{2}\cos^2 t-\cancel{\cos t\sin t}+\cancel{2\sin t\cos t}-\sqrt{2}\cos^2 t-\sqrt{2}\sin^2 t\cancel{+\sin t\cos t},$$
$$-2\sin^2 t+\cancel{\sqrt{2}\cos t\sin t}-2\cos^2 t\cancel{-\sqrt{2}\sin t\cos t})=(-2,-\sqrt{2}-\sqrt{2},-2)=(-2,-2\sqrt{2},-2)$$

$\|\alpha'(t)\|^2=2\sin^2 t\cancel{-2\sqrt{2}\sin t\cos t}+\cos^2 t+2\cos^2 t+2\sin^2 t\cancel{+2\sqrt{2}\sin t\cos t}+\cos^2 t=2+2=4\Rightarrow\|\alpha'(t)\|=2$

$\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2=4+8+4=16\Rightarrow\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|=4$

$$\mathbf{B}(t)=\frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}=\frac{(-2,-2\sqrt2,-2)}{4}=\left(-\frac12,-\frac{\sqrt2}{2},-\frac12\right)$$

Како је $\mathbf{B}(t)$ константан, следи да је крива α равванска и припада равни нормалној на вектору $\left(-\frac12,-\frac{\sqrt2}{2},-\frac12\right)$. Та раван има једначину $-\frac12 x-\frac{\sqrt2}{2}y-\frac12 z+d=0$, за неко $d\in\mathbb{R}$. Како тачка $\alpha(0)=(\sqrt2+1,2,-\sqrt2+3)$, следи да је $-\frac12(\sqrt2+1)-\frac{\sqrt2}{2}\cdot2-\frac12(-\sqrt2+3)+d=0$, тј. $\cancel{-\frac{\sqrt2}{2}}-\frac12-\sqrt2+\cancel{\frac{\sqrt2}{2}}-\frac32+d=0$, па је $d=2+\sqrt2$. Следи да траг криве α припада равни $-\frac12x-\frac{\sqrt2}{2}y-\frac12z+2+\sqrt2=0$, тј. $x+\sqrt2y+z-4-2\sqrt2=0$.

$$\mathbf{K}(t)=\frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{4}{2^3}=\frac48=\frac12$$

Како смо показали да је кривина кружнице полупречника r једнака $\frac1r$, следи да је траг криве α кружница у равни $x+\sqrt2y+z-4-2\sqrt2=0$, полупречника 2. Центар те кружнице је тачка $\alpha(t)+\frac{1}{\mathbf{K}(t)}\mathbf{N}(t)$, у произвољној тачки $t\in\mathbb{R}$, нпр. у тачки $t=0$.

$$\mathbf{T}(0)=\frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|}=\frac{(1,-\sqrt2,1)}{2}=\left(\frac12,-\frac{\sqrt2}{2},\frac12\right)$$

$$\mathbf{N}(0)=\mathbf{B}(0)\times\mathbf{T}(0)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\frac12&-\frac{\sqrt2}{2}&-\frac12\\\frac12&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac12\end{vmatrix}=\left(-\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt2}{4},-\frac14+\frac14,\frac{\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt2}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$\alpha(0)+\frac{1}{\mathbf{K}(0)}\mathbf{N}(0)=(\sqrt2+1,2,-\sqrt2+3)+2\cdot\left(-\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2}\right)=(\sqrt2+1,2,-\sqrt2+3)+(-\sqrt2,0,\sqrt2)=(1,2,3)$$

Дакле, центар кружнице је тачка $C(1,2,3)$. Најједноставније је узети сферу с центром у тој тачки и полупречником 2, јер је онда траг криве α велика кружница те сфере. Према томе, траг криве α је кружница у пресеку равни $x+\sqrt2y+z-4-2\sqrt2=0$ и сфере $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

(б) $\delta(t)=(a\cos t,b\sin t)$, $a,b>0$

$\delta'(t)=(-a\sin t,b\cos t)$

$\delta''(t)=(-a\cos t,-b\sin t)$

$$\delta'(t)\times\delta''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-a\sin t&b\cos t&0\\-a\cos t&-b\sin t&0\end{vmatrix}=(0,0,ab\sin^2t+ab\cos^2t)=(0,0,ab)$$

$\|\delta'(t)\times\delta''(t)\|=|ab|=ab$

$\|\delta'(t)\|^2=a^2\sin^2t+b^2\cos^2t\Rightarrow\|\delta'(t)\|=\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}$

$$\mathbf{K}_\delta(t)=\frac{\|\delta'(t)\times\delta''(t)\|}{\|\delta'(t)\|^3}=\frac{ab}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{\frac32}}$$ Ово је функција кривине елипсе с полуосама a,b.

$\beta'(t)=(-5\sin t,-3\sin t-4\cos t,-4\sin t+3\cos t)$

$\beta''(t)=(-5\cos t,-3\cos t+4\sin t,-4\cos t-3\sin t)$

$$\beta'(t)\times\beta''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5\sin t&-3\sin t-4\cos t&-4\sin t+3\cos t\\-5\cos t&-3\cos t+4\sin t&-4\cos t-3\sin t\end{vmatrix}=$$

$$=(\cancel{12\sin t\cos t}+9\sin^2t+16\cos^2t+\cancel{12\cos t\sin t}-\cancel{12\cos t\sin t}+9\cos^2t+16\sin^2t-\cancel{12\sin t\cos t},$$
$$\cancel{20\sin t\cos t}-15\cos^2t-\cancel{20\cos t\sin t}-15\sin^2t,\ \cancel{15\sin t\cos t}-20\sin^2t-\cancel{15\cos t\sin t}-20\cos^2t)=$$

$=(9+16,-15,-20)=(25,-15,-20)$

$\|\beta'(t)\|^2=25\sin^2t+9\sin^2t+\cancel{24\sin t\cos t}+16\cos^2t+16\sin^2t-\cancel{24\sin t\cos t}+9\cos^2t=50\sin^2t+25\cos^2t$

$\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|^2=25^2+15^2+20^2=5^4+5^2\cdot3^2+5^2\cdot4^2=5^2\cdot(5^2+3^2+4^2)=5^2\cdot(25+9+16)=5^2\cdot50=5^2\cdot5^2\cdot2=25^2\cdot2$

$$\|\beta'(t)\|=\sqrt{50\sin^2 t+25\cos^2 t}$$

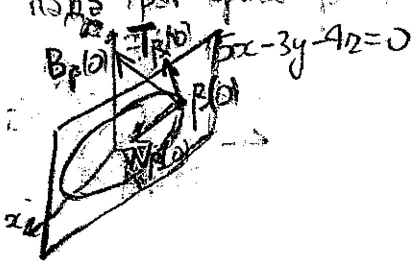
$$\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|=\sqrt{25^2\cdot 2}=25\sqrt{2}$$

$$B_\beta(t)=\frac{\beta'(t)\times\beta''(t)}{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}=\frac{(25,-15,-20)}{25\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{5\sqrt{2}},-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$$

Како је $B(t)$ константан, следи да је крива β раванска и њен траг припада равни нормалној на вектору $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{5\sqrt{2}},-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$. Та раван има једначину $\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{3}{5\sqrt{2}}y-\frac{4}{5\sqrt{2}}z+d=0$, за неко $d\in\mathbb{R}$. Како тачка $\beta(0)=(5,3,4)$ припада тој равни, следи да је $\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{9}{5\sqrt{2}}-\frac{16}{5\sqrt{2}}+d=0$, тј. $d=\frac{9+16-25}{5\sqrt{2}}=0$. Према томе, траг криве β припада равни $\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{3}{5\sqrt{2}}y-\frac{4}{5\sqrt{2}}z=0$, тј. $5x-3y-4z=0$.

$$K_\beta(t)=\frac{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3}=\frac{25\sqrt{2}}{(50\sin^2 t+25\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Ако ставимо $a=5\sqrt{2}$, $b=5$, добијамо $K_\delta(t)=\frac{5\sqrt{2}\cdot 5}{((5\sqrt{2})^2\sin^2 t+5^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{25\sqrt{2}}{(50\sin^2 t+25\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$, тј. функција кривине криве β идентички је једнака функцији кривине елипсе δ с полуосама $a=5\sqrt{2}$, $b=5$. Како су криве β,δ раванске и имају исте функције кривине, следи да постоји изометријска трансформација која слика криву β на криву δ, па је траг криве β елипса у равни $5x-3y-4z=0$. Да бисмо утврдили једначину неког елипсоида који садржи траг криве β, најједноставније је пронаћи нови координатни систем такав да у њему раван којој припада траг криве β буде раван $z'=0$.



$$\delta(t)=(a\cos t, b\sin t, 0),\quad a=5\sqrt{2},\ b=5$$
$$\delta(t)=(5\sqrt{2}\cos t, 5\sin t, 0)$$
$$\delta'(t)=(-5\sqrt{2}\sin t, 5\cos t, 0)$$
$$\delta'(t)\times\delta''(t)=(0,0,ab)=(0,0,5\sqrt{2}\cdot 5)=(0,0,25\sqrt{2})$$
$$\|\delta'(t)\times\delta''(t)\|=25\sqrt{2},\quad \|\delta'(t)\|=\sqrt{50\sin^2 t+25\cos^2 t}$$

$$T_\beta(0)=\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|}=\frac{(0,-4,3)}{5}=\left(0,-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$

$$T_\delta(0)=\frac{\delta'(0)}{\|\delta'(0)\|}=\frac{(0,5,0)}{5}=(0,1,0)$$

$$B_\beta(0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{5\sqrt{2}},-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$B_\delta(0)=\frac{\delta'(0)\times\delta''(0)}{\|\delta'(0)\times\delta''(0)\|}=\frac{(0,0,25\sqrt{2})}{25\sqrt{2}}=(0,0,1)$$

$$N_\beta(0)=B_\beta(0)\times T_\beta(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{vmatrix}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{5\sqrt{2}},-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$N_\delta(0)=B_\delta(0)\times T_\delta(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,0)$$

Нека је $O'x'y'z'$ нови координатни систем такав да вектори $T_\beta(0), N_\beta(0), B_\beta(0)$ имају у њему редом координате исте као што имају $T_\delta(0), N_\delta(0), B_\delta(0)$ у старом координатном систему $Oxyz$, и да тачка $\beta(0)=(5,3,4)$ има координате исте као што су координате тачке $\delta(0)=(5\sqrt{2},0,0)$ у старом координатном систему. Присетимо се трансформација координата из Геометрије 1:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{\text{коорд. у } Oxyz}=\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}}_{\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \vec{f_3} \text{ изражени у бази } \vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}}\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}}_{\text{коорд. у } O'x'y'z'}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix},$$

где су $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ вектори Ox, Oy, Oz осе, а $\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}$ су вектори $O'x', O'y', O'z'$ осе, редом. Како је $\vec{e_1}=(1,0,0)=-N_\delta(0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)=T_\delta(0)$, $\vec{e_3}=(0,0,1)=B_\delta(0)$, желимо да буде $\vec{f_1}=-N_\beta(0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{5\sqrt{2}},\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$, $\vec{f_2}=T_\beta(0)=\left(0,-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ и

$\vec{f_3}=\mathbf{B}_\beta(0)=\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{3}{5\sqrt2},-\frac{4}{5\sqrt2}\right)$ (ово радимо да би вектори $T_\beta(0),\mathbf{N}_\beta(0),\mathbf{B}_\beta(0)$ у новом координатном систему имали редом координате: $T_\beta(0)=\vec{f_2}=0\cdot\vec{f_1}+1\cdot\vec{f_2}+0\cdot\vec{f_3}=(0,1,0)_{[\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}]}$, $N_\beta(0)=-\vec{f_1}=(-1,0,0)_{[\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}]}$ и $B_\beta(0)=\vec{f_3}=(0,0,1)_{[\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}]}$). Стога трансформација координата има облик

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{3}{5\sqrt2}&-\frac{4}{5}&-\frac{3}{5\sqrt2}\\ \frac{4}{5\sqrt2}&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5\sqrt2}\end{pmatrix}\\ \uparrow\quad\ \uparrow\quad\ \uparrow\\ \vec{f_1}\quad\vec{f_2}\quad\vec{f_3}\end{array}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

изражени преко $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$, тј. у старом коорд. сист.

те треба само још одредити $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$. Њих добијамо из захтева да тачка $\beta(0)=(5,3,4)$ има исте координате у $O'x'y'z'$ као што тачка $\delta(0)$ има у $Oxyz$, а то су $(5\sqrt2,0,0)$. Стога,

$$\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{3}{5\sqrt2}&-\frac{4}{5}&-\frac{3}{5\sqrt2}\\ \frac{4}{5\sqrt2}&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\sqrt2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\text{ тј. }\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Дакле, трансформација координата је $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{3}{5\sqrt2}&-\frac{4}{5}&-\frac{3}{5\sqrt2}\\ \frac{4}{5\sqrt2}&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Матрица A ове трансформације координата је сачињена од вектора $-N_\beta(0),T_\beta(0),B_\beta(0)$ који чине ортонормирану базу, па следи да је A ортогонална матрица, тј. да је $A^{-1}=A^T$. Према томе,

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3}{5\sqrt2}&\frac{4}{5\sqrt2}\\ 0&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\ \frac{1}{\sqrt2}&-\frac{3}{5\sqrt2}&-\frac{4}{5\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

па у новом координатном систему крива $\beta(t)=(5\cos t,3\cos t-4\sin t,4\cos t+3\sin t)$ има координате

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3}{5\sqrt2}&\frac{4}{5\sqrt2}\\ 0&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\ \frac{1}{\sqrt2}&-\frac{3}{5\sqrt2}&-\frac{4}{5\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\cos t\\3\cos t-4\sin t\\4\cos t+3\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt2}\cos t+\frac{9}{5\sqrt2}\cos t-\cancel{\frac{12}{5\sqrt2}\sin t}+\frac{16}{5\sqrt2}\cos t+\cancel{\frac{12}{5\sqrt2}\sin t}\\ -\cancel{\frac{12}{5}\cos t}+\frac{16}{5}\sin t+\cancel{\frac{12}{5}\cos t}+\frac{9}{5}\sin t\\ \frac{5}{\sqrt2}\cos t-\frac{9}{5\sqrt2}\cos t+\cancel{\frac{12}{5\sqrt2}\sin t}-\frac{16}{5\sqrt2}\cos t-\cancel{\frac{12}{5\sqrt2}\sin t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{25+9+16}{5\sqrt2}\cos t\\ 5\sin t\\ \frac{25-9-16}{5\sqrt2}\cos t\end{pmatrix},$$

односно $\left(\frac{50\sqrt2}{5\cdot 2}\cos t,5\sin t,0\right)=(5\sqrt2\cos t,5\sin t,0)$. Дакле, овом трансформацијом координата сводимо елипсу параметризовану кривом β на канонски облик. У координатном систему $O'x'y'z'$, дакле, ова елипса има једначину $\frac{x'^2}{(5\sqrt2)^2}+\frac{y'^2}{5^2}=1$, $z'=0$, тј. $\frac{x'^2}{50}+\frac{y'^2}{25}=1$, $z'=0$. Сад лако можемо наћи неки елипсоид чији је пресек с равни $z'=0$, тј. равни $\frac{1}{\sqrt2}x-\frac{3}{5\sqrt2}y-\frac{4}{5\sqrt2}z=0$, односно $5x-3y-4z=0$, траг криве β. Један такав елипсоид је $\frac{x'^2}{50}+\frac{y'^2}{25}+\frac{z'^2}{1}=1$, а његова једначина у $Oxyz$ координатном систему добија се из формула трансформација координата $x'=\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{3}{5\sqrt2}y+\frac{4}{5\sqrt2}z$, $y'=-\frac{4}{5}y+\frac{3}{5}z$, $z'=\frac{1}{\sqrt2}x-\frac{3}{5\sqrt2}y-\frac{4}{5\sqrt2}z$ и гласи

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{3}{5\sqrt2}y+\frac{4}{5\sqrt2}z\right)^2}{50}+\frac{\left(-\frac{4}{5}y+\frac{3}{5}z\right)^2}{25}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt2}x-\frac{3}{5\sqrt2}y-\frac{4}{5\sqrt2}z\right)^2}{1}=1.$$

17. Дата је параметризована крива $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ са $\alpha(t)=\begin{cases}(t,0,e^{-\frac{1}{t^2}}), & t>0\\ (t,e^{-\frac{1}{t^2}},0), & t<0\\ (0,0,0), & t=0\end{cases}$.

(а) Испитати регуларност дате криве и израчунати њену кривину. У којим тачкама је кривина једнака 0?

(б) Израчунати торзију дате криве у свим тачкама. Да ли је крива раванска?

(а) За регуларност криве је потребно одредити вектор брзине у свакој тачки и испитати да ли је он различит од нула вектора.

$\alpha'(t)=\begin{cases}(1,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{2}{t^3}), & t>0\\ (1,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{2}{t^3},0), & t<0\end{cases}$. Дакле, вектор брзине је различит од нула вектора у тачкама $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, па треба још израчунати вектор брзине у тачки $t=0$.

$\alpha'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(0+h)-\alpha(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(h)-\alpha(0)}{h}$, па треба видети посебно леву и десну граничну вредност.

$\alpha'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{\alpha(h)-\alpha(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{(h,0,e^{-\frac{1}{h^2}})-(0,0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{(h,0,e^{-\frac{1}{h^2}})}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\left(1,0,\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}\right)$

$\lim\limits_{h\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}\overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x}=0\Rightarrow\alpha'_+(0)=(1,0,0)$

$\alpha'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0-}\frac{\alpha(h)-\alpha(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\frac{(h,e^{-\frac{1}{h^2}},0)-(0,0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\frac{(h,e^{-\frac{1}{h^2}},0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\left(1,\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h},0\right)$

$\lim\limits_{h\to 0-}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2}}\overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x}=0\Rightarrow\alpha'_-(0)=(1,0,0)$

Дакле, постоји $\alpha'(0)$ и једнак је $\alpha'(0)=(1,0,0)\neq(0,0,0)$, па је крива регуларна на $\mathbb{R}$.

$$\alpha''(t)=\begin{cases}\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{2}{t^3}\cdot\frac{2}{t^3}+e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot 2\cdot\frac{-3}{t^4}\right), & t>0\\ \left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{2}{t^3}\cdot\frac{2}{t^3}+e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot 2\cdot\frac{-3}{t^4},0\right), & t<0\end{cases}=\begin{cases}\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6}\right), & t>0\\ \left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6},0\right), & t<0\end{cases}$$

$\alpha''(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha'(0+h)-\alpha'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha'(h)-\alpha'(0)}{h}$

$\alpha''_+(0)=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{(1,0,e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^3})-(1,0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\frac{(0,0,e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^3})}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\left(0,0,e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^4}\right)$

$\lim\limits_{h\to 0+}e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^4}=2\lim\limits_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{h^4}}{e^{\frac{1}{h^2}}}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

$\alpha''_-(0)=\lim\limits_{h\to 0-}\frac{(1,e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^3},0)-(1,0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\frac{(0,e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^3},0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\left(0,e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^4},0\right)$

$\lim\limits_{h\to 0-}e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^4}=2\lim\limits_{h\to 0-}\frac{\frac{1}{h^4}}{e^{\frac{1}{h^2}}}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$

Дакле, постоји $\alpha''(0)$ и једнак је $\alpha''(0)=(0,0,0)$.

$t>0:\ \alpha'(t)\times\alpha''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{2}{t^3}\\ 0 & 0 & e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6}\end{vmatrix}=\left(0,-e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6},0\right)=\left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{6t^2-4}{t^6},0\right)$

$\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|=\left|e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{6t^2-4}{t^6}\right|=e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{1}{t^6}\cdot|6t^2-4|$

$\|\alpha'(t)\|^2=1^2+0^2+e^{-\frac{2}{t^2}}\cdot\frac{4}{t^6}=1+e^{-\frac{2}{t^2}}\cdot\frac{4}{t^6}\Rightarrow\|\alpha'(t)\|=\sqrt{1+e^{-\frac{2}{t^2}}\cdot\frac{4}{t^6}}$

$t<0:\ \alpha'(t)\times\alpha''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{2}{t^3} & 0\\ 0 & e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6} & 0\end{vmatrix}=\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6}\right)$

$\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|=\left|e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6}\right|=e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{1}{t^6}\cdot|4-6t^2|$

$\|\alpha'(t)\|^2=1^2+e^{-\frac{2}{t^2}}\cdot\frac{4}{t^6}+0^2=1+e^{-\frac{2}{t^2}}\cdot\frac{4}{t^6}\Rightarrow\|\alpha'(t)\|=\sqrt{1+e^{-\frac{2}{t^2}}\cdot\frac{4}{t^6}}$

$t=0:\ \alpha'(0)\times\alpha''(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,0,0)$, $\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|=0$, $\|\alpha'(0)\|=1$

Дакле, $\kappa(t)=\frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{|4-6t^2|}{t^6}}{\left(1+e^{-\frac{2}{t^2}}\cdot\frac{4}{t^6}\right)^{\frac{3}{2}}}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$. Кривина је једнака 0 у тачкама $t=0$ и тачкама где је $4-6t^2=0$, тј. $t^2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, што су тачке $t=\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $t=-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(б)
$$\alpha'''(t)=\begin{cases}\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{2}{t^3}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6}+e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{-12t\cdot t^6-(4-6t^2)\cdot 6t^5}{t^{12}}\right), & t>0\\ \left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{8-12t^2}{t^9}+e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{-12t^2-24+36t^2}{t^7},0\right), & t<0\end{cases}$$

$$\alpha'''(t)=\begin{cases}\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{8-12t^2+t^2(24t^2-24)}{t^9}\right), & t>0\\ \left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{8-12t^2+24t^4-24t^2}{t^9}\right), & t<0\end{cases}$$

$$\alpha'''(t)=\begin{cases}\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{8-36t^2+24t^4}{t^9}\right) & t>0\\ \left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{8-36t^2+24t^4}{t^9},0\right), & t<0\end{cases}$$

Пошто је $\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|=0$, торзија није дефинисана у тачки $t=0$, па није потребно рачунати $\alpha'''(0)$.

$t>0$:
$[\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)]=\langle\alpha'(t)\times\alpha''(t),\alpha'''(t)\rangle=\left\langle\left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{6t^2-4}{t^6},0\right),\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{8-36t^2+24t^4}{t^9}\right)\right\rangle=0+0+0=0$

$t<0$:
$[\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)]=\langle\alpha'(t)\times\alpha''(t),\alpha'''(t)\rangle=\left\langle\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6}\right),\left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{8-36t^2+24t^4}{t^9},0\right)\right\rangle=0+0+0=0$

$\tau(t)=\frac{[\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2}=0,\ t\in(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}})\cup(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)\cup(0,\sqrt{\frac{2}{3}})\cup(\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty)$. Крива није раванска, иако је у свакој тачки (у којој је дефинисана) торзија једнака нули, јер је бинормални вектор

$$B(t)=\frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}=\begin{cases}\left(e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{|4-6t^2|}{t^6}\right)^{-1}\cdot\left(0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{6t^2-4}{t^6},0\right), & t>0,\ t\neq\sqrt{\frac{2}{3}}\\ \left(e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{|4-6t^2|}{t^6}\right)^{-1}\cdot\left(0,0,e^{-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{4-6t^2}{t^6}\right), & t<0,\ t\neq-\sqrt{\frac{2}{3}}\end{cases}=\begin{cases}(0,-1,0), & t\in(0,\sqrt{\frac{2}{3}})\\ (0,1,0), & t\in(\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty)\\ (0,0,1), & t\in(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)\\ (0,0,-1), & t\in(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}})\end{cases}$$

тј. није исти на свим интервалима дефинисаности, уз евентуалну промену смера, тј. прелазак у супротан вектор. Заиста, на интервалу $(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}})$ је $(0,0,-1)$, па прелази у супротан вектор $-(0,0,-1)=(0,0,1)$ на интервалу $(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)$, али на интервалу $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$ постаје вектор $(0,-1,0)$ који има потпуно други правац, а потом тај нови вектор мења смер, тј. прелази у $-(0,-1,0)=(0,1,0)$ на интервалу $(\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty)$. То значи да траг криве припада равни чији је нормални вектор $(0,0,-1)$, тј. $(0,0,1)$ на интервалу $(-\infty,0)$ и то је, очигледно, раван $z=0$ (јер је $\alpha(t)=(t,e^{-\frac{1}{t^2}},0), t<0$), а припада равни чији је нормални вектор $(0,-1,0)$, тј. $(0,1,0)$ на интервалу $(0,+\infty)$ и то је, очигледно, раван $y=0$ (јер је $\alpha(t)=(t,0,e^{-\frac{1}{t^2}}), t>0$).

18. (а) Ако све тангентне линије регуларне криве садрже фиксну тачку, тада слика те криве припада некој правој. Доказати.

(б) Ако све нормалне линије регуларне криве садрже фиксну тачку, тада слика те праве припада неком кругу. Доказати.

(а) Нека је C тачка коју садрже све тангентне линије криве $\alpha:I\to S$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, S је еуклидска раван или еуклидски простор. Тада је за свако $t\in I$ вектор $\alpha(t)-C$, који спаја тачку C с тачком $\alpha(t)$, колинеаран вектору брзине $\alpha'(t)$ у тој тачки, јер обе тачке припадају тангентној линији криве α у тачки $\alpha(t)$, па је он колинеаран вектору правца те тангентне линије, што је вектор $\alpha'(t)$. Дакле, $(\alpha(t)-C)\times\alpha'(t)=\vec{0}$, за свако $t\in I$ (колинеарни вектори имају особину да им је векторски производ $\vec{0}$, а ако је крива α у еуклидској равни $\mathbb{R}^2$, додајмо јој трећу координату да је 0 за свако t и тачки C додајмо трећу координату која је 0).

Ако су $f,g: I\to\mathbb{R}^3$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, $f(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$, $g(t)=(g_1(t),g_2(t),g_3(t))$, онда је

$$f(t)\times g(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ f_1(t)&f_2(t)&f_3(t)\\ g_1(t)&g_2(t)&g_3(t)\end{vmatrix}=\left(f_2(t)g_3(t)-g_2(t)f_3(t),\ f_3(t)g_1(t)-g_3(t)f_1(t),\ f_1(t)g_2(t)-g_1(t)f_2(t)\right),$$ па је

$$\left(f(t)\times g(t)\right)'=\left(\underline{f_2'(t)g_3(t)}+\underline{f_2(t)g_3'(t)}-\underline{g_2'(t)f_3(t)}-\underline{g_2(t)f_3'(t)},\ f_3'(t)g_1(t)+\boxed{f_3(t)g_1'(t)}-\boxed{g_3'(t)f_1(t)}-g_3(t)f_1'(t),\ \underline{f_1'(t)g_2(t)}+f_1(t)g_2'(t)-\right.$$
$$\left.-g_1'(t)f_2(t)-\underline{g_1(t)f_2'(t)}\right)=\left(f_2'(t)g_3(t)-g_2(t)f_3'(t),\ f_3'(t)g_1(t)-g_3(t)f_1'(t),\ f_1'(t)g_2(t)-g_1(t)f_2'(t)\right)+$$
$$+\left(f_2(t)g_3'(t)-g_2'(t)f_3(t),\ f_3(t)g_1'(t)-g_3'(t)f_1(t),\ f_1(t)g_2'(t)-g_1(t)f_1'(t)\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ f_1'(t)&f_2'(t)&f_3'(t)\\ g_1(t)&g_2(t)&g_3(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ f_1(t)&f_2(t)&f_3(t)\\ g_1'(t)&g_2'(t)&g_3'(t)\end{vmatrix}=$$
$$=f'(t)\times g(t)+f(t)\times g'(t).$$ Дакле, за векторски производ важи Лајбницово правило.

Крива α је регуларна, па је $\alpha'(t)\neq\vec{0}$ за свако $t\in I$, што значи да је и $\|\alpha'(t)\|\neq 0$ свако $t\in I$ и да је дефинисан (јединични) тангентни вектор $T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ за свако $t\in I$ и да је $(\alpha(t)-C)\times T(t)=(\alpha(t)-C)\times(\|\alpha'(t)\|\alpha'(t))=\|\alpha'(t)\|\cdot((\alpha(t)-C)\times\alpha'(t))=\|\alpha'(t)\|\cdot\vec{0}=\vec{0}$. Следи да је $((\alpha(t)-C)\times T(t))'=\vec{0}$, тј. $\alpha'(t)\times T(t)+(\alpha(t)-C)\times T'(t)=\vec{0}$. Како је $\alpha'(t)\times T(t)=(\|\alpha'(t)\|T(t))\times T(t)=\vec{0}$, добијамо да је $(\alpha(t)-C)\times T'(t)=\vec{0}$, тј. да су вектори $\alpha(t)-C$ и $T'(t)$ колинеарни. Како су $T(t)$ и $T'(t)$ колинеарни ако су и $\alpha(t)-C$ и $T(t)$ колинеарни, можемо закључити да су $T(t)$ и $T'(t)$ колинеарни у тачки $t\in I$. Заиста, ако је $\alpha(t)-C\neq\vec{0}$, онда је $T'(t)=\lambda(t)\cdot(\alpha(t)-C)$, за неко $\lambda(t)\in\mathbb{R}$, а пошто је $\alpha(t)-C=\mu(t)T(t)$ због колинеарности $\alpha(t)-C$ и $T(t)$, следи да је $T'(t)=\lambda(t)\cdot\mu(t)T(t)$, тј. да су $T'(t)$ и $T(t)$ колинеарни. Међутим, како је $\|T(t)\|=1$, следи да је $1=\|T(t)\|^2=\langle T(t),T(t)\rangle$, па је $0=(\langle T(t),T(t)\rangle)'=\langle T'(t),T(t)\rangle+\langle T(t),T'(t)\rangle=2\langle T'(t),T(t)\rangle=2\langle\lambda(t)\mu(t)T(t),T(t)\rangle=2\lambda(t)\mu(t)\langle T(t),T(t)\rangle=2\lambda(t)\mu(t)\cdot 1$. Следи да је $\lambda(t)=0$ или $\mu(t)=0$, али не може бити $\mu(t)=0$ јер би иначе било $\vec{0}\neq\alpha(t)-C=0\cdot T(t)=\vec{0}$, што је немогуће. Дакле, $\lambda(t)=0$, па је $T'(t)=0\cdot(\alpha(t)-C)=\vec{0}$, за све $t\in I$ за које је $\alpha(t)-C\neq\vec{0}$.

Нека је $I_1=\{t\in I: \alpha(t)-C=\vec{0}\}=\{t\in I: \alpha(t)=C\}=\alpha^{-1}(\{C\})$. Како је $\{C\}\in\mathcal{S}$ затворен скуп и α непрекидно, следи да је I_1 затворен подскуп од I, па је $I\setminus I_1=\{t\in I: \alpha(t)-C\neq\vec{0}\}$ отворен подскуп од I. Како је $I\subseteq\mathbb{R}$ отворен интервал, онда је I отворен подскуп од $\mathbb{R}$, па је и $I\setminus I_1$ отворен подскуп од $\mathbb{R}$. Одатле следи да је $I\setminus I_1$ коначна или пребројива унија дисјунктних отворених интервала $(a_k,b_k)\subseteq\mathbb{R}$, $k\in\{1,2,\dots N\}$ или $k\in\mathbb{N}$, тј. да је $I\setminus I_1=\bigcup_{k=1}^{N}(a_k,b_k)$ или $I\setminus I_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$. Посматрајмо скуп I_1. Како је $I=(a,b)$, следи да је $I_1=(a,d]\cup\bigcup_{\ell=1}^{N-1}[c_\ell,d_\ell]\cup[c,b)$, при чему је $d=\min\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$, $c=\max\{b_1,b_2,\dots,b_N\}$ и $c_\ell\in\{b_1,b_2,\dots,b_N\}\setminus\{c\}$, $d_\ell\in\{a_1,a_2,\dots,a_N\}\setminus\{d\}$, ако је $I\setminus I_1=\bigcup_{k=1}^{N}(a_k,b_k)$ (ако је $d=a$, односно $c=b$, сматрамо да је $(a,d]=\emptyset$, тј. $[c,b)=\emptyset$), односно $I_1=(a,d]\cup\bigcup_{\ell=1}^{\infty}[c_\ell,d_\ell]\cup[c,b)$, при чему је $d=\inf\{a_1,a_2,\dots\}$, $c=\sup\{b_1,b_2,\dots\}$ и $c_\ell\in\{b_1,b_2,\dots\}\setminus\{c\}$, $d_\ell\in\{a_1,a_2,\dots\}\setminus\{d\}$, ако је $I\setminus I_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$ (поново сматрамо да је $(a,d]=\emptyset$, тј. $[c,b)=\emptyset$, у случају да је $d=a$, тј. $c=b$).

Претпоставимо да је $d>a$, $c<b$ или $c_\ell<d_\ell$, за неко ℓ. Тада постоји непразни отворени интервал $(x,y)\subseteq I_1$ (то је (a,d) ако је $d>a$, (c,b) ако је $c<b$, тј. (c_ℓ,d_ℓ) ако је $c_\ell<d_\ell$ за неко ℓ) и за све $t\in(x,y)$ важи $\alpha(t)-C=\vec{0}$ (јер је $(x,y)\subseteq I_1=\{t\in(a,b):\alpha(t)-C=\vec{0}\}$), па важи и $\alpha'(t)=\vec{0}$, што противречи услову регуларности криве α. Дакле, $d=a$, $c=b$ и за свако ℓ је $c_\ell=d_\ell$, тј. $(a,d]=\emptyset$, $[c,b)=\emptyset$ и $[c_\ell,d_\ell]=\{c_\ell\}$, па је $I_1=\bigcup_{\ell=1}^{N-1}\{c_\ell\}=\{c_1,c_2,\dots,c_{N-1}\}$ или је $I_1=\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\{c_\ell\}=\{c_1,c_2,\dots\}$, тј. да је скуп тачака $t\in I$ у којима је $\alpha(t)-C=\vec{0}$ коначан или пребројив. На интервалима $(a_k,b_k)\subseteq I\setminus I_1$ је $T'(t)=\vec{0}$, па је $T(t)=u=const.$ Због непрекидности функције T на I важи $T(a_k)=\lim_{t\to a_k+}T(t)=\lim_{t\to a_k+}u=u$ и $T(b_k)=\lim_{t\to b_k-}T(t)=\lim_{t\to b_k-}u=u$, па како је $a_k=b_{k'}\in I_1$, за неко k' (јер је $a_k=d_\ell$ за неко ℓ, па је $d_\ell=c_\ell$ и $c_\ell=b_{k'}$ за неко k'), следи да је $T(t)=u$ за свако $t\in I$ ($T(t)=u$ на интервалу (a_k,b_k) и $T(a_k)=u$, а пошто је $a_k=b_{k'}$, следи да је $T(b_{k'})=u$, па је $T(t)=u$ и на интервалу $(a_{k'},b_{k'})$; интервали су „надовезани" међу собом јер је I_1 сачињен од коначно или пребројиво много тачака и константност T на сваком од њих и једнакост на крајевима интервала која важи због непрекидности T дају коначан закључак да је $T(t)=u$ за све $t\in I$). Како је $T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ следи да је $\frac{\alpha'(t)}{v(t)}=u$, тј. $\alpha'(t)=v(t)\cdot u$ ($v(t)\overset{def}{=}\|\alpha'(t)\|$). Ако је $t_0\in I$ произвољно и $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(\theta)\|d\theta$ нека функција дужине лука, онда је $s'(t)=\|\alpha'(t)\|=v(t)$, тј. функција дужине лука је примитивна функција интензитета вектора брзине па је $\alpha(t)=s(t)\cdot u+D$, за неку тачку $D\in S$. Ако је $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t))$, $D(x_0,y_0)$ и $u=(u_1,u_2)$, онда је $(\alpha_1(t),\alpha_2(t))=s(t)\cdot(u_1,u_2)+(x_0,y_0)$, тј. $s(t)=\frac{\alpha_1(t)-x_0}{u_1}=\frac{\alpha_2(t)-y_0}{u_2}$, што значи да траг криве α припада некој правој. Слично важи ако је $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$, $D(x_0,y_0,z_0)$ и $u=(u_1,u_2,u_3)$, тј. важи $\frac{\alpha_1(t)-x_0}{u_1}=\frac{\alpha_2(t)-y_0}{u_2}=\frac{\alpha_3(t)-z_0}{u_3}$, што поново значи да траг криве α припада некој правој.

(б) Нека је C тачка коју садрже све нормалне линије криве $\beta:I\to S$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, S је еуклидска раван или еуклидски простор. Тада је за свако $t\in(a,b)$ вектор $\beta(t)-C$, који спаја тачку C с тачком $\beta(t)$, колинеаран нормалном вектору $N(t)$ у тој тачки, јер обе тачке припадају нормалној линији у тачки $\beta(t)$, па је вектор $\beta(t)-C$ колинеаран вектору правца те нормалне линије, што је вектор $N(t)$. Дакле, важи $(\beta(t)-C)\times N(t)=\vec{0}$ за свако $t\in I$. Крива β је регуларна, па је дефинисан тангентни вектор $T(t)$ у свакој њеној тачки, а пошто је дефинисан и нормални вектор $N(t)$, дефинисан је и бинормални вектор $B(t)$ (у случају да је $S=\mathbb{R}^2$, тј. да је крива β равинска, можемо кривој, а и векторима $T(t)$ и $N(t)$ додати трећу координату која је нула). Важи $N(t)=B(t)\times T(t)$, па је $(\beta(t)-C)\times(B(t)\times T(t))=\vec{0}$, тј. $\langle\beta(t)-C,T(t)\rangle B(t)-\langle\beta(t)-C,B(t)\rangle T(t)=\vec{0}$. Како су вектори $B(t)$ и $T(t)$ линеарно независни, следи да је $\langle\beta(t)-C,T(t)\rangle=0$ и $\langle\beta(t)-C,B(t)\rangle=0$. Следи да је $0=\langle\beta'(t),T(t)\rangle+\langle\beta(t)-C,T'(t)\rangle$, па како је $T(t)=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}$, следи да је $\beta'(t)=\|\beta'(t)\|\cdot T(t)=v(t)\cdot T(t)$, што значи да је $\langle\beta'(t),T(t)\rangle=\langle v(t)T(t),T(t)\rangle=v(t)\underbrace{\langle T(t),T(t)\rangle}_{1}=v(t)$. Такође, $T'(t)=v(t)\kappa(t)N(t)$, па је $\langle\beta(t)-C,T'(t)\rangle=\langle\beta(t)-C,v(t)\kappa(t)N(t)\rangle=v(t)\kappa(t)\langle\beta(t)-C,N(t)\rangle$. Следи да је $0=v(t)+v(t)\kappa(t)\langle\beta(t)-C,N(t)\rangle$, па је $\kappa(t)\langle\beta(t)-C,N(t)\rangle=-1$ ($v(t)\neq0$),

јер је крива β регуларна). Такође, следи да је $0=\langle \beta'(t), B(t)\rangle+\langle \beta(t)-C, B'(t)\rangle$. Како је
$B'(t)=-\upsilon(t)\tau(t)N(t)$ и $\beta'(t)=\upsilon(t)N(t)$, следи да је $0=\underbrace{\langle \upsilon(t)N(t), B(t)\rangle}_{0}+\langle \beta(t)-C, -\upsilon(t)\tau(t)N(t)\rangle=$
$=-\upsilon(t)\tau(t)\langle \beta(t)-C, N(t)\rangle$, па је $0=\tau(t)\langle \beta(t)-C, N(t)\rangle$. Из једнакости $\kappa(t)\langle \beta(t)-C, N(t)\rangle=-1$ за-
кључујемо да је $\langle \beta(t)-C, N(t)\rangle\neq 0$ за свако $t\in I$, па је $\kappa(t)=-\dfrac{1}{\langle \beta(t)-C, N(t)\rangle}$ и $\tau(t)=0$, за $t\in I$.
Пошто је $\tau(t)=0$, следи да је $B'(t)=-\upsilon(t)\tau(t)N(t)=\vec{0}$, па је $B(t)=const$. Криве које имају
константан бинормални вектор јесу раванске, па је β раванска крива. Како је
$(\langle \beta(t)-C, N(t)\rangle)'=\langle \beta'(t), N(t)\rangle+\langle \beta(t)-C, N'(t)\rangle=\langle \upsilon(t)T(t), N(t)\rangle+\langle \beta(t)-C, -\upsilon(t)\kappa(t)T(t)+\upsilon(t)\tau(t)B(t)\rangle=$

$$=\upsilon(t)\underbrace{\langle T(t), N(t)\rangle}_{0}-\upsilon(t)\kappa(t)\cdot\underbrace{\langle \beta(t)-C, T(t)\rangle}_{0}+\upsilon(t)\tau(t)\underbrace{\langle \beta(t)-C, B(t)\rangle}_{0}=0,$$

следи да је $\langle \beta(t)-C, N(t)\rangle=-R=const$, па је $\kappa(t)=-\dfrac{1}{\langle \beta(t)-C, N(t)\rangle}=-\dfrac{1}{-R}=\dfrac{1}{R}=const$. Дакле,
крива β је раванска и има константну кривину $\kappa(t)=\frac{1}{R}=const$, па траг криве β припада кругу.
(а) II начин: Решићемо део под (а) на други начин. Пошто је крива регуларна, у свакој та-
чки $t\in I$ постоји тангентни вектор $T(t)$, међутим, није познато да ли постоје нормални
и бинормални вектор $N(t)$ и $B(t)$, јер није познато да ли је $\kappa(t)$ једнака нули. Претпоста-
вимо да је $\kappa(t_0)\neq 0$ за неко $t_0\in I$. Тада постоји $\delta>0$ такво да је $\kappa(t)\neq 0$ за $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$
због непрекидности кривине κ, па постоје $N(t)$ и $B(t)$ за свако $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$. По услову
задатка постоји тачка C која припада свим тангентним линијама криве α, па за свако
$t\in I$ вектор $\alpha(t)-C$, који спаја тачку C и тачку $\alpha(t)$ с криве α, јесте колинеаран с тангент-
ним вектором $T(t)$ у тој тачки, јер је он вектор правца тангентне линије криве α у тачки
$\alpha(t)$. Према томе, $(\alpha(t)-C)\times T(t)=\vec{0}$ за свако $t\in I$, па је, специјално, та једнакост испуњена за
све $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$. Како је $T(t)=N(t)\times B(t)$ за свако $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$, следи да је
$(\alpha(t)-C)\times(N(t)\times B(t))=\vec{0}$, тј. $\langle \alpha(t)-C, B(t)\rangle N(t)-\langle \alpha(t)-C, N(t)\rangle B(t)=\vec{0}$. Пошто су вектори
$N(t)$ и $B(t)$ линеарно независни, следи да је $\langle \alpha(t)-C, B(t)\rangle=0$ и $\langle \alpha(t)-C, N(t)\rangle=0$.
Према томе, $0=(\langle \alpha(t)-C, B(t)\rangle)'=\langle \alpha'(t), B(t)\rangle+\langle \alpha(t)-C, B'(t)\rangle$. Како је $T(t)=\dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}=\dfrac{\alpha'(t)}{\upsilon(t)}$, следи
да је $\alpha'(t)=\upsilon(t)T(t)$, па је $0=\langle \upsilon(t)T(t), B(t)\rangle+\langle \alpha(t)-C, -\upsilon(t)\tau(t)N(t)\rangle=\upsilon(t)\underbrace{\langle T(t), B(t)\rangle}_{0}-$
$-\upsilon(t)\tau(t)\underbrace{\langle \alpha(t)-C, N(t)\rangle}_{0}$, па одавде не добијамо никакву информацију. Поред тога, важи
$0=(\langle \alpha(t)-C, N(t)\rangle)'=\langle \alpha'(t), N(t)\rangle+\langle \alpha(t)-C, N'(t)\rangle=\langle \upsilon(t)T(t), N(t)\rangle+\langle \alpha(t)-C, -\upsilon(t)\kappa(t)T(t)+\upsilon(t)\tau(t)B(t)\rangle=$
$=\upsilon(t)\underbrace{\langle T(t), N(t)\rangle}_{0}-\upsilon(t)\kappa(t)\langle \alpha(t)-C, T(t)\rangle+\upsilon(t)\tau(t)\underbrace{\langle \alpha(t)-C, B(t)\rangle}_{0}=-\upsilon(t)\kappa(t)\langle \alpha(t)-C, T(t)\rangle$. Како је кри-
ва регуларна, важи $\upsilon(t)\neq 0$ за свако $t\in I$, па специјално и за свако $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$, а по претпо-
ставци је $\kappa(t)\neq 0$ за свако $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$, па следи да је $\langle \alpha(t)-C, T(t)\rangle=0$, за свако
$t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$. Како је $\alpha(t)-C$ колинеаран са $T(t)$ за свако $t\in I$, па самим тим и за свако
$t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$, следи да је $\alpha(t)-C=\lambda(t)T(t)$, где је $\lambda(t)\in\mathbb{R}$, неки број, па је онда
$0=\langle \alpha(t)-C, T(t)\rangle=\langle \lambda(t)T(t), T(t)\rangle=\lambda(t)\langle T(t), T(t)\rangle=\lambda(t)\|T(t)\|^2=\lambda(t)$, тј. важи $\alpha(t)-C=\vec{0}$, за свако
$t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$. Међутим, онда је $\alpha'(t)=\vec{0}$ за свако $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$, што противречи услову задатка
да је крива регуларна. Дакле, претпоставка да је $\kappa(t_0)\neq 0$ за неко $t_0\in I$ доводи до контрадик-
ције, па следи да је $\kappa(t)=0$ за свако $t\in I$. Како је $\kappa(t)=\dfrac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$, следи да је

$\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|=0$ за свако $t\in I$, односно да је $\alpha'(t)\times\alpha''(t)=\vec{0}$ за свако $t\in I$. Другим речима, вектор убрзања $\alpha''(t)$ је колинеаран с вектором брзине у свакој тачки $t\in I$, па за свако $t\in I$ постоји $\lambda(t)\in\mathbb{R}$ такво да је $\alpha''(t)=\lambda(t)\alpha'(t)$ (пошто је $\alpha'(t)\neq\vec{0}$, скалар $\lambda(t)$ се може ставити уз њега). Како је $\alpha'(t)=\|\alpha'(t)\|T(t)=\vartheta(t)T(t)$ и $\vartheta(t)=\|\alpha'(t)\|=\sqrt{\langle\alpha'(t),\alpha'(t)\rangle}$ је диференцијабилна за свако $t\in I$, јер је $\vartheta'(t)=\frac{1}{2\sqrt{\langle\alpha'(t),\alpha'(t)\rangle}}\cdot\left(\langle\alpha''(t),\alpha'(t)\rangle+\langle\alpha'(t),\alpha''(t)\rangle\right)=\frac{2\langle\alpha''(t),\alpha'(t)\rangle}{2\vartheta(t)}$ дефинисан за свако $t\in I$ ($\vartheta(t)\neq0$ због регуларности криве α), следи да је $\lambda(t)\alpha'(t)=\alpha''(t)=(\vartheta(t)T(t))'=\vartheta'(t)T(t)+\vartheta(t)T'(t)$, па је $\lambda(t)\vartheta(t)T(t)-\vartheta'(t)T(t)=\vartheta(t)T'(t)$, тј. $T'(t)=\frac{\lambda(t)\vartheta(t)-\vartheta'(t)}{\vartheta(t)}T(t)=\mu(t)T(t)$. Дакле, вектори $T'(t)$ и $T(t)$ су колинеарни. Како је $1=\|T(t)\|^2=\langle T(t),T(t)\rangle$, следи да је $0=(\langle T(t),T(t)\rangle)'=\langle T'(t),T(t)\rangle+\langle T(t),T'(t)\rangle=2\langle T'(t),T(t)\rangle$, па је $\langle T'(t),T(t)\rangle=0$. Дакле, $\langle\mu(t)T(t),T(t)\rangle=0$, тј. $\mu(t)\underbrace{\langle T(t),T(t)\rangle}_{1}=0$, па је $\mu(t)=0$, што значи да је $T'(t)=0$, за свако $t\in I$. Следи да је $T(t)=u=\text{const}$, $t\in I$, тј. да је $\frac{\alpha'(t)}{\vartheta(t)}=u$, па је $\alpha'(t)=\vartheta(t)\cdot u$, $t\in I$. Нека је $\Lambda(t)=\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(\theta)\|d\theta$, $t_0\in I$ произвољно, функција дужине лука криве α. Тада је $\Lambda'(t)=\|\alpha'(t)\|=\vartheta(t)$, тј. $\Lambda(t)$ је примитивна функција функције $\vartheta(t)$, па је $\alpha(t)=\Lambda(t)\cdot u+D$, где је $D\in S$ нека тачка. Одавде је јасно да траг криве α припада правој која садржи тачку D и има вектор правца u, јер је за свако $t\in I$ вектор $\alpha(t)-D$, који спаја тачке D и $\alpha(t)$, колинеаран вектору u (јер је $\alpha(t)-D=\Lambda(t)\cdot u$). Дакле, траг криве α припада некој правој.

19. (а) Нека је $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$, $0\in I$, $K\neq0$, природно параметризована крива. Доказати да је $[X-\alpha(0),\alpha'(0),\alpha''(0)]\equiv0$, $X(x,y,z)$, једначина оскулаторне равни у тачки $\alpha(0)$.

(б) Доказати да све оскулаторне равни неке регуларне криве с кривином различитом од нуле садрже фиксну тачку акко је та крива раванска.

(а) Оскулаторна раван криве α у тачки $\alpha(0)$ је раван која садржи ту тачку и нормална је на $B(0)$. Дакле, ако је X произвољна тачка те равни, вектор $X-\alpha(0)$, који спаја тачку $\alpha(0)$ и тачку X, припада тој равни, па је $X-\alpha(0)\perp B(0)$, тј. $\langle X-\alpha(0),B(0)\rangle\equiv0$. Како је $B(0)=\frac{\alpha'(0)\times\alpha''(0)}{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|}$ и дефинисан је, јер је $K(0)=\frac{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3}\neq0$, следи да је $\left\langle X-\alpha(0),\frac{\alpha'(0)\times\alpha''(0)}{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|}\right\rangle\equiv0$, тј. $\frac{1}{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|}\langle X-\alpha(0),\alpha'(0)\times\alpha''(0)\rangle\equiv0$. Дакле, $\langle X-\alpha(0),\alpha'(0)\times\alpha''(0)\rangle\equiv0$, односно $\langle\alpha'(0)\times\alpha''(0),X-\alpha(0)\rangle\equiv0$, па је $[\alpha'(0),\alpha''(0),X-\alpha(0)]\equiv0$. Како је $[u,v,w]=[w,u,v]$, следи да је $[X-\alpha(0),\alpha'(0),\alpha''(0)]\equiv0$, што је и требало доказати.

(б) Нека је $\beta:I\to\mathbb{R}^3$ регуларна крива с кривином различитом од нуле.

$\boxed{\Leftarrow}$: Нека је $\beta(t)=(\beta_1(t),\beta_2(t),\beta_3(t))$ и нека њен траг припада равни $\pi: ax+by+cz+d=0$. Тада је $a\cdot\beta_1(t)+b\cdot\beta_2(t)+c\cdot\beta_3(t)+d=0$ за свако $t\in I$, па је $a\cdot\beta_1'(t)+b\cdot\beta_2'(t)+c\cdot\beta_3'(t)=0$, тј. $\langle\beta'(t),(a,b,c)\rangle=0$, што значи да је вектор брзине $\beta'(t)$ у тачки $t\in I$ нормалан на вектору (a,b,c), који је вектор нормалан на равни π, што значи да представник вектора $\beta'(t)$ који почиње у тачки $\beta(t)$ припада равни π. То значи да и тангентни вектор $T(t)=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}$ (он постоји у свакој тачки $t\in I$ јер је крива β регуларна, па је $\beta'(t)\neq\vec{0}$) припада равни π. Такође, важи $a\cdot\beta_1''(t)+b\cdot\beta_2''(t)+c\cdot\beta_3''(t)=0$, тј. $\langle\beta''(t),(a,b,c)\rangle=0$, што значи да је и вектор убрзања $\beta''(t)$ у тачки $t\in I$ нормалан на вектору (a,b,c), који је вектор нормалан на равни π, што значи да представник вектора $\beta''(t)$ који почиње у тачки $\beta(t)$ припада равни π. Како су вектори $\beta'(t)$ и $\beta''(t)$ у равни

π, следи да је вектор $\beta'(t)\times\beta''(t)$ нормалан на равни π. Како је $\kappa(t)\neq 0$, тј. $\frac{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3}\neq 0$, следи да је $\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|\neq 0$, па постоји бинормални вектор $B(t)=\frac{\beta'(t)\times\beta''(t)}{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}$ у свакој тачки и нормалан је на равни π. Како је $B(t)$ вектор нормалан на оскулаторној равни криве β у тачки $\beta(t)$, а раван π садржи тачку $\beta(t)$ и $B(t)$ је вектор нормалан на равни π, следи да је раван π оскулаторна раван криве β у свакој њеној тачки. Дакле, све оскулаторне равни криве β се поклапају (јер су све заправо раван π), па стога садрже неку тачку $C\in\pi$.

$\boxed{\Rightarrow}$: Нека све оскулаторне равни криве β садрже тачку $C\in\mathbb{R}^3$. Како оскулаторна раван криве β у тачки $\beta(t)$ садржи тачку C (а садржи и тачку $\beta(t)$), следи да садржи вектор $\beta(t)-C$, па је $\langle\beta(t)-C,B(t)\rangle=0$ за свако $t\in I$ (вектор $B(t)$ је нормалан на оскулаторној равни у тачки $\beta(t)$, па је нормалан на вектору $\beta(t)-C$ који припада тој оскулаторној равни). Следи да је $0=(\langle\beta(t)-C,B(t)\rangle)'=\langle\beta'(t),B(t)\rangle+\langle\beta(t)-C,B'(t)\rangle=\langle\nu(t)T(t),B(t)\rangle+\langle\beta(t)-C,-\nu(t)\tau(t)N(t)\rangle=\nu(t)\underbrace{\langle T(t),B(t)\rangle}_{=0}-\nu(t)\tau(t)\langle\beta(t)-C,N(t)\rangle=-\nu(t)\tau(t)\langle\beta(t)-C,N(t)\rangle$. Претпоставимо да је $\tau(t)\neq 0$. Како је $\nu(t)\neq 0$, јер је крива регуларна, следи да је $\langle\beta(t)-C,N(t)\rangle=0$. Следи да је и $0=(\langle\beta(t)-C,N(t)\rangle)'=\langle\beta'(t),N(t)\rangle+\langle\beta(t)-C,N'(t)\rangle=\langle\nu(t)T(t),N(t)\rangle+\langle\beta(t)-C,-\nu(t)\kappa(t)T(t)+\nu(t)\tau(t)B(t)\rangle=\nu(t)\underbrace{\langle T(t),N(t)\rangle}_{=0}-\nu(t)\kappa(t)\langle\beta(t)-C,T(t)\rangle+\nu(t)\tau(t)\underbrace{\langle\beta(t)-C,B(t)\rangle}_{=0}=-\nu(t)\kappa(t)\langle\beta(t)-C,T(t)\rangle$. Како је $\nu(t)\neq 0$ јер је крива регуларна и $\kappa(t)\neq 0$ јер је β крива с кривином различитом од нуле, следи да је $\langle\beta(t)-C,T(t)\rangle=0$. Како је $T(t),N(t),B(t)$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$, следи да је $\beta(t)-C=\lambda(t)T(t)+\mu(t)N(t)+\nu(t)B(t)$, за неке $\lambda(t),\mu(t),\nu(t)\in\mathbb{R}$. Скаларним множењем с $T(t),N(t),B(t)$ редом, добија се $0=\langle\beta(t)-C,T(t)\rangle=\langle\lambda(t)T(t)+\mu(t)N(t)+\nu(t)B(t),T(t)\rangle=\lambda(t)\underbrace{\langle T(t),T(t)\rangle}_{=1}+\mu(t)\underbrace{\langle N(t),T(t)\rangle}_{=0}+\nu(t)\underbrace{\langle B(t),T(t)\rangle}_{=0}=\lambda(t)$, па је $\beta(t)-C=\mu(t)N(t)+\nu(t)B(t)$. Скаларним множењем с $N(t)$ добија се $0=\langle\beta(t)-C,N(t)\rangle=\langle\mu(t)N(t)+\nu(t)B(t),N(t)\rangle=\mu(t)\underbrace{\langle N(t),N(t)\rangle}_{=1}+\nu(t)\underbrace{\langle B(t),N(t)\rangle}_{=0}=\mu(t)$, па је $\beta(t)-C=\nu(t)B(t)$. Коначно, $0=\langle\beta(t)-C,B(t)\rangle=\langle\nu(t)B(t),B(t)\rangle=\nu(t)\underbrace{\langle B(t),B(t)\rangle}_{=1}=\nu(t)$, па добијамо да је $\beta(t)-C=\vec{0}$. Међутим, онда је $\beta'(t)=\vec{0}$, што противречи услову да је крива β регуларна. Дакле, претпоставка $\tau(t)\neq 0$ доводи до контрадикције, па је $\tau(t)=0$ за свако $t\in I$. Како је $B'(t)=-\nu(t)\tau(t)N(t)=\vec{0}$, следи да је $B(t)=u=const.$ Следи да све оскулаторне равни садрже тачку C и имају и нормалне су на вектору u, па се све оскулаторне равни поклапају с равни π која садржи тачку C и нормална је на вектору u. Како тачка $\beta(t)$ припада оскулаторној равни криве β у тачки $\beta(t)$, следи да $\beta(t)\in\pi$ за свако $t\in I$, тј. да траг криве β припада равни π, што значи да је крива β раванска.

20. (а) Нека је $\alpha(t)$, $t\in I$, регуларна крива. Доказати да је $\alpha(t)$ сферна крива ако и само ако постоји $c\in\mathbb{R}^3$ такво да је $(\alpha(t)-c)\perp T(t)$ за свако $t\in I$.

(б) Доказати да све нормалне равни неке регуларне криве с кривином различитом од нуле садрже фиксну тачку акко је та крива сферна.

(а) $\boxed{\Rightarrow}$: Нека је $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ регуларна крива и нека њен траг припада сфери $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$. Дефинишимо $c\overset{\text{def}}{=}(x_0,y_0,z_0)$ (центар сфере) и докажимо да је $(\alpha(t)-c)\perp T(t)$ за свако $t\in I$. Како за свако $t\in I$ тачка $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$ припада сфери $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$, следи да је $(\alpha_1(t)-x_0)^2+(\alpha_2(t)-y_0)^2+(\alpha_3(t)-z_0)^2=R^2$. Како је $\alpha(t)-c=(\alpha_1(t)-x_0,\alpha_2(t)-y_0,\alpha_3(t)-z_0)$, следи да је $R^2=(\alpha_1(t)-x_0)^2+(\alpha_2(t)-y_0)^2+(\alpha_3(t)-z_0)^2=\|\alpha(t)-c\|^2=\langle\alpha(t)-c,\alpha(t)-c\rangle$. Диференцирањем добијамо $0=(\langle\alpha(t)-c,\alpha(t)-c\rangle)'=\langle\alpha'(t),\alpha(t)-c\rangle+\langle\alpha(t)-c,\alpha'(t)\rangle=2\langle\alpha(t)-c,\alpha'(t)\rangle=2\langle\alpha(t)-c,\|\alpha'(t)\|T(t)\rangle$ (вектор $T(t)$ постоји јер је α регуларна), тј. $2\|\alpha'(t)\|\langle\alpha(t)-c,T(t)\rangle=0$. Како је $\|\alpha'(t)\|\neq 0$, следи да је

$\langle \alpha(t)-c, \mathbf{T}(t)\rangle = 0$, тј. да је $(\alpha(t)-c)\perp \mathbf{T}(t)$, за свако $t\in I$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Нека је $\alpha: I\to \mathbb{R}^3$ регуларна крива и нека је $c\in\mathbb{R}^3$ такво да је $(\alpha(t)-c)\perp \mathbf{T}(t)$, за свако $t\in I$. Следи да је $\langle \alpha(t)-c, \mathbf{T}(t)\rangle = 0$, па је и $2\|\alpha'(t)\|\langle \alpha(t)-c, \mathbf{T}(t)\rangle = 0$, односно да је $0 = 2\langle \alpha(t)-c, \|\alpha'(t)\|\mathbf{T}(t)\rangle = 2\langle \alpha(t)-c, \alpha'(t)\rangle = \langle \alpha'(t), \alpha(t)-c\rangle + \langle \alpha(t)-c, \alpha'(t)\rangle = (\langle \alpha(t)-c, \alpha(t)-c\rangle)'$.

Према томе, $\langle \alpha(t)-c, \alpha(t)-c\rangle = R^2 = const$ (знамо да је константа ненегативна јер је и $\langle \alpha(t)-c, \alpha(t)-c\rangle \geqslant 0$ због позитивне дефинитности скаларног производа). Претпоставимо да је $R=0$. Тада је $\langle \alpha(t)-c, \alpha(t)-c\rangle = 0$, па је $\alpha(t)-c=\vec{0}$, за свако $t\in I$. Међутим, онда је $\alpha'(t)=\vec{0}$ за свако $t\in I$, што противречи услову да је α регуларна крива. Дакле, $R\neq 0$ (без умањења општости може се претпоставити да је $R>0$), тј. $R^2>0$. Ако је $c(x_0,y_0,z_0)$ и $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$, добијамо $R^2=(\alpha_1(t)-x_0)^2+(\alpha_2(t)-y_0)^2+(\alpha_3(t)-z_0)^2$, тј. да тачка $\alpha(t)$ припада сфери с центром $c(x_0,y_0,z_0)$ и полупречником R за свако $t\in I$. Према томе, траг криве α припада тој сфери, па је крива α сферна.

(б) Нека је $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ регуларна крива с кривином различитом од нуле. Тада је, на основу дела (а), крива α сферна акко постоји $c\in\mathbb{R}^3$ такво да је $(\alpha(t)-c)\perp\mathbf{T}(t)$. Ово значи да је вектор $\alpha(t)-c$, који спаја тачку c с тачком $\alpha(t)$, нормалан на тангентом вектору криве α у тачки $t\in I$, а како је нормална раван криве α у тачки $\alpha(t)$ раван која садржи тачку $\alpha(t)$ и нормална је на вектору $\mathbf{T}(t)$, услов $(\alpha(t)-c)\perp\mathbf{T}(t)$ је еквивалентан да тачка c припада нормалној равни криве α у тачки $\alpha(t)$, за свако $t\in I$. Ово управо значи да све нормалне равни криве α садрже тачку c. Дакле, заиста је α сферна крива акко постоји $c\in\mathbb{R}^3$ која припада свим нормалним равнима криве α.

2a. Нека је α природно параметризована крива која припада сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

(а) Изразити вектор положаја тачака криве α у Френеовој бази те криве.

(б) Доказати да за кривину κ и торзију $\tau\neq 0$ криве α важи $\tau^2\left(R^2-\frac{1}{\kappa^2}\right)=\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2$. Специјално, важи $\kappa\geqslant\frac{1}{R}$.

(в) Доказати да је вектор убрзања дате криве α супротног смера од вектора положаја тачке са криве ако и само ако је крива део великог круга.

(а) Ако је $\alpha(s)=(\alpha_1(s),\alpha_2(s),\alpha_3(s))$, онда важи $\alpha_1(s)^2+\alpha_2(s)^2+\alpha_3(s)^2=R^2$ (јер траг криве α припада сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$), па је $\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle=R^2$. Следи да је $0=(\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle)'=\langle\alpha'(s),\alpha(s)\rangle+\langle\alpha(s),\alpha'(s)\rangle=2\langle\alpha(s),\alpha'(s)\rangle=2\langle\alpha(s),\mathbf{T}(s)\rangle$ (крива је природно параметризована, па је $\|\alpha'(s)\|=1$, што значи да је $\mathbf{T}(s)=\frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}=\alpha'(s)$). Дакле, $\langle\alpha(s),\mathbf{T}(s)\rangle=0$. Даље, добијамо $0=(\langle\alpha(s),\mathbf{T}(s)\rangle)'=\langle\alpha'(s),\mathbf{T}(s)\rangle+\langle\alpha(s),\mathbf{T}'(s)\rangle=\langle\mathbf{T}(s),\mathbf{T}(s)\rangle+\langle\alpha(s),\kappa(s)\mathbf{N}(s)\rangle=1+\kappa(s)\langle\alpha(s),\mathbf{N}(s)\rangle$ (важи $\vartheta(s)=\|\alpha'(s)\|=1$, па из Френеове формуле $\mathbf{T}'(s)=\vartheta(s)\kappa(s)\mathbf{N}(s)$ следи да је $\mathbf{T}'(s)=\kappa(s)\mathbf{N}(s)$). Дакле, $\kappa(s)\langle\alpha(s),\mathbf{N}(s)\rangle=-1$, па је $\kappa(s)\neq 0$ и $\langle\alpha(s),\mathbf{N}(s)\rangle=-\frac{1}{\kappa(s)}$. Коначно, $\left(-\frac{1}{\kappa(s)}\right)'=-\left(-\frac{1}{\kappa(s)^2}\right)\cdot\kappa'(s)=\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}$, па је $\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}=(\langle\alpha(s),\mathbf{N}(s)\rangle)'=\langle\alpha'(s),\mathbf{N}(s)\rangle+\langle\alpha(s),\mathbf{N}'(s)\rangle=\langle\mathbf{T}(s),\mathbf{N}(s)\rangle+\langle\alpha(s),-\kappa(s)\mathbf{T}(s)+\tau(s)\mathbf{B}(s)\rangle=0-\kappa(s)\langle\alpha(s),\mathbf{T}(s)\rangle+\tau(s)\langle\alpha(s),\mathbf{B}(s)\rangle=\tau(s)\langle\alpha(s),\mathbf{B}(s)\rangle$.

Разликујемо два случаја:

1° $\tau(s)=0$

Како је $\mathbf{T}(s),\mathbf{N}(s),\mathbf{B}(s)$ ортонормирана база векторског простора $\mathbb{R}^3$, следи да је $\alpha(s)=\lambda(s)\mathbf{T}(s)+\mu(s)\mathbf{N}(s)+\nu(s)\mathbf{B}(s)$, па је $\alpha(s)=\langle\alpha(s),\mathbf{T}(s)\rangle\mathbf{T}(s)+\langle\alpha(s),\mathbf{N}(s)\rangle\mathbf{N}(s)+\langle\alpha(s),\mathbf{B}(s)\rangle\mathbf{B}(s)$ (јер је

$\langle\alpha(s),T(s)\rangle=\langle\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\nu(s)B(s),T(s)\rangle=\lambda(s)\underbrace{\langle T(s),T(s)\rangle}_{=1}+\mu(s)\underbrace{\langle N(s),T(s)\rangle}_{=0}+\nu(s)\underbrace{\langle B(s),T(s)\rangle}_{=0}=\lambda(s)$,

$\langle\alpha(s),N(s)\rangle=\langle\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\nu(s)B(s),N(s)\rangle=\lambda(s)\underbrace{\langle T(s),N(s)\rangle}_{=0}+\mu(s)\underbrace{\langle N(s),N(s)\rangle}_{=1}+\nu(s)\underbrace{\langle B(s),N(s)\rangle}_{=0}=\mu(s)$,

$\langle\alpha(s),B(s)\rangle=\langle\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\nu(s)B(s),B(s)\rangle=\lambda(s)\underbrace{\langle T(s),B(s)\rangle}_{=0}+\mu(s)\underbrace{\langle N(s),B(s)\rangle}_{=0}+\nu(s)\underbrace{\langle B(s),B(s)\rangle}_{=1}=\nu(s)$).

Дакле, $\alpha(s)=0\cdot T(s)-\frac{1}{K(s)}N(s)+\langle\alpha(s),B(s)\rangle B(s)$. Такође, како је $T(s),N(s),B(s)$ ортонормирана база, следи да је $R^2=\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle=0^2+\left(-\frac{1}{K(s)}\right)^2+\left(\langle\alpha(s),B(s)\rangle\right)^2=\frac{1}{K(s)^2}+\left(\langle\alpha(s),B(s)\rangle\right)^2$, па је $\left(\langle\alpha(s),B(s)\rangle\right)^2=R^2-\frac{1}{K(s)^2}$. Дакле, $R^2-\frac{1}{K(s)^2}\geq 0$, па је $\frac{1}{K(s)^2}\leq R^2$, тј. $K(s)^2\geq\frac{1}{R^2}$, односно $K(s)\geq\frac{1}{R}$. Такође, $\langle\alpha(s),B(s)\rangle=\pm\sqrt{R^2-\frac{1}{K(s)^2}}$ и $\alpha(s)=-\frac{1}{K(s)}N(s)\pm\sqrt{R^2-\frac{1}{K(s)^2}}B(s)$.

2° $\tau(s)\neq 0$

Како је $\tau(s)\langle\alpha(s),B(s)\rangle=\frac{K'(s)}{K(s)^2}$, следи да је $\langle\alpha(s),B(s)\rangle=\frac{K'(s)}{K(s)^2\tau(s)}$. Слично као у случају 1°, важи $\alpha(s)=\langle\alpha(s),T(s)\rangle T(s)+\langle\alpha(s),N(s)\rangle N(s)+\langle\alpha(s),B(s)\rangle B(s)$, јер је $T(s),N(s),B(s)$ ортонормирана база, па је $\alpha(s)=0\cdot T(s)-\frac{1}{K(s)}N(s)+\frac{K'(s)}{K(s)^2\tau(s)}B(s)$, тј. $\alpha(s)=-\frac{1}{K(s)}N(s)+\frac{K'(s)}{K(s)^2\tau(s)}B(s)$.

(б) Како је $\tau(s)\neq 0$, следи да је $\alpha(s)=-\frac{1}{K(s)}N(s)+\frac{K'(s)}{K(s)^2\tau(s)}B(s)$. Пошто је $T(s),N(s),B(s)$ ортонормирана база, следи да је $R^2=\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle=0^2+\left(-\frac{1}{K(s)}\right)^2+\left(\frac{K'(s)}{K(s)^2\tau(s)}\right)^2$, па је $R^2=\frac{1}{K(s)^2}+\left(\frac{K'(s)}{K(s)^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\tau(s)^2}$, тј. $\left(\frac{K'(s)}{K(s)^2}\right)^2=\tau(s)^2\cdot\left(R^2-\frac{1}{K(s)^2}\right)$. Специјално, важи $R^2-\frac{1}{K(s)^2}\geq 0$, па важи и $K(s)\geq\frac{1}{R}$.

(в) $\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је вектор убрзања $\alpha''(s)$ супротног смера од вектора положаја $\alpha(s)$ за свако $s\in I$,
тј. нека је $\alpha''(s)=-\lambda(s)\alpha(s)$, за неко $\lambda(s)>0$. Пошто је крива природно параметризована, тј. важи $\|\alpha'(s)\|=1$ за све
$s\in I$, следи да је $\alpha'(s)=T(s)$, па је $-\lambda(s)\alpha(s)=\alpha''(s)=T'(s)=K(s)N(s)$, за свако $s\in I$. Претпостави-
мо да је $\tau(s_0)\neq 0$ за неко $s_0\in I$. Због непрекидности торзије τ, постоји неко $\delta>0$ такво да је
$\tau(s)\neq 0$ за све $s\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$. Тада је $-\lambda(s)\left(-\frac{1}{K(s)}N(s)+\frac{K'(s)}{K(s)^2\tau(s)}B(s)\right)=K(s)N(s)$, па је $\frac{\lambda(s)}{K(s)}=K(s)$ и
$\frac{\lambda(s)K'(s)}{K(s)^2\tau(s)}=0$ за свако $s\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$. Добијамо да је $K'(s)=0$ (јер је $\lambda(s)>0$), па из једнакости
$\tau(s)^2\cdot\left(R^2-\frac{1}{K(s)^2}\right)=\left(\frac{K'(s)}{K(s)^2}\right)^2=0$ и $\tau(s)\neq 0$ следи $R^2-\frac{1}{K(s)^2}=0$, тј. $K(s)^2=\frac{1}{R^2}$, односно $K(s)=\frac{1}{R}$, што одго-
вара добијеном $K'(s)=0$. Према томе, $\lambda(s)=K(s)^2=\frac{1}{R^2}$, па је $\alpha''(s)=-\frac{1}{R^2}\alpha(s)$. Међутим, онда добијамо
да је $\alpha'''(s)=-\frac{1}{R^2}\alpha'(s)$, па је $\alpha'''(s)\times\alpha'(s)=\left(-\frac{1}{R^2}\alpha'(s)\right)\times\alpha'(s)=-\frac{1}{R^2}(\alpha'(s)\times\alpha'(s))=\vec{0}$. Одавде следи
да је $0=\langle\vec{0},\alpha''(s)\rangle=\langle\alpha'''(s)\times\alpha'(s),\alpha''(s)\rangle=[\alpha'''(s),\alpha'(s),\alpha''(s)]=[\alpha'(s),\alpha''(s),\alpha'''(s)]$, а пошто је
$0\neq\frac{1}{R}=K(s)=\frac{\|\alpha'(s)\times\alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}=\frac{\|\alpha'(s)\times\alpha''(s)\|}{1^3}$, следи да је $\tau(s)=\frac{[\alpha'(s),\alpha''(s),\alpha'''(s)]}{\|\alpha'(s)\times\alpha''(s)\|^2}=0$, за све $s\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$
што противречи претпоставци да је $\tau(s)\neq 0$ за све $s\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$. Према томе, не постоји
$s_0\in I$ такво да је $\tau(s_0)\neq 0$, па је $\tau(s)=0$ за свако $s\in I$. Тада је $-\lambda(s)\left(-\frac{1}{K(s)}N(s)\pm\sqrt{R^2-\frac{1}{K(s)^2}}B(s)\right)=K(s)N(s)$,
па је $\frac{\lambda(s)}{K(s)}=K(s)$ и $-\lambda(s)\cdot\left(\pm\sqrt{R^2-\frac{1}{K(s)^2}}\right)=0$. Како је $\lambda(s)>0$, следи да је $\sqrt{R^2-\frac{1}{K(s)^2}}=0$, па је стога
$K(s)^2=\frac{1}{R^2}$, тј. $K(s)=\frac{1}{R}$. Такође, $B'(s)=-\tau(s)N(s)=\vec{0}$ за $s\in I$, па је $B(s)=u=const$. Добијамо да је
α раванска крива чија је кривина $K(s)=\frac{1}{R}$, па је у питању део круга полупречника R. Како
је α на сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, следи да је она део великог круга те сфере (јер сви остали
кругови имају полупречнике мање од R).

($\Leftarrow$): Нека је крива α део великог круга. Како је сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ полупречника R, онда је и велики круг те сфере полупречника R, па је $K(s)=\frac{1}{R}$ за све $s\in I$. Такође, круг је раванска крива, па је $B(s)=u=const$, за све $s\in I$, па је $\vec{0}=B'(s)=-\tau(s)N(s)$, па пошто је $N(s)\neq\vec{0}$, следи да је $\tau(s)=0$ за свако $s\in I$. Из дела (а) следи да је $\alpha(s)=-\frac{1}{K(s)}N(s)\pm\sqrt{R^2-\frac{1}{K(s)^2}}B(s)$, па је $\alpha(s)=-\frac{1}{\frac{1}{R}}N(s)\pm\sqrt{R^2-\frac{1}{\frac{1}{R^2}}}B(s)=-RN(s)\pm\sqrt{R^2-R^2}B(s)=-RN(s)$. Према томе, $\alpha'(s)=-RN'(s)=-R(-K(s)T(s)+\tau(s)B(s))=-R(-\frac{1}{R}T(s)+0\cdot B(s))=T(s)$ (очекивано, јер је α природно параметризована, тј. $\|\alpha'(s)\|=1$, па је $\alpha'(s)=T(s)$) и $\alpha''(s)=T'(s)=K(s)N(s)=\frac{1}{R}N(s)$, па је $\alpha''(s)=\frac{1}{R}N(s)=-\frac{1}{R^2}\cdot(-RN(s))=-\frac{1}{R^2}\alpha(s)$, тј. вектор убрзања $\alpha''(s)$ је супротног смера од вектора положаја $\alpha(s)$ тачке са криве.

22. Уопштена завојна линија (хеликс) је просторна крива чији тангентни вектор заклапа константан угао $\theta\in(0,\pi)$, $\theta\neq\frac{\pi}{2}$, с фиксираним ненула вектором $v\in\mathbb{R}^3$. Уопштени хеликс лежи на цилиндру чије су изводнице одређене правцем v и тачкама криве. Доказати да је крива уопштена завојна линија акко важи један од услова:
(а) нормале су нормалне на v;
(б) бинормале граде константан угао са v;
(в) $\frac{K}{\tau}=const$.

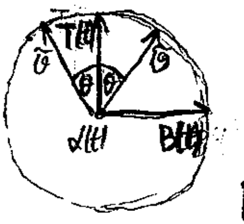
Пошто је v ненула вектор, постоји вектор $\tilde{v}=\frac{v}{\|v\|}$, чији је интензитет једнак 1, а има исти правац и смер као v, па је $\sphericalangle(\tilde{v},u)=\sphericalangle(v,u)$ за сваки вектор u. Крива $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, јесте уопштени хеликс акко је $\sphericalangle(T(t),\tilde{v})=\theta=const$, тј. акко је $\cos\theta=\cos\sphericalangle(T(t),\tilde{v})=\frac{\langle T(t),\tilde{v}\rangle}{\underbrace{\|T(t)\|\|\tilde{v}\|}_{=1}}=\langle T(t),\tilde{v}\rangle$.

(а) Доказујемо да је α уопштени хеликс акко су нормале ($N(t)$) нормалне на $\tilde{v}$.

($\Rightarrow$): Нека је α уопштени хеликс и нека је $\theta\in(0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ угао који тангентни вектори $T(t)$ заклапају с вектором v. Тада је $\langle T(t),\tilde{v}\rangle=\cos\theta=const$, па је $0=(\langle T(t),\tilde{v}\rangle)'=\langle T'(t),\tilde{v}\rangle+\langle T(t),\vec{0}\rangle=\langle v(t)K(t)N(t),\tilde{v}\rangle=v(t)K(t)\langle N(t),\tilde{v}\rangle$ ($v(t)=\|\alpha'(t)\|\neq0$ је интензитет вектора брзине (подебљано v), а извод константне функције $\tilde{v}$ је $\vec{0}$). Пошто је $v(t)\neq0$ и $K(t)\neq0$ (да би постојале нормале $N(t)$ и бинормале $B(t)$), следи да је $\langle N(t),\tilde{v}\rangle=0$, тј. да су нормале $N(t)$ нормалне на $\tilde{v}$, а самим тим и на v.

($\Leftarrow$): Нека су нормале $N(t)$ нормалне на v, за свако $t\in I$. Тада су $N(t)$ нормални и на $\tilde{v}$, тј. важи $\langle N(t),\tilde{v}\rangle=0$. Како је $(\langle T(t),\tilde{v}\rangle)'=\langle T'(t),\tilde{v}\rangle+\langle T(t),\vec{0}\rangle=\langle v(t)K(t)N(t),\tilde{v}\rangle=v(t)K(t)\langle N(t),\tilde{v}\rangle=0$, следи да је $\langle T(t),\tilde{v}\rangle=const$. Како је $\|T(t)\|=\|\tilde{v}\|=1$, следи да је $-1\leq\langle T(t),\tilde{v}\rangle\leq1$, па постоји $\theta\in[0,\pi]$ такво да је $\langle T(t),\tilde{v}\rangle=\cos\theta$. Треба доказати да је $\theta\neq0$, $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ и $\theta\neq\pi$. Ако би било $\theta=0$, онда би било $T(t)=\tilde{v}$, па би било $v(t)K(t)N(t)=T'(t)=\vec{0}$, што због $v(t)\neq0$ и $N(t)\neq\vec{0}$ повлачи $K(t)=0$, а онда нормала $N(t)$ није дефинисана. Слично, ако би било $\theta=\pi$, онда би било $T(t)=-\tilde{v}$, па би било $v(t)K(t)N(t)=T'(t)=\vec{0}$, што због $v(t)\neq0$ и $N(t)\neq\vec{0}$ повлачи $K(t)=0$, а онда нормала $N(t)$ није дефинисана. Остаје још случај $\theta=\frac{\pi}{2}$. Тада је $\langle T(t),\tilde{v}\rangle=0$, па пошто је и $\langle N(t),\tilde{v}\rangle=0$, онда је $B(t)\times\tilde{v}=(T(t)\times N(t))\times\tilde{v}=\langle T(t),\tilde{v}\rangle N(t)-\langle N(t),\tilde{v}\rangle T(t)=\vec{0}$. Дакле, добијамо да је $B(t)$ колинеаран с $\tilde{v}$, па је $B(t)=\pm\tilde{v}=const$, што значи да је α раванска крива, а у услову задатка је дато да је α просторна крива. Према томе, $\theta\neq0$, $\theta\neq\pi$ и $\theta\neq\frac{\pi}{2}$, па је $\sphericalangle(T(t),v)=\sphericalangle(T(t),\tilde{v})=\theta\in(0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$, што значи да је α уопштени хеликс.

(б) Доказујемо да је α уопштени хеликс акко бинормале граде константан угао с ϑ
$\boxed{\Rightarrow}$: Нека је α уопштени хеликс. Онда је, на основу дела (а), $\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$ за свако $t \in I$. Посматрајмо ра-
ван у тачки $\alpha(t)$ која је нормална на вектору $N(t)$ (то је раван која садржи тачку $\alpha(t)$ и векторе $T(t)$ и $N(t)$,
што је ректификациона раван криве α у тачки $\alpha(t)$). Тој равни припада и вектор $\tilde{\vartheta}$, јер је $\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$, тј.
$N(t) \perp \tilde{\vartheta}$. Пошто $\tilde{\vartheta}$ гради угао θ с вектором $T(t)$, а вектори $T(t)$ и $B(t)$ су нормални, следи да $\tilde{\vartheta}$ гради



с $B(t)$ или угао $\frac{\pi}{2}-\theta$ или угао $\frac{\pi}{2}+\theta$, ако је $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, или угао $2\pi - (\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{3\pi}{2} - \theta$, ако је
$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (говоримо о конвексном углу, пошто се углом између два вектора сматра конвек-
сни угао који граде њима одређене полуправе). Докажимо то и формално.
Вектори $T(t), N(t), B(t)$ чине ортонормирану базу векторског простора $\mathbb{R}^3$, па следи да је
$\tilde{\vartheta} = \langle \tilde{\vartheta}, T(t)\rangle T(t) + \langle \tilde{\vartheta}, N(t)\rangle N(t) + \langle \tilde{\vartheta}, B(t)\rangle B(t) = \cos\measuredangle(T(t), \tilde{\vartheta}) \cdot T(t) + 0 \cdot N(t) + \langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle B(t) = \cos\theta \cdot T(t) + \langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle B(t)$.
Како је $\|\tilde{\vartheta}\| = 1$, следи да је $1 = \cos^2\theta + (\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle)^2$, па је $(\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle)^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$, па је $\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle = \pm\sin\theta$.
Функција $\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle$ је непрекидна, јер је $B(t)$ непрекидна и скаларни производ је непрекидан, па следи
да је $\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle = const$ (пошто је непрекидна, не може за неке t бити $\sin\theta$, а за неке бити $-\sin\theta$, јер
би иначе постојао прекид). Такође, $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$, а $-\sin\theta = \sin(-\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}-(-\theta)) = \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$ и $-\sin\theta = -\sin(\pi-\theta) =$
$= \sin(\theta-\pi) = \cos(\frac{\pi}{2}-(\theta-\pi)) = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta+\pi) = \cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)$, па пошто је $\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle = \cos\measuredangle(B(t), \tilde{\vartheta})$, следи да је угао који
граде $B(t)$ и $\tilde{\vartheta}$ једнак $\frac{\pi}{2}-\theta$ или $\frac{\pi}{2}+\theta$ или $\frac{3\pi}{2}-\theta$. Толики угао граде и $B(t)$ и ϑ.
$\boxed{\Leftarrow}$: Нека $B(t)$ и ϑ граде константан угао φ. Тада је угао између $B(t)$ и $\tilde{\vartheta}$ такође φ и важи
$\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle = \cos\varphi = const$, па је $0 = (\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle)' = \langle B'(t), \tilde{\vartheta}\rangle + \langle B(t), \vec{0}\rangle = \langle -\vartheta(t)\tau(t)N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = -\vartheta(t)\tau(t)\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle$.
Пошто је $\vartheta(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$, јер је α регуларна, следи да је $\tau(t)\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$, за свако $t \in I$. Нека је
$t_0 \in I$ такво да је $\tau(t_0) = 0$. Како је $0 = (\tau(t)\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle)' = \tau'(t)\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle + \tau(t)(\langle N'(t), \tilde{\vartheta}\rangle + \langle N(t), \vec{0}\rangle)$, за
$t = t_0$ добијамо $0 = \tau'(t_0)\langle N(t_0), \tilde{\vartheta}\rangle + \tau(t_0) \cdot \langle N'(t_0), \tilde{\vartheta}\rangle = \tau'(t_0)\langle N(t_0), \tilde{\vartheta}\rangle$. Претпоставимо да је $\tau'(t_0) \neq 0$.
Због непрекидности τ' постоји неки број $\delta > 0$ такав да је $\tau'(t) \neq 0$ за $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$, па је
на интервалу $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ функција $\tau(t)$ строго монотона. То значи да је $\tau(t) \neq \tau(t_0)$ за $t \neq t_0$, тј.
да је $\tau(t) \neq 0$ за $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \setminus \{t_0\}$. Због $\tau(t)\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$ онда следи да је $\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$ за све
$t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \setminus \{t_0\}$. За $t = t_0$ је $\tau'(t_0)\langle N(t_0), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$, па је $\langle N(t_0), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$ због $\tau'(t_0) \neq 0$. Дакле, ва-
жи $\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$ за све $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$. Према томе, из доказа смера $\boxed{\Leftarrow}$ дела (а) добијамо да је
$\langle T(t), \tilde{\vartheta}\rangle = \cos\theta$, за неко $\theta \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$. Такође, $0 = (\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle)' = \langle N'(t), \tilde{\vartheta}\rangle + \langle N(t), \vec{0}\rangle = \langle -\vartheta(t)\kappa(t)T(t) + \vartheta(t)\tau(t)B(t), \tilde{\vartheta}\rangle =$
$= \vartheta(t)(-\kappa(t)\langle T(t), \tilde{\vartheta}\rangle + \tau(t)\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle) = \vartheta(t)(-\kappa(t) \cdot \cos\theta + \tau(t) \cdot \cos\varphi)$. Како је $\vartheta(t) \neq 0$, следи да је
$-\kappa(t) \cdot \cos\theta + \tau(t) \cdot \cos\varphi = 0$, за свако $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$. Специјално, $-\kappa(t_0) \cdot \cos\theta + \tau(t_0) \cdot \cos\varphi = 0$, тј. $-\kappa(t_0) \cdot \cos\theta = 0$,
па следи да је $\kappa(t_0) = 0$, јер је $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, што је немогуће, јер тада не постоје вектори $B(t_0), N(t_0)$,
а ни торзија $\tau(t_0)$. Закључујемо да претпоставка $\tau'(t_0) \neq 0$ није добра, па је $\tau'(t_0) = 0$. Према то-
ме, $\left(\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}\right)'\Big|_{t=t_0} = \frac{\tau'(t_0)\kappa(t_0) - \tau(t_0)\kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)^2} = \frac{0-0}{\kappa(t_0)^2} = 0$. Овиме је доказано да је у тачкама $t_0 \in I$, за које је
$\tau(t_0) = 0$, извод функције $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}$ једнак 0. Нека је сад $t_1 \in I$ таква да је $\tau(t_1) \neq 0$. Због непре-
кидности функције τ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $\tau(t) \neq 0$ за све $t \in (t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon)$, па је онда
$\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$, због $\tau(t)\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle = 0$. Из доказа смера $\boxed{\Leftarrow}$ дела (а) следи да је $\langle T(t), \tilde{\vartheta}\rangle = \cos\theta$, за
неко $\theta \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, а такође је $0 = (\langle N(t), \tilde{\vartheta}\rangle)' = \vartheta(t)(-\kappa(t)\langle T(t), \tilde{\vartheta}\rangle + \tau(t)\langle B(t), \tilde{\vartheta}\rangle) = \vartheta(t)(-\kappa(t)\cos\theta + \tau(t)\cos\varphi)$.
Пошто је $\vartheta(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$ због регуларности криве α, добијамо да је $-\kappa(t)\cos\theta + \tau(t)\cos\varphi = 0$, за свако

$t\in(t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon)$. Даље, $-\kappa'(t)\cos\theta+\tau'(t)\cos\varphi=0$ за свако $t\in(t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon)$, па специјално за $t=t_1$ добијамо $\kappa'(t_1)\cos\theta=\tau'(t_1)\cos\varphi$. Множењем с $\tau(t_1)$ добијамо $\tau(t_1)\kappa'(t_1)\cos\theta=\underline{\tau(t_1)\tau'(t_1)\cos\varphi}=$ $=\tau'(t_1)\cdot\kappa(t_1)\cos\theta$, па пошто је $\theta\neq\frac{\pi}{2}$, тј. $\cos\theta\neq0$, добијамо $\tau(t_1)\kappa'(t_1)=\tau'(t_1)\kappa(t_1)$. Следи да је $\left(\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}\right)'\Big|_{t=t_1}=\frac{\tau'(t_1)\kappa(t_1)-\tau(t_1)\kappa'(t_1)}{\kappa(t_1)^2}=0$. Дакле, и за тачке $t_1\in I$, за које је $\tau(t_1)\neq0$, извод функције $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}$ једнак је 0. Пошто за произвољно $t\in I$ важи $\tau(t)=0$ или $\tau(t)\neq0$, закључујемо да за свако $t\in I$ важи $\left(\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}\right)'=0$, па је $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}=const$. То значи да ако постоји $t_0\in I$ такво да је $\tau(t_0)=0$, онда је $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}=\frac{\tau(t_0)}{\kappa(t_0)}=0$ за свако $t\in I$, што би значило да је крива α раванска, а претпоставка је да је α просторна крива. Дакле, $\tau(t)\neq0$ за свако $t\in I$, па из добијеног $\tau(t)\langle N(t),\vec{\vartheta}\rangle=0$ следи $\langle N(t),\vec{\vartheta}\rangle=0$, за свако $t\in I$. На основу дела (а) следи да је крива α уопштени хеликс.

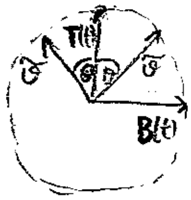
(в) Доказујемо да је α уопштени хеликс акко је $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=const$.

$\boxed{\Rightarrow}$: Нека је α уопштени хеликс и нека је $\measuredangle(T(t),\vartheta)=\theta$, за неко $\theta\in(0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$. Тада је и на основу доказа смера $\boxed{\Rightarrow}$ дела (б) је $\measuredangle(T(t),\vec{\vartheta})=\theta$. На основу дела (а) је $N(t)\perp\vec{\vartheta}$, а на основу доказа смера $\boxed{\Rightarrow}$ дела (б) је ... Пошто је $\langle N(t),\vec{\vartheta}\rangle=0$ за свако $t\in I$, следи да је $\langle B(t),\vec{\vartheta}\rangle=\pm\sin\theta$, а такође је $\langle T(t),\vec{\vartheta}\rangle=\cos\theta$.

$0=(\langle N(t),\vec{\vartheta}\rangle)'=\langle N'(t),\vec{\vartheta}\rangle+\langle N(t),\vec{0}\rangle=\langle-\upsilon(t)\kappa(t)T(t)+\upsilon(t)\tau(t)B(t),\vec{\vartheta}\rangle=\upsilon(t)\left(-\kappa(t)\langle T(t),\vec{\vartheta}\rangle+\tau(t)\langle B(t),\vec{\vartheta}\rangle\right)$.

Пошто је $\upsilon(t)=\|\alpha'(t)\|\neq0$ јер је α регуларна, следи да је $0=-\kappa(t)\cdot\cos\theta+\tau(t)\cdot(\pm\sin\theta)$, па је $\kappa(t)\cos\theta=\pm\tau(t)\sin\theta$. Како је $\kappa(t)\neq0$ и $\cos\theta\neq0$, јер је $\theta\neq\frac{\pi}{2}$, онда је и $\tau(t)\neq0$, па добијамо $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=\pm\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm tg\theta=const$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Нека је α крива таква да је $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=const$. Како је $\kappa(t)\neq0$, постоји $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\setminus\{0\}$ такво да је $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=tg\theta$, па је $\kappa(t)\cos\theta=\tau(t)\sin\theta$. Нека је $\vec{\vartheta}(t)$ јединични вектор у ректификационој равни криве α у тачки $\alpha(t)$ (то је раван која садржи тачку $\alpha(t)$ и векторе $T(t)$ и $B(t)$) такав да је $\vec{\vartheta}(t)=\cos\theta T(t)+\sin\theta B(t)$ (ако је у тој равни оријентација од $T(t)$ ка $B(t)$ позитивна, онда је θ оријентисани угао између вектора $T(t)$ и $\vec{\vartheta}$). Тада је



$$\vec{\vartheta}'(t)=\cos\theta T'(t)+\sin\theta B'(t)=\cos\theta\cdot\upsilon(t)\kappa(t)N(t)+\sin\theta\cdot(-\upsilon(t)\tau(t)N(t))=$$
$$=\upsilon(t)\underbrace{(\kappa(t)\cos\theta-\sin\theta\,\tau(t))}_{=0}N(t)=\vec{0},$$

тј. вектор $\vec{\vartheta}$ је исти за све тачке $t\in I$. Такође, $\measuredangle(T(t),\vec{\vartheta})=|\theta|=const$, $|\theta|\in(0,\frac{\pi}{2})$, па је крива α уопштени хеликс.

23. Доказати да је дата крива уопштени хеликс, одредити фиксиран вектор ϑ и угао θ између вектора ϑ и тангенте криве γ у произвољној тачки, као и једначину цилиндра на коме лежи та крива:

а) $\gamma(t)=(3t,3t^2,2t^3)$, $t\in\mathbb{R}$;

б) $\gamma(t)=(ch\,t,sh\,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

(а) Најједноставније је доказати да је $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=const$ и искористити део (в) 22. задатка за добијање вектора ϑ и угла θ. Искористимо добро познате обрасце $\kappa(t)=\frac{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$ и $\tau(t)=\frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|^2}$.

$\gamma(t)=(3t,3t^2,2t^3)$

$\gamma'(t)=(3,6t,6t^2)$

$\gamma''(t)=(0,6,12t)$

$$\gamma'(t)\times\gamma''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6t & 6t^2\\ 0 & 6 & 12t\end{vmatrix}=(6\cdot 12t^2-6\cdot 6t^2,\,0-3\cdot 12t,\,3\cdot 6-0)=3\cdot 6\cdot(4t^2-2t^2,-2t,1)=18(2t^2,-2t,1)$$

$$\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|^2=18^2\cdot(4t^4+4t^2+1)=18^2\cdot(2t^2+1)^2\Rightarrow\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|=18\cdot(2t^2+1)\quad(2t^2+1\geq 1>0)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2=9+36t^2+36t^4=9(1+4t^2+4t^4)=9(1+2t^2)^2\Rightarrow\|\gamma'(t)\|=3(1+2t^2)\quad(1+2t^2\geq 1>0)$$

$$\kappa(t)=\frac{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{\cancel{18}^{\,2}\cdot\cancel{(2t^2+1)}}{\cancel{27}_{\,3}\cdot(2t^2+1)^{\cancel{3}\,2}}=\frac{2}{3(2t^2+1)^2}$$

$\gamma'''(t)=(0,0,12)$

$$[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]=\langle\gamma'(t)\times\gamma''(t),\gamma'''(t)\rangle=\langle 18\cdot(2t^2,-2t,1),(0,0,12)\rangle=18\cdot 12$$

$$\tau(t)=\frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|^2}=\frac{\cancel{18\cdot 12}^{\,2}}{{}_3\cancel{18^2}\,(2t^2+1)^2}=\frac{2}{3(2t^2+1)^2}$$

Дакле, $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=1$, за свако $t\in\mathbb{R}$, па је крива γ уопштени хеликс. Из доказа дела (в) 22. задатка је $\tilde{\vartheta}=\cos\theta\cdot T(t)+\sin\theta\cdot B(t)$, где је $1=\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=\operatorname{tg}\theta$, па је $\theta=\frac{\pi}{4}$.

$$T(t)=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\frac{(\cancel{3},\cancel{6}^{\,2}t,\cancel{6}^{\,2}t^2)}{\cancel{3}(1+2t^2)}=\left(\frac{1}{1+2t^2},\frac{2t}{1+2t^2},\frac{2t^2}{1+2t^2}\right)$$

$$B(t)=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}=\frac{\cancel{18}(2t^2,-2t,1)}{\cancel{18}\cdot(2t^2+1)}=\left(\frac{2t^2}{2t^2+1},-\frac{2t}{2t^2+1},\frac{1}{2t^2+1}\right)$$

$$\tilde{\vartheta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{1+2t^2},\frac{2t}{1+2t^2},\frac{2t^2}{1+2t^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2t^2}{2t^2+1},-\frac{2t}{2t^2+1},\frac{1}{2t^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+2t^2}{1+2t^2},\frac{2t-2t}{1+2t^2},\frac{2t^2+1}{1+2t^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Дакле тангенте $T(t)$ граде угао $\frac{\pi}{4}$ с вектором $\tilde{\vartheta}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Уместо вектора $\tilde{\vartheta}$ можемо узети вектор $\vartheta=(1,0,1)$ истог смера као $\tilde{\vartheta}$. Нека је $t\in\mathbb{R}$ произвољно и $\gamma(t)=(3t,3t^2,2t^3)$ тачка са криве γ. Тада изводница цилиндра у тој тачки има једначину $\frac{x-3t}{1}=\frac{y-3t^2}{0}=\frac{z-2t^3}{1}=\lambda$. Добијамо да је $y-3t^2=0$, тј. $y=3t^2$, затим $x-3t=\lambda$ и $z-2t^3=\lambda$. Према томе, $x-3t-(z-2t^3)=\lambda-\lambda=0$, па је $x-3t-z+2t^3=0$, тј. $x-z=3t-2t^3$. Квадрирањем добијамо $(x-z)^2=9t^2-12t^4+4t^6$, па заменом $y=3t^2$ добијамо $(x-z)^2=3\cdot 3t^2-\frac{\cancel{12}^{\,4}}{\cancel{9}_{\,3}}9t^4+\frac{4}{27}\cdot 27t^6=3y-\frac{4}{3}y^2+\frac{4}{27}y^3$, односно $27(x-z)^2=81y-36y^2+4y^3$.

(б) Радимо слично као у делу (а).

$\gamma(t)=(\operatorname{ch}t,\operatorname{sh}t,t)$

$\gamma'(t)=(\operatorname{sh}t,\operatorname{ch}t,1)$

$\gamma''(t)=(\operatorname{ch}t,\operatorname{sh}t,0)$

$$\gamma'(t)\times\gamma''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t & 1\\ \operatorname{ch}t & \operatorname{sh}t & 0\end{vmatrix}=(-\operatorname{sh}t,\operatorname{ch}t,\operatorname{sh}^2t-\operatorname{ch}^2t)=(-\operatorname{sh}t,\operatorname{ch}t,-1)$$

$$\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|^2=\operatorname{sh}^2t+\operatorname{ch}^2t+1=\cancel{\operatorname{sh}^2t}+\operatorname{ch}^2t+\operatorname{ch}^2t-\cancel{\operatorname{sh}^2t}=2\operatorname{ch}^2t\Rightarrow\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|=\sqrt{2}\operatorname{ch}t$$

$$\|\gamma'(t)\|^2=\operatorname{sh}^2t+\operatorname{ch}^2t+1=\cancel{\operatorname{sh}^2t}+\operatorname{ch}^2t+\operatorname{ch}^2t-\cancel{\operatorname{sh}^2t}=2\operatorname{ch}^2t\Rightarrow\|\gamma'(t)\|=\sqrt{2}\operatorname{ch}t$$

$$\kappa(t)=\frac{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{\cancel{\sqrt{2}\operatorname{ch}t}}{(\sqrt{2}\operatorname{ch}t)^{\cancel{3}\,2}}=\frac{1}{2\operatorname{ch}^2t}$$

$\gamma'''(t)=(\operatorname{sh}t,\operatorname{ch}t,0)$

$$[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]=\langle\gamma'(t)\times\gamma''(t),\gamma'''(t)\rangle=-\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t\cdot\operatorname{ch}t+(-1)\cdot 0=-\operatorname{sh}^2t+\operatorname{ch}^2t=1$$

$$\tau(t)=\frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|^2}=\frac{1}{(\sqrt{2}\operatorname{ch}t)^2}=\frac{1}{2\operatorname{ch}^2t}$$

Дакле, $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=1$, па је крива γ уопштени хеликс. Из доказа дела (в) задатка 22. је $\tilde{v}=\cos\theta\cdot T(t)+\sin\theta\cdot B(t)$, где је $1=\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}=tg\,\theta$, тј. $\theta=\frac{\pi}{4}$.

$$T(t)=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\frac{(\mathrm{sh}\,t,\mathrm{ch}\,t,1)}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{th}\,t,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}\right)$$

$$B(t)=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}=\frac{(-\mathrm{sh}\,t,\mathrm{ch}\,t,-1)}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{th}\,t,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}\right)$$

$$\tilde{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{th}\,t,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{th}\,t,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}\right)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{th}\,t-\frac{1}{2}\mathrm{th}\,t,\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2\mathrm{ch}\,t}-\frac{1}{2\mathrm{ch}\,t}\right)=(0,1,0)$$

Дакле, тангенте $T(t)$ заклапају угао $\theta=\frac{\pi}{4}$ с вектором $(0,1,0)$, тј. с вектором y-осе. Нека је $t\in\mathbb{R}$ произвољно и $\gamma(t)=(\mathrm{ch}\,t,\mathrm{sh}\,t,t)$ тачка са криве γ. Изводница цилиндра у тачки $\gamma(t)$ има једначину $\frac{x-\mathrm{ch}\,t}{0}=\frac{y-\mathrm{sh}\,t}{1}=\frac{z-t}{0}$, тј. $x=\mathrm{ch}\,t$, $z=t$. Дакле, једначина овог цилиндра је $x=\mathrm{ch}\,z$.

24. Еволута регуларне природно параметризоване криве $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$ је крива $\beta: I\to\mathbb{R}^2$ дефинисана у тачкама где је $\kappa(s)\neq 0$, дата са $\beta(s)=\alpha(s)+\frac{1}{\kappa(s)}N(s)$, а њена инволута је крива $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$ дата са $\gamma(s)=\alpha(s)+(c-s)T(s)$, $c\in I$. Испитати регуларност и одредити означену кривину, кривину и Френеов репер кривих β и γ преко одговарајућих величина криве α.

Ако је $\alpha: I\to S$, $I\subseteq\mathbb{R}$ отворени интервал, S је еуклидска раван $\mathbb{R}^2$ или еуклидски простор $\mathbb{R}^3$, природно параметризована крива, онда важе следећи обрасци:

$T(s)=\alpha'(s)$ (јер је $\|\alpha'(s)\|=1$ за свако $s\in I$)

$\kappa(s)=\|T'(s)\|$

$N(s)=\frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}=\frac{T'(s)}{\kappa(s)}$, ако је $\kappa(s)\neq 0$

$B(s)=T(s)\times N(s)$

$\tau(s)=-\langle B'(s),N(s)\rangle$ (јер је $B'(s)=-\tau(s)N(s)$, па је $\langle B'(s),N(s)\rangle=\langle-\tau(s)N(s),N(s)\rangle=-\tau(s)\langle N(s),N(s)\rangle=-\tau(s)$)

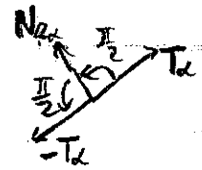
Ако је $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$ природно параметризована крива у еуклидској равни $\mathbb{R}^2$, онда је означена нормала $N_z(s)$ вектор такав да $(T(s),N_z(s))$ чине позитивно оријентисану ОНБ векторског простора $\mathbb{R}^2$, а означена кривина $\kappa_z(s)$ задовољава $\kappa_z(s)N_z(s)=\kappa(s)N(s)$.

Како је $\beta(s)=\alpha(s)+\frac{1}{\kappa_\alpha(s)}N_\alpha(s)$ (индекс α код функција κ, N значи да се појмови односе на криву α), добијамо да је $\beta'(s)=\alpha'(s)+\left(-\frac{1}{\kappa_\alpha(s)^2}\cdot\kappa_\alpha'(s)\right)N_\alpha(s)+\frac{1}{\kappa_\alpha(s)}N_\alpha'(s)=$

$$=T_\alpha(s)-\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}N_\alpha(s)+\frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\cdot\Big(-\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s)+\underbrace{\tau_\alpha(s)}_{0,\ \text{јер је } \alpha: I\to\mathbb{R}^2}B_\alpha(s)\Big)=\cancel{T_\alpha(s)}-\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}N_\alpha(s)-\cancel{T_\alpha(s)}=-\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}N_\alpha(s).$$

Приметимо да је $\|\beta'(s)\|=\left|-\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}\right|=\frac{|\kappa_\alpha'(s)|}{\kappa_\alpha(s)^2}$ и да то не мора бити једнако 1 за све $s\in I$, што значи крива $\beta(s)$ није нужно природно параметризована!!! Штавише, ако је $\kappa_\alpha'(s)=0$ за неко $s\in I$, крива $\beta(s)$ није ни регуларна. У тачкама $s\in I$ у којима је $\kappa_\alpha'(s)=0$ нису дефинисани $T_\beta, N_\beta, N_{z\beta}, \kappa_\beta$ и $\kappa_{z\beta}$, према томе надаље претпостављамо да посматрамо тачке $s\in I$ такве да је $\kappa_\alpha'(s)\neq 0$. Тада постоји околина те тачке таква да је $\kappa_\alpha'(s)\neq 0$, па је могуће диференцирање (за диференцирање је неопходно да постоји нека отворена околина те тачке). Ако је $\kappa_\alpha'(s)>0$, онда је $T_\beta(s)=\frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|}=\frac{-\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}N_\alpha(s)}{\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}}=-N_\alpha(s)$, а ако је $\kappa_\alpha'(s)<0$, онда је $T_\beta(s)=\frac{-\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}N_\alpha(s)}{-\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}}=N_\alpha(s)$. Из Френе-Сереових формула добијамо да је $T_\beta'(s)=\vartheta_\beta(s)\kappa_\beta(s)N_\beta(s)$, па ако је $\kappa_\alpha'(s)>0$, онда је $T_\alpha'(s)=-N_\alpha'(s)=-(-\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s)+\tau_\alpha(s)B_\alpha(s))$ (не заборавимо да је α природно параметризована, па је $N_\alpha'(s)=-\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s)+\tau_\alpha(s)B_\alpha(s)$, а како је $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$, тј. α је раванска крива, онда је $B_\alpha(s)=\pm(0,0,1)$ за свако $s\in I$такво да је $\kappa_\alpha(s)\neq 0$, па је $B_\alpha'(s)=\vec{0}$ за све $s\in I$ такве да је $\kappa_\alpha(s)\neq 0$, а онда је и $\tau_\alpha(s)=-\langle B_\alpha'(s),N_\alpha(s)\rangle=0$, за све $s\in I$ такве да је $\kappa_\alpha(s)\neq 0$. Дакле, $T_\beta'(s)=\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s)$, па је $\vartheta_\beta(s)\kappa_\beta(s)N_\beta(s)=\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s)$, ако је $\kappa_\alpha'(s)>0$. Пошто је $\vartheta_\beta(s)=\|\beta'(s)\|=\frac{|\kappa_\alpha'(s)|}{\kappa_\alpha(s)^2}=\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}$, онда је $\kappa_\beta(s)N_\beta(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)}{\vartheta_\beta(s)}T_\alpha(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)}{\frac{\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}}T_\alpha(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}T_\alpha(s)$. Како је $\|N_\beta(s)\|=1$ и $\kappa_\beta(s)\geq 0$, онда је

$\kappa_\beta(s)=|\kappa_\beta(s)|\,\|N_\beta(s)\|=\|\kappa_\beta(s)N_\beta(s)\|=\left\|\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}T_\alpha(s)\right\|=\left|\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}\right|\cdot\|T_\alpha(s)\|=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}$, ако је $\kappa_\alpha'(s)>0$. Такође, онда је $N_\beta(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)\kappa_\beta(s)}T_\alpha(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)\cdot\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}}T_\alpha(s)=T_\alpha(s)$. Ако је $\kappa_\alpha'(s)<0$, онда је $T_\alpha'(s)=N_\alpha'(s)=-\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s)+\underset{0}{\tau_\alpha(s)}B_\alpha(s)=-\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s)$, па је $\vartheta_\beta(s)\kappa_\beta(s)N_\beta(s)=-\kappa_\alpha(s)T_\alpha(s)$. Како је $\vartheta_\beta(s)=\frac{|\kappa_\alpha'(s)|}{\kappa_\alpha(s)^2}=\frac{-\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}$, онда је $\kappa_\beta(s)N_\beta(s)=-\frac{\kappa_\alpha(s)}{\vartheta_\beta(s)}T_\alpha(s)=-\frac{\kappa_\alpha(s)}{\frac{-\kappa_\alpha'(s)}{\kappa_\alpha(s)^2}}T_\alpha(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}T_\alpha(s)$, па је $\kappa_\beta(s)=|\kappa_\beta(s)|\,\|N_\beta(s)\|=\|\kappa_\beta(s)N_\beta(s)\|=\left\|\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}T_\alpha(s)\right\|=\left|\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}\right|\cdot\|T_\alpha(s)\|=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{-\kappa_\alpha'(s)}=-\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{|\kappa_\alpha'(s)|}$. Такође, онда је $N_\beta(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)\kappa_\beta(s)}T_\alpha(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)\cdot\left(-\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}\right)}T_\alpha(s)=-T_\alpha(s)$, ако је $\kappa_\alpha'(s)<0$. Остаје још да се пронађу означена кривина $\kappa_{z\beta}(s)$ и означена нормала $N_{z\beta}(s)$. Ако је $\kappa_\alpha'(s)>0$, онда је $T_\beta(s)=-N_\alpha(s)=-\frac{\kappa_\alpha(s)N_\alpha(s)}{\kappa_\alpha(s)}=-\frac{\kappa_{z\alpha}(s)N_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}=-\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}N_{z\alpha}(s)$. Вектор $N_{z\beta}$ настаје ротацијом вектора T_β за $\frac{\pi}{2}$ у позитивном смеру. Како је и $N_{z\alpha}$ настао ротацијом вектора T_α за $\frac{\pi}{2}$ у позитивном смеру, онда ротацијом $N_{z\alpha}$ за $\frac{\pi}{2}$ настаје вектор $-T_\alpha$.



Дакле, $N_{z\beta}(s)=-\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}\cdot(-T_\alpha(s))=\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}T_\alpha(s)$. Како је $\kappa_{z\beta}(s)N_{z\beta}(s)=\kappa_\beta(s)N_\beta(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}T_\alpha(s)$, добијамо $\kappa_{z\beta}(s)\cdot\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}T_\alpha(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}T_\alpha(s)$, па је $\kappa_{z\beta}(s)\cdot\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}$. Коначно, добијамо да је $\kappa_{z\beta}(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^4}{\kappa_\alpha'(s)\cdot\kappa_{z\alpha}(s)}$, ако је $\kappa_\alpha'(s)>0$.

Ако је $\kappa_\alpha'(s)<0$, онда је $T_\beta(s)=N_\alpha(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)N_\alpha(s)}{\kappa_\alpha(s)}=\frac{\kappa_{z\alpha}(s)N_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}=\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}N_{z\alpha}(s)$. Слично као малопре, ротирамо T_β за $\frac{\pi}{2}$ у позитивном смеру да бисмо добили $N_{z\beta}$. Ротацијом $N_{z\alpha}$ за $\frac{\pi}{2}$ у позитивном смеру добијамо $-T_\alpha$, па је $N_{z\beta}(s)=\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}\cdot(-T_\alpha(s))=-\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}T_\alpha(s)$. Како је $\kappa_{z\beta}(s)N_{z\beta}(s)=\kappa_\beta(s)N_\beta(s)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}T_\alpha(s)$, следи да је $\kappa_{z\beta}(s)\cdot\left(-\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}T_\alpha(s)\right)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}T_\alpha(s)$, па је $\kappa_{z\beta}(s)\cdot\left(-\frac{\kappa_{z\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}\right)=\frac{\kappa_\alpha(s)^3}{\kappa_\alpha'(s)}$, тј. $\kappa_{z\beta}(s)=-\frac{\kappa_\alpha(s)^4}{\kappa_\alpha'(s)\kappa_{z\alpha}(s)}$, ако је $\kappa_\alpha'(s)<0$. Овим су пронађени Френеов репер криве β и њена кривина и означена кривина, у тачкама у којима је $\beta'(s)\neq\vec{0}$.

Како је $\gamma(s)=\alpha(s)+(c-s)T_\alpha(s)$, онда је $\gamma'(s)=\alpha'(s)+(-T_\alpha(s)+(c-s)T'_\alpha(s))=\cancel{T_\alpha(s)}-\cancel{T_\alpha(s)}+$ $+(c-s)\cdot k_\alpha(s)N_\alpha(s)$ ($\alpha'(s)=T_\alpha(s)$, јер је α природно параметризована, па је $\|\alpha'(s)\|=1$, а онда је и $T'_\alpha(s)=k_\alpha(s)N_\alpha(s)$). Дакле, $\gamma'(s)=(c-s)k_\alpha(s)N_\alpha(s)$. Дакле, крива γ није регуларна, јер је $\gamma'(c)=\vec{0}$, а $c\in I$. Такође, $\gamma'(s)=\vec{0}$ ако је $k_\alpha(s)=0$. Према томе, Френеов репер, кривина и означена кривина постоје у тачкама $s\in I\setminus\{c\}$ у којима је $k_\alpha(s)\neq 0$, па ћемо убудуће сматрати да је $s\in I\setminus\{c\}$ такво да је $k_\alpha(s)\neq 0$. Тада постоји околина те тачке таква да је $s\neq c$ и $k_\alpha(s)\neq 0$, па је могуће диференцирање. Ако је $s<c$, онда је $c-s>0$, а пошто је $k_\alpha(s)>0$, онда је $\|\gamma'(s)\|=(c-s)\cdot k_\alpha(s)$ и $T_\gamma(s)=\frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}=\frac{(c-s)k_\alpha(s)N_\alpha(s)}{(c-s)k_\alpha(s)}=N_\alpha(s)$, а ако је $s>c$ онда је $c-s<0$ и $\|\gamma'(s)\|=(s-c)k_\alpha(s)$ и $T_\gamma(s)=\frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}=\frac{(c-s)k_\alpha(s)N_\alpha(s)}{(s-c)k_\alpha(s)}=-N_\alpha(s)$. Ако је $s<c$, онда је $T'_\gamma(s)=N'_\alpha(s)=-k_\alpha(s)T_\alpha(s)+\tau_\alpha(s)B_\alpha(s)=-k_\alpha(s)T_\alpha(s)$ (јер је $\alpha:I\to\mathbb{R}^2$, па је $\tau_\alpha(s)=0$ за све $s\in I$ за које је $k_\alpha(s)\neq 0$ (тад је $\tau_\alpha(s)$ дефинисано)). Како је $T'_\gamma(s)=\upsilon_\gamma(s)k_\gamma(s)N_\gamma(s)$ и $\upsilon_\gamma(s)=(c-s)k_\alpha(s)$ (јер је $s<c$), онда је $k_\gamma(s)N_\gamma(s)=\frac{T'_\gamma(s)}{\upsilon_\gamma(s)}=\frac{-k_\alpha(s)T_\alpha(s)}{(c-s)k_\alpha(s)}=-\frac{1}{c-s}T_\alpha(s)$. Одавде је $k_\gamma(s)=|k_\gamma(s)|\,\|N_\gamma(s)\|=\|k_\gamma(s)N_\gamma(s)\|=\left\|-\frac{1}{c-s}T_\alpha(s)\right\|=\left|-\frac{1}{c-s}\right|\|T_\alpha(s)\|=\frac{1}{c-s}$. Ако је $s>c$, онда је $T'_\gamma(s)=-N'_\alpha(s)=-(-k_\alpha(s)T_\alpha(s)+\tau_\alpha(s)B_\alpha(s))=k_\alpha(s)T_\alpha(s)$, а пошто је $\upsilon_\gamma(s)=(s-c)k_\alpha(s)$, следи да је $k_\gamma(s)N_\gamma(s)=\frac{T'_\gamma(s)}{\upsilon_\gamma(s)}=\frac{k_\alpha(s)T_\alpha(s)}{(s-c)k_\alpha(s)}=\frac{1}{s-c}T_\alpha(s)$. Одавде је $k_\gamma(s)=|k_\gamma(s)|\cdot\|N_\gamma(s)\|=\|k_\gamma(s)N_\gamma(s)\|=\left\|\frac{1}{s-c}T_\alpha(s)\right\|=\left|\frac{1}{s-c}\right|\|T_\alpha(s)\|=\frac{1}{s-c}$. Остаје још да се нађе $N_\gamma(s)$ за $s<c$ и за $s>c$. Како је $k_\gamma(s)N_\gamma(s)=-\frac{1}{c-s}T_\alpha(s)$ за $s<c$, онда је $N_\gamma(s)=-\frac{1}{(c-s)k_\gamma(s)}T_\alpha(s)=-\frac{1}{(c-s)\cdot\frac{1}{c-s}}T_\alpha(s)=-T_\alpha(s)$. Ако је $s>c$, онда је $k_\gamma(s)N_\gamma(s)=\frac{1}{s-c}T_\alpha(s)$, па је $N_\gamma(s)=\frac{1}{(s-c)\cdot k_\gamma(s)}T_\alpha(s)=\frac{1}{(s-c)\cdot\frac{1}{s-c}}T_\alpha(s)=T_\alpha(s)$.

Вратимо се тангентном вектору $T_\gamma(s)$. Вектор означене нормале $N_{r\gamma}$ добија се ротацијом вектора T_γ за угао $\frac{\pi}{2}$ у позитивном смеру. Нека је $s<c$. Тада је $T_\gamma(s)=N_\alpha(s)=\frac{k_\alpha(s)N_\alpha(s)}{k_\alpha(s)}=\frac{k_{r\alpha}(s)N_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}=\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}N_{r\alpha}(s)$, па како ротацијом вектора $N_{r\alpha}$ за угао $\frac{\pi}{2}$ у позитивном смеру добијамо вектор $-T_\alpha$, онда је $N_{r\gamma}(s)=\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}\cdot(-T_\alpha(s))=$ $=-\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}T_\alpha(s)$. Како је $k_{r\gamma}(s)N_{r\gamma}(s)=k_\gamma(s)N_\gamma(s)=-\frac{1}{c-s}T_\alpha(s)$, тј. $k_{r\gamma}(s)\cdot\left(-\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}T_\alpha(s)\right)=-\frac{1}{c-s}T_\alpha(s)$, добијамо $k_{r\gamma}(s)\cdot\left(-\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}\right)=-\frac{1}{c-s}$, тј. $k_{r\gamma}(s)=\frac{k_\alpha(s)}{(c-s)k_{r\alpha}(s)}$. Нека је сада $s>c$. Тада је $T_\gamma(s)=-N_\alpha(s)=-\frac{k_\alpha(s)N_\alpha(s)}{k_\alpha(s)}=-\frac{k_{r\alpha}(s)N_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}=-\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}N_{r\alpha}(s)$, па је $N_{r\gamma}(s)=-\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}\cdot(-T_\alpha(s))=$ $=\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}T_\alpha(s)$. Из $k_{r\gamma}(s)N_{r\gamma}(s)=k_\gamma(s)N_\gamma(s)=\frac{1}{s-c}T_\alpha(s)$, тј. $k_{r\gamma}(s)\cdot\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}T_\alpha(s)=\frac{1}{s-c}T_\alpha(s)$, следи да је $k_{r\gamma}(s)\cdot\frac{k_{r\alpha}(s)}{k_\alpha(s)}=\frac{1}{s-c}$, тј. $k_{r\gamma}(s)=\frac{k_\alpha(s)}{(s-c)k_{r\alpha}(s)}$. Овиме су пронађени Френеов репер, кривина и означена кривина криве γ у тачкама у којима је $\gamma'(s)\neq\vec{0}$.

25. Нека је $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ природно параметризована крива, кривине различите од нуле, таква да вектор положаја сваке тачке $\alpha(s)$ лежи у ректификационој равни криве у тој тачки (тзв. ректификациона крива).

(а) Доказати да је однос торзије и кривине дате криве линеарна функција по природном параметру s.

(б) Уколико је $\beta:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to S^2$ природно параметризована сферна крива, доказати да је кри-

$\alpha:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}^3$ дата са $\alpha(s)=\frac{1}{\cos s}\beta(s)$ ректификациона крива.

(а) Ректификациона раван криве α у тачки $\alpha(s)$ је раван која садржи тачку $\alpha(s)$ и векторе $T(s)$ и $B(s)$, тј. нормална је на вектору $N(s)$. Како је вектор положаја тачке $\alpha(s)$ вектор који спаја координатни почетак $O(0,0,0)$ и тачку $\alpha(s)$, он је једнак $\alpha(s)-O$. Према томе, важи да је $\alpha(s)-O\perp N(s)$, тј. да је $\langle\alpha(s)-O,N(s)\rangle=0$, за свако $s\in I$. Диференцирањем добијамо да је $0=(\langle\alpha(s)-O,N(s)\rangle)'=\langle\alpha'(s),N(s)\rangle+\langle\alpha(s)-O,N'(s)\rangle=\langle T(s),N(s)\rangle+$ $+\langle\alpha(s)-O,-\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)\rangle$ (пошто је крива α природно параметризована крива, онда је $\nu(s)=\|\alpha'(s)\|=1$, за свако $s\in I$). Дакле, $0=0-\kappa(s)\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle+\tau(s)\langle\alpha(s)-O,B(s)\rangle$, па је $\kappa(s)\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle=\tau(s)\langle\alpha(s)-O,B(s)\rangle$. Приметимо да је $(\langle\alpha(s)-O,B(s)\rangle)'=\langle\alpha'(s),B(s)\rangle+\langle\alpha(s)-O,B'(s)\rangle=$ $=\langle T(s),B(s)\rangle+\langle\alpha(s)-O,-\tau(s)N(s)\rangle=0-\tau(s)\langle\alpha(s)-O,N(s)\rangle=-\tau(s)\cdot 0=0$, па је $\langle\alpha(s)-O,B(s)\rangle=const$. Ако би било $\langle\alpha(s)-O,B(s)\rangle=0$ за свако $s\in I$, онда би било $\kappa(s)\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle=0$ за свако $s\in I$, па пошто је $\kappa(s)\neq 0$ за свако $s\in I$, онда је $\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle=0$ за свако $s\in I$. Како је $T(s),N(s),B(s)$ ортонормирана база векторског простора $\mathbb{R}^3$, онда је $\alpha(s)-O=\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle T(s)+$ $+\langle\alpha(s)-O,N(s)\rangle N(s)+\langle\alpha(s)-O,B(s)\rangle B(s)=\vec{0}$, па је $\alpha(s)=O$ за све $s\in I$. Међутим, онда је $\alpha'(s)=\vec{0}$ (јер је извод константне функције), што противречи томе да је крива регуларна (а и природно параметризована, јер треба да буде $\|\alpha'(s)\|=1$ за свако $s\in I$). Дакле, $\langle\alpha(s)-O,B(s)\rangle=\frac{1}{c}$, за неку константу $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, па је $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}=\frac{\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle}{\langle\alpha(s)-O,B(s)\rangle}=\frac{\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle}{\frac{1}{c}}=$ $=c\cdot\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle$. Диференцирањем добијамо $\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)'=(c\cdot\langle\alpha(s)-O,T(s)\rangle)'=c\cdot(\langle\alpha'(s),T(s)\rangle+$ $+\langle\alpha(s)-O,T'(s)\rangle)=c\cdot(\langle T(s),T(s)\rangle+\langle\alpha(s)-O,\kappa(s)N(s)\rangle)=c\cdot(1+\kappa(s)\langle\alpha(s)-O,N(s)\rangle)=c\cdot(1+\kappa(s)\cdot 0)=c$, па следи да је $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}=c\cdot s+d$, тј. да је количник торзије и кривине линеарна функција по природном параметру s.

(б) Траг криве $\beta:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to S^2$ припада јединичној сфери $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}$, што значи да је вектор положаја $\beta(s)-O$ сваке тачке те криве вектор дужине 1 (центар сфере је координатни почетак O, а полупречник је 1), односно $\|\beta(s)-O\|=1$. Дакле, $1=\|\beta(s)-O\|^2=\langle\beta(s)-O,\beta(s)-O\rangle$. Диференцирањем добијамо да је $0=(\langle\beta(s)-O,\beta(s)-O\rangle)'=$ $=\langle\beta'(s),\beta(s)-O\rangle+\langle\beta(s)-O,\beta'(s)\rangle=\langle T_\beta(s),\beta(s)-O\rangle+\langle\beta(s)-O,T_\beta(s)\rangle=2\langle T_\beta(s),\beta(s)-O\rangle$ (крива β је природно параметризована, па је $\beta'(s)=T_\beta(s)$), односно $\langle T_\beta(s),\beta(s)-O\rangle=0$, за све $s\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, што значи да је тангентни вектор $T_\beta(s)$ криве β нормалан на вектору положаја $\beta(s)-O$ тачке $\beta(s)$, за свако $s\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Како је $\alpha(s)=\frac{1}{\cos s}\beta(s)$, следи да је $\alpha'(s)=-\frac{1}{\cos^2 s}\cdot(-\sin s)\beta(s)+\frac{1}{\cos s}\beta'(s)=\frac{\sin s}{\cos^2 s}(\beta(s)-O)+\frac{1}{\cos s}T_\beta(s)$ (тачка $\beta(s)$ има исте координате као њен вектор положаја $\beta(s)-O$, а $\beta'(s)=T_\beta(s)$ због природне параметризације криве β). Пошто је $\|\alpha'(s)\|^2=\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle=\left\langle\frac{\sin s}{\cos^2 s}(\beta(s)-O)+\frac{1}{\cos s}T_\beta(s),\frac{\sin s}{\cos^2 s}(\beta(s)-O)+\frac{1}{\cos s}T_\beta(s)\right\rangle=$

$$=\frac{\sin^2 s}{\cos^4 s}\underbrace{\langle\beta(s)-O,\beta(s)-O\rangle}_{=1}+\frac{\sin s}{\cos^3 s}\underbrace{\langle\beta(s)-O,T_\beta(s)\rangle}_{=0}+\frac{1}{\cos^3 s}\underbrace{\langle T_\beta(s),\beta(s)-O\rangle}_{=0}+\frac{1}{\cos^2 s}\underbrace{\langle T_\beta(s),T_\beta(s)\rangle}_{=1}=$$

$=\frac{\sin^2 s}{\cos^4 s}+\frac{1}{\cos^2 s}=\frac{\sin^2 s+\cos^2 s}{\cos^4 s}=\frac{1}{\cos^4 s}$, следи да је $\nu_\alpha(s)=\|\alpha'(s)\|=\frac{1}{\cos^2 s}$, односно да крива α није природно параметризована. Такође, следи да је $T_\alpha(s)=\frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}=\frac{\frac{\sin s}{\cos^2 s}(\beta(s)-O)+\frac{1}{\cos s}T_\beta(s)}{\frac{1}{\cos^2 s}}=$

$= \sin s\,(\beta(s)-O)+\cos s\, T_\beta(s)$, па је $T'_\alpha(s)=\cos s\cdot(\beta(s)-O)+\sin s\cdot\beta'(s)-\sin s\cdot T_\beta(s)+\cos s\cdot T'_\beta(s)=$
$=\cos s\cdot(\beta(s)-O)+\cancel{\sin s\cdot T_\beta(s)}-\cancel{\sin s\cdot T_\beta(s)}+\cos s\cdot T'_\beta(s)=\cos s\cdot(\beta(s)-O+T'_\beta(s))$. Из $\langle T_\beta(s),\beta(s)-O\rangle=0$
за свако $s\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ диференцирањем добијамо $0=(\langle T_\beta(s),\beta(s)-O\rangle)'=\langle T'_\beta(s),\beta(s)-O\rangle+$
$+\langle T_\beta(s),\beta'(s)\rangle=\langle T'_\beta(s),\beta(s)-O\rangle+\langle T_\beta(s),T_\beta(s)\rangle=\langle T'_\beta(s),\beta(s)-O\rangle+1$, па је $\langle T'_\beta(s),\beta(s)-O\rangle=-1$,
за свако $s\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Одатле следи да је $T'_\beta(s)\neq\vec{0}$ за свако $s\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, па је и
$K_\beta(s)\neq 0$ за свако $s\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Ако је $\beta(s)-O+T'_\beta(s)=\vec{0}$ за неко $s\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, онда је и
$T'_\alpha(s)=\vec{0}$, па је $K_\alpha(s)=0$, што значи да у тој тачки s није дефинисан нормални вектор $N_\alpha(s)$,
па ћемо радити под претпоставком да је $\beta(s)-O+T'_\beta(s)\neq\vec{0}$, за свако $s\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Потражимо $\langle\alpha(s)-O,T'_\alpha(s)\rangle$, користећи да је $\alpha(s)=\frac{1}{\cos s}\beta(s)$ и $T'_\alpha(s)=\cos s\cdot(\beta(s)-O+T'_\beta(s))$. Тада је
$\alpha(s)-O=\frac{1}{\cos s}\beta(s)-O=\frac{1}{\cos s}(\beta(s)-O)$ и $\langle\alpha(s)-O,T'_\alpha(s)\rangle=\langle\frac{1}{\cos s}(\beta(s)-O),\cos s\cdot(\beta(s)-O+T'_\beta(s))\rangle=$
$=\frac{1}{\cancel{\cos s}}\cdot\cancel{\cos s}\langle\beta(s)-O,\beta(s)-O+T'_\beta(s)\rangle=\langle\beta(s)-O,\beta(s)-O\rangle+\langle\beta(s)-O,T'_\beta(s)\rangle=1+(-1)=0$. Како је
$T'_\alpha(s)=K_\alpha(s)N_\alpha(s)\neq\vec{0}$ по претпоставци, следи да је $0=\langle\alpha(s)-O,T'_\alpha(s)\rangle=\langle\alpha(s)-O,K_\alpha(s)N_\alpha(s)\rangle=$
$=K_\alpha(s)\langle\alpha(s)-O,N_\alpha(s)\rangle$, па је $\langle\alpha(s)-O,N_\alpha(s)\rangle=0$ за свако $s\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, што значи да је крива
α ректификациона, јер вектор положаја $\alpha(s)-O$ сваке тачке $\alpha(s)$ припада равни која садржи тачку $\alpha(s)$ и нормална је на нормалном вектору $N_\alpha(s)$ криве α, што је ректификациона раван криве α у тачки $\alpha(s)$.

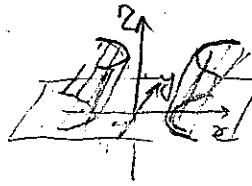
Површи

1. Одредити неке параметризоване површи и њихове једначине у Декартовим координатама, описати координатне линије, израчунати њихове векторе брзине и одредити тачке у којима су оне нормалне међусобно, уколико је траг површи:

(а) хиперболички цилиндар ограничен хиперболом $x^2-y^2=1, z=0$, а изводнице су одређене правцем $(2,0,1)$;

(б) параболички конус одређен параболом $z=y^2, x=0$, и тачком $(2,0,1)$.

(а) Криве су пресликавања чији је домен отворени интервал $I\subseteq\mathbb{R}$. Интервали су једини повезани подскупови од $\mathbb{R}$, па су домени кривих отворени повезани подскупови од $\mathbb{R}$. Домени површи су такође отворени повезани подскупови, али од $\mathbb{R}^2$, уместо од $\mathbb{R}$. Хипербола није повезан скуп тачака, а онда ни хиперболички цилиндар није повезан скуп тачака. Површи су диференцијабилна пресликавања, па су стога и непрекидна, што значи да траг површи може бити искључиво повезан скуп тачака, па читав хиперболички цилиндар није могуће параметризовати једним пресликавањем. Стога ће бити параметризован само део цилиндра, тачније цилиндар над једном граном хиперболе (нпр. оном где је $x>0$).



Грана хиперболе $x^2-y^2=1, z=0, x>0$, може бити параметризована пресликавањем $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(u)=(\operatorname{ch}u, \operatorname{sh}u, 0)$ (заиста, важи $z=0$, $x^2-y^2=\operatorname{ch}^2u-\operatorname{sh}^2u=1$ и $x=\operatorname{ch}u>0$, за свако $u\in\mathbb{R}$). За неко фиксирано $u\in\mathbb{R}$ добијамо тачку $\alpha(u)=(\operatorname{ch}u,\operatorname{sh}u,0)$ са хиперболе и она одређује праву $\frac{x-\operatorname{ch}u}{2}=\frac{y-\operatorname{sh}u}{0}=\frac{z-0}{1}$, која представља изводницу цилиндра. Ако је $\frac{x-\operatorname{ch}u}{2}=\frac{y-\operatorname{sh}u}{0}=\frac{z-0}{1}=v$, за неко $v\in\mathbb{R}$, онда је $x=\operatorname{ch}u+2v$, $y=\operatorname{sh}u$, $z=v$, па добијамо површ $r:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=(\operatorname{ch}u+2v, \operatorname{sh}u, v)$, чији је траг једна грана хиперболичког цилиндра датог у задатку. Координатне линије површи $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, јесу криве $\alpha_{v_0}:\{u\in\mathbb{R}:(u,v_0)\in U\}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)$ (фиксира се вредност параметра v на константу v_0) и криве $\beta_{u_0}:\{v\in\mathbb{R}:(u_0,v)\in U\}\to\mathbb{R}^3$, $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)$ (фиксира се вредност параметра u на константу u_0). Стога, у случају површи чији је траг грана хиперболичког цилиндра, координатне линије су $\alpha_{v_0}:\{u\in\mathbb{R}:(u,v_0)\in\mathbb{R}^2\}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)=(\operatorname{ch}u+2v_0, \operatorname{sh}u, v_0)$ и $\beta_{u_0}:\{v\in\mathbb{R}:(u_0,v)\in\mathbb{R}^2\}\to\mathbb{R}^3$, $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)=(\operatorname{ch}u_0+2v, \operatorname{sh}u_0, v)$. Криве α_{v_0} заправо транслиране хиперболе $(\operatorname{ch}u,\operatorname{sh}u,0)$ за вектор $(2v_0,0,v_0)$, а криве β_{u_0} су праве које пролазе кроз тачке $(\operatorname{ch}u_0,\operatorname{sh}u_0,0)$, тј. изводнице цилиндра које пролазе кроз тачке $(\operatorname{ch}u_0,\operatorname{sh}u_0,0)$ и имају вектор правца $(2,0,1)$. Вектор брзине координатне линије α_{v_0} у тачки $\alpha_{v_0}(u)$ је $\alpha'_{v_0}(u)=(\operatorname{sh}u,\operatorname{ch}u,0)$, а вектор брзине координатне линије β_{u_0} у тачки $\beta_{u_0}(v)$ је $\beta'_{u_0}(v)=(2,0,1)$. Треба бити опрезан кад се посматра угао између кривих на површи, јер је неопходно узети оне вредности параметара тих кривих за које се добија пресечна тачка тих кривих. Координатне криве $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)$ и $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)$ секу се у тачки $r(u_0,v_0)=\alpha_{v_0}(u_0)=\beta_{u_0}(v_0)$, па ћемо посматрати угао између тангентних вектора $\alpha'_{v_0}(u_0)$ и $\beta'_{u_0}(v_0)$. Они су нормални ако и само ако је $\langle\alpha'_{v_0}(u_0),\beta'_{u_0}(v_0)\rangle=0$. Како је $\langle\alpha'_{v_0}(u_0),\beta'_{u_0}(v_0)\rangle=\langle(\operatorname{sh}u_0,\operatorname{ch}u_0,0),(2,0,1)\rangle=2\operatorname{sh}u_0+0+0=$

$=2\operatorname{sh}u_0$, па је $\langle \alpha'_{v_0}(u_0), \beta'_{u_0}(v_0)\rangle = 0$ ако и само ако је $\operatorname{sh} u_0 = 0$, тј. $u_0=0$. То значи да су координатне линије нормалне у тачкама $r(0,v)$, $v\in\mathbb{R}$, што су све тачке на изводници $\beta_0(v) = (\operatorname{ch}0+2v, \operatorname{sh}0, v) = (1+2v, 0, v)$, односно $\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1} (=v)$.

(б) Парабола $z=y^2$, $x=0$ може се параметризовати са $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(u)=(0,u,u^2)$. За неко фиксирано $u\in\mathbb{R}$ добија се тачка $\alpha(u)=(0,u,u^2)$ и она одређује праву $\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-u}{0-u}=\frac{z-u^2}{1-u^2}$, која представља изводницу конуса (изводнице конуса су праве одређене тачком $\alpha(u)=(0,u,u^2)$ са параболе и врхом конуса $(2,0,1)$, па је одговарајући вектор правца $(2-0, 0-u, 1-u^2)$). Ако је $\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-u}{0-u}=\frac{z-u^2}{1-u^2}=v$, за неко $v\in\mathbb{R}$, онда је $x=2v$, $y=u-uv$, $z=u^2+(1-u^2)v$, па добијамо површ $r:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=(2v,u-uv,u^2+v-u^2v)$, чији је траг задати параболички конус. Његове координатне линије су $\alpha_{v_0}:\{u\in\mathbb{R}:(u,v_0)\in\mathbb{R}^2\}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)=(2v_0, u-uv_0, u^2+v_0-u^2v_0)$ и $\beta_{u_0}:\{v\in\mathbb{R}:(u_0,v)\in\mathbb{R}^2\}\to\mathbb{R}^3$, $\beta_{u_0}(v)=(2v,u_0-u_0v,u_0^2+v-u_0^2v)$. Криве $\alpha_{v_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ јесу заправо слике параболе $x=0$, $z=y^2$ хомотетијом с центром у врху конуса, тј. у тачки $(2,0,1)$. Заиста, хомотетија с центром у тачки $(2,0,1)$ је пресликавање $\mathcal{H}_{(2,0,1),\lambda}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}_{(2,0,1),\lambda}:(x,y,z)\mapsto(x',y',z')$ такво да је $\begin{pmatrix}x'-2\\y'-0\\z'-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-1\end{pmatrix}$. Добијамо $x'=2+\lambda(x-2)$, $y'=\lambda y$, $z'=1+\lambda(z-1)$. Пошто је $u-uv_0=(1-v_0)u$, коефицијент хомотетије је $\lambda=1-v_0$, па за $(x,y,z)=(0,u,u^2)$ добијамо $x'=2+(1-v_0)(0-2)=2-2(1-v_0)=\cancel{2}-\cancel{2}+2v_0=2v_0$, $y'=(1-v_0)u=u-uv_0$, $z'=1+(1-v_0)(u^2-1)=\cancel{1}+u^2\cancel{-1}-v_0u^2+v_0=u^2+v_0-u^2v_0$, тј. управо тачку $\alpha_{v_0}(u)$. Дакле, координатне линије α_{v_0} су параболе ако је $v_0\neq1$, односно врх конуса $(2,0,1)$, ако је $v_0=1$ (заиста, $\alpha_1(u)=(2\cdot1,u-u\cdot1,u^2+1-u^2\cdot1)=(2,0,1)$, $u\in\mathbb{R}$). Координатне линије β_{u_0} су изводнице конуса које пролазе кроз тачке $(0,u_0,u_0^2)$, тј. праве $\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-u_0}{0-u_0}=\frac{z-u_0^2}{1-u_0^2}(=v)$. Вектор брзине координатне линије α_{v_0} у тачки $\alpha_{v_0}(u)$ је $\alpha'_{v_0}(u)=(0,1-v_0,2u-2v_0u)=(0,1-v_0,2u(1-v_0))$, а вектор брзине координатне линије β_{u_0} у тачки $\beta_{u_0}(v)$ је $\beta'_{u_0}(v)=(2,-u_0,1-u_0^2)$. Координатне линије α_{v_0} и β_{u_0} се секу у тачки $r(u_0,v_0)=\alpha_{v_0}(u_0)=\beta_{u_0}(v_0)$, а нормалне су ако и само ако су њихови вектори брзина у тачки пресека ортогонални. Дакле, вектори $\alpha'_{v_0}(u_0)$ и $\beta'_{u_0}(v_0)$ су вектори брзина координатних линија α_{v_0} и β_{u_0} у њиховој пресечној тачки, а важи $\langle\alpha'_{v_0}(u_0),\beta'_{u_0}(v_0)\rangle=\langle(0,1-v_0,2u_0(1-v_0)),(2,-u_0,1-u_0^2)\rangle=-u_0(1-v_0)+2u_0(1-v_0)(1-u_0^2)=(1-v_0)(-u_0+2u_0(1-u_0^2))=(1-v_0)u_0(-1+2-2u_0^2)=(1-v_0)u_0(1-2u_0^2)$, па су они ортогонални ако и само ако је $1-v_0=0$ или $u_0=0$ или $1-2u_0^2=0$. Ако је $1-v_0=0$, онда је координатна крива α_{v_0} заправо сама тачка, па нема смисла говорити о ортогоналности координатних линија. Дакле, координатне линије су нормалне у свим тачкама изводнице $\beta_0(v)=(2v,0,v)$ осим у тачки $(2,0,1)$ (врх конуса), у свим тачкама изводнице $\beta_{\frac{1}{\sqrt2}}(v)=(2v,\frac{1}{\sqrt2}(1-v),v+\frac12(1-v))$ осим у тачки $(2,0,1)$ и у свим тачкама изводнице $\beta_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(u)=\left(2v,-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-v),v+\frac{1}{2}(1-v)\right)$ осим у тачки $(2,0,1)$.

2. Дата је параметризација Мебијусове траке $r(u,v)=\left(\left(1+u\sin\frac{v}{2}\right)\cos v,\left(1+u\sin\frac{v}{2}\right)\sin v,u\cos\frac{v}{2}\right)$, $-\frac{1}{2}<u<\frac{1}{2}$, $-\pi<v<\pi$. Израчунати нормално векторско поље Мебијусове траке $n(0,v)$ дуж централне кружнице $u=0$, а затим доказати да је $\lim\limits_{v\to-\pi+}r(0,v)=\lim\limits_{v\to\pi-}r(0,v)$ и $\lim\limits_{v\to-\pi+}n(0,v)=-\lim\limits_{v\to\pi-}n(0,v)$.

Површ $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, има координатне линије $\alpha_{v_0}:\{u\in\mathbb{R}:(u,v_0)\in U\}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)$ и $\beta_{u_0}:\{v\in\mathbb{R}:(u_0,v)\in U\}\to\mathbb{R}^3$, $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)$. Вектори брзине криве α_{v_0} су $\alpha'_{v_0}(u)=\frac{\partial r}{\partial u}(u,v_0)=r_u(u,v_0)$, а вектори брзине криве β_{u_0} су $\beta'_{u_0}(v)=\frac{\partial r}{\partial v}(u_0,v)=r_v(u_0,v)$. То значи да у тачки $r(u_0,v_0)$ постоје вектори $\alpha'_{v_0}(u_0)=r_u(u_0,v_0)$ и $\beta'_{u_0}(v_0)=r_v(u_0,v_0)$ тангентни на површ r. Површ је регуларна ако су у свакој њеној тачки ти тангентни вектори линеарно независни, тј. важи $r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)\neq\vec{0}$ (услов је такав да би у свакој тачки површи постојала тангентна раван). Вектор нормалан на површи r у тачки $r(u_0,v_0)$ може бити $r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)$, а најчешће се тај вектор нормира, тј. узима се јединични вектор истог смера као и вектор $r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)$. Дакле нормални вектор површи r у тачки $r(u_0,v_0)$ је вектор $n(u_0,v_0)=\frac{r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)}{\|r_u(u_0,v_0)\times r_v(u_0,v_0)\|}$, а нормално векторско поље површи $r:U\to\mathbb{R}^3$ је векторско поље $n:U\to\mathbb{R}^3$, $n(u,v)=\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}$. У случају Мебијусове траке $r:\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=\left(\left(1+u\sin\frac{v}{2}\right)\cos v,\left(1+u\sin\frac{v}{2}\right)\sin v,u\cos\frac{v}{2}\right)$ добијамо $r_u(u,v)=\left(\sin\frac{v}{2}\cos v,\sin\frac{v}{2}\sin v,\cos\frac{v}{2}\right)$, $r_v(u,v)=\left(u\cdot\cos\frac{v}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos v+\left(1+u\sin\frac{v}{2}\right)\cdot(-\sin v),u\cdot\cos\frac{v}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin v+\left(1+u\sin\frac{v}{2}\right)\cdot\cos v,u\cdot\left(-\sin\frac{v}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)$. Интересује нас нормално векторско поље n само дуж координатне линије $\beta_0:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^3$, $\beta_0(v)=r(0,v)$, па ћемо посматрати само $r_u(0,v)$ и $r_v(0,v)$, израчунати $r_u(0,v)\times r_v(0,v)$ и његов интензитет, а потом и $n(0,v)$.

$r_u(0,v)=\left(\sin\frac{v}{2}\cos v,\sin\frac{v}{2}\sin v,\cos\frac{v}{2}\right)$, $r_v(0,v)=(-\sin v,\cos v,0)$

$$r_u(0,v)\times r_v(0,v)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \sin\frac{v}{2}\cos v&\sin\frac{v}{2}\sin v&\cos\frac{v}{2}\\ -\sin v&\cos v&0\end{vmatrix}=\left(-\cos v\cos\frac{v}{2},-\sin v\cos\frac{v}{2},\sin\frac{v}{2}\cos^2 v+\sin\frac{v}{2}\sin^2 v\right)=$$

$$=\left(-\cos v\cos\frac{v}{2},-\sin v\cos\frac{v}{2},\sin\frac{v}{2}\right)$$

$$\|r_u(0,v)\times r_v(0,v)\|^2=\cos^2 v\cos^2\frac{v}{2}+\sin^2 v\cos^2\frac{v}{2}+\sin^2\frac{v}{2}=\cos^2\frac{v}{2}+\sin^2\frac{v}{2}=1\Rightarrow\|r_u(0,v)\times r_v(0,v)\|=1$$

$$n(0,v)=\frac{r_u(0,v)\times r_v(0,v)}{\|r_u(0,v)\times r_v(0,v)\|}=\frac{\left(-\cos v\cos\frac{v}{2},-\sin v\cos\frac{v}{2},\sin\frac{v}{2}\right)}{1}=\left(-\cos v\cos\frac{v}{2},-\sin v\cos\frac{v}{2},\sin\frac{v}{2}\right)$$

$r(0,v)=(\cos v,\sin v,0)$

$$\lim_{v\to-\pi+}r(0,v)=\lim_{v\to-\pi+}(\cos v,\sin v,0)=(-1,0,0)$$

$$\lim_{v\to\pi-}r(0,v)=\lim_{v\to\pi-}(\cos v,\sin v,0)=(-1,0,0)=\lim_{v\to-\pi+}r(0,v)$$

$$\lim_{v\to-\pi+}n(0,v)=\lim_{v\to-\pi+}\left(-\cos v\cos\frac{v}{2},-\sin v\cos\frac{v}{2},\sin\frac{v}{2}\right)=(0,0,-1)$$

$\lim_{\vartheta\to\pi^-} n(0,\vartheta)=\lim_{\vartheta\to\pi^-}\left(-\cos\vartheta\cos\frac{\vartheta}{2},-\sin\vartheta\cos\frac{\vartheta}{2},\sin\frac{\vartheta}{2}\right)=(0,0,1)=-(0,0,-1)=-\lim_{\vartheta\to-\pi^+} n(0,\vartheta).$

Овим је доказана важна особина Мебијусове траке. Ако бисмо замислили да стојимо на Мебијусовој траци у граничној тачки $(-1,0,0)=\lim_{\vartheta\to-\pi^+} r(0,\vartheta)$ тако да је вектор од стопала до главе истог смера као вектор $(0,0,-1)=\lim_{\vartheta\to-\pi^+} n(0,\vartheta)$ нормалан на Мебијусовој траци у тој тачки и крећемо се по кружници $\beta_0(\vartheta)=r(0,\vartheta)=(\cos\vartheta,\sin\vartheta,0)$, на крају бисмо дошли у исту тачку $(-1,0,0)=\lim_{\vartheta\to\pi^-} r(0,\vartheta)$, али бисмо стајали наопако у односу на как смо кренули, јер би вектор од стопала до главе сад био $\lim_{\vartheta\to\pi^-} n(0,\vartheta)=(0,0,1)$, што је супротни вектор вектора $(0,0,-1)$ који је био у почетном положају. То окретање наопачке говори да Мебијусова трака није оријентабилна површ, тј. не можемо је оријентисати тако да знамо шта је спољашња, а шта унутрашња страна површи.

3. Дат је кружни конус једначином у Декартовим координатама $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(а) Одредити векторе брзине координатних линија и угао између њих уколико је дати конус локално параметризован као график функције, а затим као ротациона површ.

(б) Израчунати коефицијенте прве фундаменталне форме обе површи и упоредити их у одговарајућим тачкама површи користећи координатну трансформацију између површи.

(в) Доказати да криве $\alpha(t)=(e^{\frac{t}{\sqrt2}}\cos t, e^{\frac{t}{\sqrt2}}\sin t, e^{\frac{t}{\sqrt2}})$ и $\beta(t)=(e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\cos t, e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\sin t, e^{-\frac{t}{\sqrt2}})$, $t\in\mathbb{R}$, полове углове између меридијана и паралела на конусу.

(г) Одредити тангентну раван конуса дуж кривих α и β, као и углове које та раван заклапа с координатним равнима Френеовог репера датих кривих.

(а) Нека је $r^1:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^3$, $r^1(u,v)=(u,v,\sqrt{u^2+v^2})$ параметризација конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ као график функције. За параметризацију као ротационе површи, констатујмо прво да је z-оса оса конуса. Такође констатујмо да ако уочимо ма коју изводницу (без умањења општости, у Oxz равни, тј. у равни $y=0$), конус настаје ротацијом те изводнице око z-осе за углове $v\in(0,2\pi)$ (морамо узети отворени интервал да би домен површи био отворен скуп; у трагу ће заправо недостајати управо та изводница, али је то у реду). Изводница у равни $y=0$ задовољава једначине $y=0$, $z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+0^2}=\sqrt{x^2}=|x|$, па можемо посматрати изводницу $y=0, z=x, x\geq 0$ или $y=0, z=-x, x\leq 0$. Одаберимо изводницу $y=0, z=x, x\geq 0$ (то је полуправа) и параметризујмо је са $\alpha:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(u)=(u,0,u)$ (избацујемо $u=0$ да би домен био отворен скуп). Ротација око z-осе за угао v јесте трансформација $\mathcal{R}_{z\text{-оса},v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathcal{R}_{z\text{-оса},v}:(x,y,z)\mapsto(x',y',z')$ таква да је $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. У случају изводнице α ротацијом тачке $\alpha(u)=(u,0,u)$ за угао

v добија се тачка $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\0\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\cos v\\u\sin v\\u\end{pmatrix}$, па је параметризација конуса као ротационе површи дата са $r^2:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $r^2(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u)$.

Вектори брзина координатних линија површи $r:U\to\mathbb{R}^3$ дати су са $r_u(u,v)$ и $r_v(u,v)$, па у случају површи r^1 и r^2, они су $r^1_u(u,v)=\left(1,0,\frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}}\right)=\left(1,0,\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$, $r^1_v(u,v)=\left(0,1,\frac{2v}{2\sqrt{u^2+v^2}}\right)=\left(0,1,\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$, $r^2_u(u,v)=(\cos v,\sin v,1)$, $r^2_v(u,v)=(-u\sin v,u\cos v,0)$.

Угао између координатних линија површи r^1 у тачки $r^1(u_0,v_0)$ је угао између вектора брзине координатне линије α_{v_0} у тачки $r(u_0,v_0)=\alpha_{v_0}(u_0)$ и вектора брзине координатне линије β_{u_0} у тачки $r(u_0,v_0)=\beta_{u_0}(v_0)$, ако је оштар или прав, тј. угао напоредан томе углу, ако је он туп. Како напоредни углови имају супротне косинусе, следи да је $\cos\measuredangle(\alpha_{v_0},\beta_{u_0})=|\cos\measuredangle(\alpha'_{v_0}(u_0),\beta'_{u_0}(v_0))|=$
$=|\cos\measuredangle(r_u(u_0,v_0),r_v(u_0,v_0))|=\dfrac{|\langle r_u(u_0,v_0),r_v(u_0,v_0)\rangle|}{\|r_u(u_0,v_0)\|\cdot\|r_v(u_0,v_0)\|}$.

$$\langle r^1_u(u,v),r^1_v(u,v)\rangle=\left\langle\left(1,0,\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right),\left(0,1,\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\right\rangle=\frac{uv}{u^2+v^2}$$

$$\|r^1_u(u,v)\|^2=1+\frac{u^2}{u^2+v^2}=\frac{2u^2+v^2}{u^2+v^2}\Longrightarrow\|r^1_u(u,v)\|=\sqrt{\frac{2u^2+v^2}{u^2+v^2}}$$

$$\|r^1_v(u,v)\|^2=1+\frac{v^2}{u^2+v^2}=\frac{u^2+2v^2}{u^2+v^2}\Longrightarrow\|r^1_v(u,v)\|=\sqrt{\frac{u^2+2v^2}{u^2+v^2}}$$

$$\measuredangle(\alpha^1_{v_0},\beta^1_{u_0})=\arccos\frac{\frac{|u_0v_0|}{\cancel{u_0^2+v_0^2}}}{\frac{\sqrt{2u_0^2+v_0^2}\sqrt{u_0^2+2v_0^2}}{\cancel{u_0^2+v_0^2}}}=\arccos\frac{|u_0v_0|}{\sqrt{(2u_0^2+v_0^2)(u_0^2+2v_0^2)}}$$

$$\langle r^2_u(u,v),r^2_v(u,v)\rangle=\langle(\cos v,\sin v,1),(-u\sin v,u\cos v,0)\rangle=\cancel{-u\cos v\sin v}+\cancel{u\cos v\sin v}+0=0$$

$\Rightarrow$ све координатне линије ротационе површи r^2 су међусобно нормалне.

Код ротационих површи код којих је параметар v угао за који се ротира тзв. профилна крива параметризована са u, координатне линије α_{v_0} су меридијани, а координатне линије β_{u_0} су паралеле. Меридијани су криве подударне профилној кривој, а паралеле су кружнице.

(б) Површи r^1 и r^2 нису еквивалентне, јер је траг површи r^1 конус без врха (врх је избачен јер r^1 не би била диференцијабилна у $(0,0)$), а траг површи r^2 је конус без изводнице $y=0$, $z=x$, $x\geq 0$. Дакле, мора се извршити рестрикција површи r^1 на $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\neq 0\vee(y=0\wedge x<0)\}$ (раван $\mathbb{R}^2$ из које је избачен позитивни део x-осе и координатни почетак) и онда постоји координатна трансформација $\varphi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\neq 0\vee(y=0\wedge x<0)\}$, $\varphi(u,v)=(u\cos v,u\sin v)$ (прелазак на поларне координате $u=\rho$, $v=\theta$). Она је бијекција, диференцијабилна је ($\frac{\partial x}{\partial u}=\cos v$, $\frac{\partial x}{\partial v}=-u\sin v$, $\frac{\partial y}{\partial u}=\sin v$, $\frac{\partial y}{\partial v}=u\cos v$) и њен јакобијан је

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u \neq 0,$$ па је и инверзна трансформација φ^{-1} ~~диференцијабилна~~ диференцијабилна, тј. φ је дифеоморфизам.

У овом делу задатка ћемо параметре површи r^1 звати x, y.

$$E^1(x,y) = \langle r^1_x(x,y), r^1_x(x,y)\rangle = \left\langle \left(1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \left(1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right\rangle = 1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

$$F^1(x,y) = \langle r^1_x(x,y), r^1_y(x,y)\rangle = \left\langle \left(1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \left(0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right\rangle = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$G^1(x,y) = \langle r^1_y(x,y), r^1_y(x,y)\rangle = \left\langle \left(0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \left(0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right\rangle = 1 + \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$$

$$E^2(u,v) = \langle r^2_u(u,v), r^2_u(u,v)\rangle = \langle (\cos v, \sin v, 1), (\cos v, \sin v, 1)\rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2$$

$$F^2(u,v) = \langle r^2_u(u,v), r^2_v(u,v)\rangle = \langle (\cos v, \sin v, 1), (-u\sin v, u\cos v, 0)\rangle = \cancel{-u\cos v\sin v} + \cancel{u\cos v\sin v} + 0 = 0$$

$$G^2(u,v) = \langle r^2_v(u,v), r^2_v(u,v)\rangle = \langle (-u\sin v, u\cos v, 0), (-u\sin v, u\cos v, 0)\rangle = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 0 = u^2$$

$$\widetilde{E}^1(u,v) = E^1(u\cos v, u\sin v) = \frac{2u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v}{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v} = \frac{2\cancel{u^2}\cos^2 v + \cancel{u^2}\sin^2 v}{\cancel{u^2}} = 1 + \cos^2 v$$

$$\widetilde{F}^1(u,v) = F^1(u\cos v, u\sin v) = \frac{u\cos v \cdot u\sin v}{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v} = \frac{\cancel{u^2}\cos v\sin v}{\cancel{u^2}} = \cos v\sin v$$

$$\widetilde{G}^1(u,v) = G^1(u\cos v, u\sin v) = \frac{u^2\cos^2 v + 2u^2\sin^2 v}{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v} = \frac{\cancel{u^2}\cos^2 v + 2\cancel{u^2}\sin^2 v}{\cancel{u^2}} = 1 + \sin^2 v$$

Можемо приметити да коефицијенти прве фундаменталне форме површи r^1 (конус као график функције) зависи само од поларног параметра v, док коефицијенти прве фундаменталне форме површи r^2 (конус као ротациона површ) зависе само од поларног параметра u (тачније, E^2 и F^2 су константе и то $F^2=0$).

(в) За криву γ, чији траг припада трагу површи $r: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, тражимо функције $u=u(t)$ и $v=v(t)$ такве да је $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$. Ово је згодно, јер је онда могуће изразити вектор брзине $\gamma'(t)$ те криве, који припада тангентном простору површи r у тачки $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$, помоћу базних вектора $r_u(u(t), v(t))$ и $r_v(u(t), v(t))$ (важи $\gamma'(t) = r_u(u(t), v(t))\cdot u'(t) + r_v(u(t), v(t))\cdot v'(t)$, и координате тог вектора у бази $r_u(u(t), v(t))$, $r_v(u(t), v(t))$ су $u'(t)$ и $v'(t)$). Пошто нам се јављају меридијани и паралеле, користимо површ $r^2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$. За криву $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (e^{\frac{t}{\sqrt2}}\cos t, e^{\frac{t}{\sqrt2}}\sin t, e^{\frac{t}{\sqrt2}})$ није тешко приметити да је $u = u(t) = e^{\frac{t}{\sqrt2}}$ и $v = v(t) = t$. Угао који крива α гради с меридијаном у тачки $\alpha(t_0) = r^2(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, t_0)$ налазимо тако што прво уочимо да кроз ту тачку пролази управо меридијан $\alpha_{t_0}(u) = r^2(u, t_0)$. Његов вектор брзине је $\alpha'_{t_0}(u) = r^2_u(u, t_0)$ а у тачки $\alpha_{t_0}(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}) = r^2(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, t_0) =$ тај вектор има координате $(1,0)$ у бази $r^2_u(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, t_0)$, $r^2_v(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, t_0)$. Вектор брзине криве α у тој тачки има координате $(u'(t_0), v'(t_0)) = (e^{\frac{t}{\sqrt2}}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\big|_{t=t_0}, 1\big|_{t=t_0}) = (\frac{1}{\sqrt2}e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, 1)$, па је скаларни производ ова два вектора брзине једнак

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt2}e^{\frac{t_0}{\sqrt2}} \quad 1\right)\cdot\begin{pmatrix} E^2(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, t_0) & F^2(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, t_0) \\ F^2(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, t_0) & G^2(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}, t_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{\sqrt2}e^{\frac{t_0}{\sqrt2}} \quad 1\right)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & e^{\frac{2t_0}{\sqrt2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{\sqrt2}e^{\frac{t_0}{\sqrt2}} \quad 1\right)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \sqrt2 e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}.$$

Квадрат интензитета вектора брзине $\alpha'_{t_0}(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}})$ је

$$\left(\frac{1}{\sqrt2}e^{\frac{t_0}{\sqrt2}} \quad 1\right)\begin{pmatrix}2&0\\0&e^{\frac{2t_0}{\sqrt2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}\\1\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt2}e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}\quad 1\right)\begin{pmatrix}\sqrt2 e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}\\ e^{\frac{2t_0}{\sqrt2}}\end{pmatrix}=e^{\frac{2t_0}{\sqrt2}}+e^{\frac{2t_0}{\sqrt2}}=2e^{\frac{2t_0}{\sqrt2}},$$

па је $\|\alpha'_{t_0}(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}})\|=\sqrt2 e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}$. Такође, квадрат интензитета вектора брзине $r_u(e^{\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)$ је

$(1\quad 0)\begin{pmatrix}2&0\\0&e^{\frac{2t_0}{\sqrt2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(1\quad 0)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=2$, па је његов интензитет једнак $\sqrt2$.

Дакле, угао између криве α и меридијана у тачки $\alpha(t_0)$ је $\arccos\frac{|\sqrt2 e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}|}{\sqrt2 e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}\cdot\sqrt2}=\arccos\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\pi}{4}$. Имајући у виду да је угао између меридијана и паралела прав, тј. $\frac{\pi}{2}$, следи да крива α полови угао између меридијана и паралеле.

За криву $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\beta(t)=(e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\cos t, e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\sin t, e^{-\frac{t}{\sqrt2}})$ није тешко уочити да за $u=u(t)=e^{-\frac{t}{\sqrt2}}$ и $v=v(t)=t$ добијамо $\beta(t)=r^2(u(t),v(t))$. Вектор брзине у тачки $\beta(t_0)=r^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)$ је $\beta'(t_0)=r^2_u(u(t_0),v(t_0))\cdot u'(t_0)+r^2_v(u(t_0),v(t_0))\cdot v'(t_0)$, па тај вектор има координате $(u'(t_0),v'(t_0))=\left(e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\Big|_{t=t_0}, 1\Big|_{t=t_0}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt2}e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},1\right)$ у бази $r^2_u(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0), r^2_v(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)$.
Меридијан који пролази кроз тачку $r^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)$ је $\alpha_{t_0}(u)=r^2(u,t_0)$, па је његов вектор брзине у тачки $r^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)$ једнак $\alpha'_{t_0}(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}})=r^2_u(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)$, па су му координате $(1,0)$. Дакле,

$$\langle\beta'(t_0),\alpha'_{t_0}(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}})\rangle=\left(-\frac{1}{\sqrt2}e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}\quad 1\right)\begin{pmatrix}E^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)&F^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)\\F^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)&G^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{\sqrt2}e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}\quad 1\right)\begin{pmatrix}2&0\\0&e^{-\frac{2t_0}{\sqrt2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt2}e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}\quad 1\right)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=-\sqrt2 e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}$$

$$\|\beta'(t_0)\|^2=\langle\beta'(t_0),\beta'(t_0)\rangle=\left(-\frac{1}{\sqrt2}e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}\quad 1\right)\begin{pmatrix}2&0\\0&e^{-\frac{2t_0}{\sqrt2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}\\1\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{\sqrt2}e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}\quad 1\right)\begin{pmatrix}-\sqrt2 e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}\\e^{-\frac{2t_0}{\sqrt2}}\end{pmatrix}=$$

$$=e^{-\frac{2t_0}{\sqrt2}}+e^{-\frac{2t_0}{\sqrt2}}=2e^{-\frac{2t_0}{\sqrt2}}\Rightarrow\|\beta'(t_0)\|=\sqrt2 e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}$$

$$\|\alpha'_{t_0}(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}})\|^2=\langle\alpha'_{t_0}(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}),\alpha'_{t_0}(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}})\rangle=(1\quad 0)\begin{pmatrix}2&0\\0&e^{\frac{t_0}{\sqrt2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(1\quad 0)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=2$$

$$\Rightarrow\|\alpha'_{t_0}(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}})\|=\sqrt2$$

Угао између криве β и меридијана у тачки $\beta(t_0)=r^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}},t_0)$ једнак је $\arccos\frac{|-\sqrt2 e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}|}{\sqrt2 e^{-\frac{t_0}{\sqrt2}}\cdot\sqrt2}=\arccos\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\pi}{4}$, па пошто је угао између меридијана и паралела прав, тј. $\frac{\pi}{2}$, следи да крива β полови угао између меридијана и паралела.

(г) Тангентна раван површи $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$, у тачки $r(u_0,v_0)$, $(u_0,v_0)\in U$, јесте раван у $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $r(u_0,v_0)$ и нормална је на вектору $n(u_0,v_0)$ нормале површи r у тачки $r(u_0,v_0)$. Према томе, тангентна раван конуса $r^2(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u)$ у тачки $r^2(u_0,v_0)$ јесте раван која садржи ту тачку и нормална је на вектору $n^2(u_0,v_0)$. Да бисмо добили вектор нормале на површи r, најчешће се узима вектор $r_u(u,v)\times r_v(u,v)$, па се он нормира (дели својим интензитетом) како би се добио јединични нормални

Вектор $n(u,v)$. Како је $r^2_u(u,v)=(\cos v, \sin v, 1)$ и $r^2_v(u,v)=(-u\sin v, u\cos v, 0)$, добијамо да је $r^2_u(u,v)\times r^2_v(u,v)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & 1\\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}=(-u\cos v, -u\sin v, u\cos^2 v+u\sin^2 v)=(-u\cos v, -u\sin v, u)$, па је $\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2=u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v+u^2=2u^2$, тј. $\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|=u\sqrt{2}$ ($u>0$ јер је домен површи r скуп $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$). Дакле, $n^2(u,v)=\frac{r^2_u(u,v)\times r^2_v(u,v)}{\|r^2_u(u,v)\times r^2_v(u,v)\|}=\frac{(-u\cos v, -u\sin v, u)}{u\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos v, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Како је $\alpha(t)=(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}})$, важи да је $\alpha(t)=r^2(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}, t)$. Тангентна раван конуса у тачки $\alpha(t_0)$ криве α је раван која садржи тачку $\alpha(t_0)=r^2(e^{\frac{t_0}{\sqrt{2}}}, t_0)$ и нормална је на вектору $n^2(e^{\frac{t_0}{\sqrt{2}}}, t_0)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t_0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t_0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а то је раван $\pi_{\alpha(t_0)}: 0=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t_0(x-e^{\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\cos t_0)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t_0(y-e^{\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\sin t_0)+\frac{1}{\sqrt{2}}(z-e^{\frac{t_0}{\sqrt{2}}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t_0\cdot x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t_0\cdot y+\frac{1}{\sqrt{2}}z+\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\cos^2 t_0+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\sin^2 t_0-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{t_0}{\sqrt{2}}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t_0\cdot x+\sin t_0\cdot y-z)$. Дакле, тангентне равни дуж криве α су равни $\pi_{\alpha(t)}: \cos t\cdot x+\sin t\cdot y-z=0$.

Тангентна раван конуса у тачки $\beta(t_0)$ криве β је раван која садржи тачку $\beta(t_0)=r^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}, t_0)$ и нормална је на вектору $n^2(e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}, t_0)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t_0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t_0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а то је раван $\pi_{\beta(t_0)}: 0=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t_0\cdot(x-e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\cos t_0)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t_0(y-e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\sin t_0)+\frac{1}{\sqrt{2}}(z-e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t_0\cdot x+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\cos t_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t_0\cdot y+\frac{1}{\sqrt{2}}z+\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\cos^2 t_0+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\sin^2 t_0-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t_0\cdot x+\sin t_0\cdot y-z)$. Дакле, тангентне равни дуж криве β су равни $\pi_{\beta(t)}: x\cos t+y\sin t-z=0$.

Можемо приметити да иако је $\alpha(t_0)\neq\beta(t_0)$, тангентне равни конуса су исте. Разлог томе крије се у чињеници да тачке $\alpha(t_0)$ и $\beta(t_0)$ обе припадају изводници $\alpha_{t_0}(u)=r^2(u,t_0)$, а тангентне равни конуса су исте у свим тачкама на истој изводници (јер садрже читаву ту изводницу).

Да бисмо утврдили које углове заклапају тангентне равни конуса у тачкама $\alpha(t_0)$ и $\beta(t_0)$ кривих α и β с координатним равнима Френеовог репера ових кривих (оскулаторним, нормалним и ректификационим), потребно је пронаћи векторе $T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha$ и $T_\beta, N_\beta, B_\beta$ Френеовог репера ових кривих.

$$\alpha'(t)=\left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos t+e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cdot(-\sin t), e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin t+e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cdot\cos t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\|\alpha'(t)\|^2=e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos^2 t-\cancel{2\cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\sin t}+e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\sin^2 t+e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2}\sin^2 t+\cancel{2e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\cos t}+e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\cos^2 t+e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t+\sin^2 t+\cos^2 t+\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=2e^{\frac{2t}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow v_\alpha(t)=\|\alpha'(t)\|=\sqrt{2}e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$$

$$T_\alpha(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}=\left(\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{2}\right)$$

Уместо уобичајених образаца за рачунање B_α и N_α, искористићу Френе-Серeову формулу $T_\alpha'(t)=v_\alpha(t)\kappa_\alpha(t)N_\alpha(t)$ и особине да је $v_\alpha(t)>0$ и $\kappa_\alpha(t)\geq 0$, па је онда $\|T_\alpha'(t)\|=v_\alpha(t)\kappa_\alpha(t)$ и $\kappa_\alpha(t)\neq 0$ ако и само ако је $\|T_\alpha'(t)\|\neq 0$, што значи да је $N_\alpha(t)=\frac{T_\alpha'(t)}{\|T_\alpha'(t)\|}$.

$$T_\alpha'(t)=\left(-\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, 0\right)$$

$$\|T_\alpha'(t)\|^2=\frac{1}{4}\sin^2 t+\cancel{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\cos t}+\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t-\cancel{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\sin t}+\frac{1}{2}\sin^2 t=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow\|T_\alpha'(t)\|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

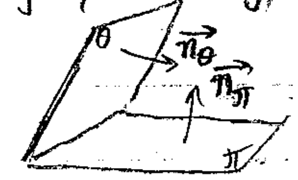
$$N_\alpha(t)=\frac{T_\alpha'(t)}{\|T_\alpha'(t)\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t, 0\right)$$

$$B_\alpha(t)=T_\alpha(t)\times N_\alpha(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t & \frac12\sin t+\frac{1}{\sqrt2}\cos t & \frac12\\ -\frac{1}{\sqrt3}\sin t-\frac{2}{\sqrt6}\cos t & \frac{1}{\sqrt3}\cos t-\frac{2}{\sqrt6}\sin t & 0\end{vmatrix}=\Big(-\frac{1}{2\sqrt3}\cos t+\frac{1}{\sqrt6}\sin t,\ -\frac{1}{2\sqrt3}\sin t-\frac{1}{\sqrt6}\cos t,\ \frac{1}{2\sqrt3}\cos^2 t-\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\cos t\sin t}-$$

$$-\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\sin t\cos t}+\frac{1}{\sqrt3}\sin^2 t+\frac{1}{2\sqrt3}\sin^2 t+\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\sin t\cos t}+\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\cos t\sin t}+\frac{1}{\sqrt3}\cos^2 t\Big)=\Big(-\frac{1}{2\sqrt3}\cos t+\frac{1}{\sqrt6}\sin t,\ -\frac{1}{2\sqrt3}\sin t-\frac{1}{\sqrt6}\cos t,\ \frac{1}{2\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}\Big)=$$

$$=\Big(-\frac{1}{2\sqrt3}\cos t+\frac{1}{\sqrt6}\sin t,\ -\frac{1}{2\sqrt3}\sin t-\frac{1}{\sqrt6}\cos t,\ \frac{\sqrt3}{2}\Big)$$

Угао између равни π и θ, које су редом нормалне на векторима $\vec{n_\pi}$ и $\vec{n_\theta}$, рачуна се по обрасцу $\measuredangle(\pi,\theta)=\arccos\frac{|\langle\vec{n_\pi},\vec{n_\theta}\rangle|}{\|\vec{n_\pi}\|\cdot\|\vec{n_\theta}\|}$ (угао између две равни је, по дефиницији, оштар или прав, а узимањем апсолутне вредности решава се проблем ако је угао између вектора туп).



Тангентна раван конуса у тачки $\alpha(t_0)$ нормална је на вектору $\overrightarrow{n_{\pi_{\alpha(t_0)}}}=\big(-\frac{1}{\sqrt2}\cos t_0,-\frac{1}{\sqrt2}\sin t_0,\frac{1}{\sqrt2}\big)$, оскулаторна раван криве α у тачки $\alpha(t_0)$ нормална је на вектору $B_\alpha(t_0)=\big(-\frac{1}{2\sqrt3}\cos t_0+\frac{1}{\sqrt6}\sin t_0,-\frac{1}{2\sqrt3}\sin t_0-\frac{1}{\sqrt6}\cos t_0,\frac{\sqrt3}{2}\big)$, нормална раван криве α у тачки $\alpha(t_0)$ нормална је на вектору $T_\alpha(t_0)=\big(\frac12\cos t_0-\frac{1}{\sqrt2}\sin t_0,\frac12\sin t_0+\frac{1}{\sqrt2}\cos t_0,\frac12\big)$ а ректификациона раван криве α у тачки $\alpha(t_0)$ нормална је на вектору $N_\alpha(t_0)=\big(-\frac{1}{\sqrt3}\sin t_0-\frac{2}{\sqrt6}\cos t_0,\frac{1}{\sqrt3}\cos t_0-\frac{2}{\sqrt6}\sin t_0,0\big)$. (Стога, угао који тангентна раван конуса гради с оскулаторном равни је $\arccos\frac{|\langle\overrightarrow{n_{\pi_{\alpha(t_0)}}},B_\alpha(t_0)\rangle|}{\underbrace{\|n_{\pi_{\alpha(t_0)}}\|\cdot\|B_\alpha(t_0)\|}_{1}}=\arccos\big|\frac{1}{2\sqrt6}\cos^2 t_0-\cancel{\frac{1}{2\sqrt3}\cos t_0\sin t_0}+\frac{1}{2\sqrt6}\sin^2 t_0+\cancel{\frac{1}{2\sqrt3}\sin t_0\cos t_0}+\frac{3}{2\sqrt6}\big|=\arccos\big|\frac{1}{2\sqrt6}+\frac{3}{2\sqrt6}\big|=\arccos\frac{2}{\sqrt6}$. Даље, угао који тангентна раван конуса гради с нормалном равни је $\arccos|\langle\overrightarrow{n_{\pi_{\alpha(t_0)}}},T_\alpha(t_0)\rangle|=\arccos\big|-\frac{1}{2\sqrt2}\cos^2 t_0+\cancel{\frac12\cos t_0\sin t_0}-\frac{1}{2\sqrt2}\sin^2 t_0-\cancel{\frac12\sin t_0\cos t_0}+\frac{1}{2\sqrt2}\big|=\arccos\big|-\frac{1}{2\sqrt2}+\frac{1}{2\sqrt2}\big|=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$. На крају, угао који тангентна раван конуса гради с ректификационом равни криве α у тачки $\alpha(t_0)$ једнак је $\arccos|\langle\overrightarrow{n_{\pi_{\alpha(t_0)}}},N_\alpha(t_0)\rangle|=\arccos\big|\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\cos t_0\sin t_0}+\frac{1}{\sqrt3}\cos^2 t_0-\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\sin t_0\cos t_0}+\frac{1}{\sqrt3}\sin^2 t_0\big|=\arccos\frac{1}{\sqrt3}$.

За проналажење углова које тангентна раван конуса у тачки $\beta(t_0)$ гради с координатним равнима Френеовог репера криве β у тачки $\beta(t_0)$, потребно је одредити $T_\beta, N_\beta, B_\beta$.

$$\beta'(t)=\Big(e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\cdot\big(-\frac{1}{\sqrt2}\big)\cdot\cos t+e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\cdot(-\sin t),\ e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\cdot\big(-\frac{1}{\sqrt2}\big)\cdot\sin t+e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\cdot\cos t,\ e^{-\frac{t}{\sqrt2}}\cdot\big(-\frac{1}{\sqrt2}\big)\Big)$$

$$\|\beta'(t)\|^2=e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}\cdot\frac12\cdot\cos^2 t+\cancel{2\cdot e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\cdot\cos t\sin t}+e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}\sin^2 t+e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}\cdot\frac12\cdot\sin^2 t-\cancel{2\cdot e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\sin t\cos t}+e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}\cos^2 t+$$

$$+e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}\cdot\frac12=\frac12 e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}+e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}+\frac12 e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}=2e^{-\frac{2t}{\sqrt2}}$$

$$\nu_\beta(t)=\|\beta'(t)\|=\sqrt2 e^{-\frac{t}{\sqrt2}}$$

$$T_\beta(t)=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}=\Big(-\frac12\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t,\ -\frac12\sin t+\frac{1}{\sqrt2}\cos t,\ -\frac12\Big)$$

Слично као малопре, из Френе-Сереове формуле $T'_\beta(t)=\nu_\beta(t)\kappa_\beta(t)N_\beta(t)$ добијамо да је $\kappa_\beta(t)\neq0$ ако и само ако је $\|T'_\beta(t)\|\neq0$ и да је $N_\beta(t)=\frac{T'_\beta(t)}{\|T'_\beta(t)\|}$.

$$T_\beta'(t)=\left(\frac12\sin t-\frac{1}{\sqrt2}\cos t,-\frac12\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t,0\right)$$

$$\|T_\beta'(t)\|^2=\frac14\sin^2 t-\cancel{\frac{1}{\sqrt2}\sin t\cos t}+\frac12\cos^2 t+\frac14\cos^2 t+\cancel{\frac{1}{\sqrt2}\cos t\sin t}+\frac12\sin^2 t=\frac14+\frac12=\frac34\Rightarrow\|T_\beta'(t)\|=\frac{\sqrt3}{2}$$

$$N_\beta(t)=\frac{T_\beta'(t)}{\|T_\beta'(t)\|}=\left(\frac{1}{\sqrt3}\sin t-\frac{2}{\sqrt6}\cos t,-\frac{1}{\sqrt3}\cos t-\frac{2}{\sqrt6}\sin t,0\right)\qquad \overrightarrow{n_{\pi_{\beta(t_0)}}}=\left(-\frac{1}{\sqrt2}\cos t_0,-\frac{1}{\sqrt2}\sin t_0,\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

$$B_\beta(t)=T_\beta(t)\times N_\beta(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ -\frac12\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t & -\frac12\sin t+\frac{1}{\sqrt2}\cos t & -\frac12\\ \frac{1}{\sqrt3}\sin t-\frac{2}{\sqrt6}\cos t & -\frac{1}{\sqrt3}\cos t-\frac{2}{\sqrt6}\sin t & 0\end{vmatrix}=\Big(-\frac{1}{2\sqrt3}\cos t-\frac{1}{\sqrt6}\sin t,-\frac{1}{2\sqrt3}\sin t+\frac{1}{\sqrt6}\cos t,$$

$$\frac{1}{2\sqrt3}\cos^2 t+\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\cos t\sin t}+\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\sin t\cos t}+\frac{1}{\sqrt3}\sin^2 t+\frac{1}{2\sqrt3}\sin^2 t-\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\cos t\sin t}-\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\sin t\cos t}+\frac{1}{\sqrt3}\cos^2 t\Big)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2\sqrt3}\cos t-\frac{1}{\sqrt6}\sin t,-\frac{1}{2\sqrt3}\sin t+\frac{1}{\sqrt6}\cos t,\frac{1}{2\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}\right)=\left(-\frac{1}{2\sqrt3}\cos t-\frac{1}{\sqrt6}\sin t,-\frac{1}{2\sqrt3}\sin t+\frac{1}{\sqrt6}\cos t,\frac{\sqrt3}{2}\right)$$

Слично као малопре, угао који тангентна раван конуса у тачки $\beta(t_0)$ заклапа с оскула-торном равни криве β у тачки $\beta(t_0)$ је $\arccos|\langle\overrightarrow{n_{\pi_{\beta(t_0)}}},B_\beta(t_0)\rangle|=\arccos\left|\frac{1}{2\sqrt6}\cos^2 t_0+\cancel{\frac{1}{2\sqrt3}\cos t_0\sin t_0}+\frac{1}{2\sqrt6}\sin^2 t_0-\cancel{\frac{1}{2\sqrt3}\sin t_0\cos t_0}+\frac{3}{2\sqrt6}\right|=\arccos\left|\frac{1}{2\sqrt6}+\frac{3}{2\sqrt6}\right|=\arccos\frac{2}{\sqrt6}$, угао који тангентна раван конуса у тачки $\beta(t_0)$ заклапа с нормалном равни криве β у тачки $\beta(t_0)$ је $\arccos|\langle\overrightarrow{n_{\pi_{\beta(t_0)}}},T_\beta(t_0)\rangle|=$ $=\arccos\left|\frac{1}{2\sqrt2}\cos^2 t_0+\cancel{\frac12\cos t_0\sin t_0}+\frac{1}{2\sqrt2}\sin^2 t_0-\cancel{\frac12\sin t_0\cos t_0}-\frac{1}{2\sqrt2}\right|=\arccos\left|\frac{1}{2\sqrt2}-\frac{1}{2\sqrt2}\right|=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, а угао који тангентна раван конуса у тачки $\beta(t_0)$ заклапа с ректификационом равни криве β у тачки $\beta(t_0)$ је $\arccos|\langle\overrightarrow{n_{\pi_{\beta(t_0)}}},N_\beta(t_0)\rangle|=\arccos\left|-\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\cos t_0\sin t_0}+\frac{1}{\sqrt3}\cos^2 t_0+\cancel{\frac{1}{\sqrt6}\sin t_0\cos t_0}+\frac{1}{\sqrt3}\sin^2 t_0\right|=\arccos\frac{1}{\sqrt3}$.

4. Дат је једнограни хиперболоид једначином у Декартовим координатама $x^2+y^2-z^2=1$.

(а) Параметризовати ову површ као ротациону.

(б) Одредити тангентну раван хиперболоида у тачки $(0,\sqrt2,1)$ и њен пресек са датим хиперболоидом. Доказати да вектори $(1,0,0),(0,1,\sqrt2),(-1,1,\sqrt2),(1,1,\sqrt2)$ припадају тангентном простору хиперболоида у тачки $(0,\sqrt2,1)$ и одредити неке криве чији траг припада хиперболоиду и имају ове векторе брзине у тачки $(0,\sqrt2,1)$.

(в) Доказати да на једнограном хиперболоиду постоје две фамилије мимоилазних правих тако да свака тачка хиперболоида припада тачно једној правој из сваке фамилије.

(г) Одредити неки уопштени хеликс на датом хиперболоиду чији траг описује материјална тачка која се креће константном брзином по правој која припада хиперболоиду и ротира око z-осе константном угаоном брзином.

(а) Када тражимо параметризацију површи да буде ротациона површ чија је оса ротације z-оса, потребно је пронаћи криву $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$, $I\subset\mathbb{R}$ отворени интервал, чији траг припада равни Oxz $(y=0)$, и то тачније у полуравни где је $x>0$, коју зовемо профилном кривом, а потом ту криву ротирати око z-осе за углове $v\in(0,2\pi)$. Крива у пресеку једнограног хиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ и равни $y=0$ је хипербола $x^2-z^2=1$, па се њена грана у полуравни где је $x>0$ може параметризовати са $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(u)=(\operatorname{ch}u,0,\operatorname{sh}u)$.

Ротацијом тачке $\alpha(u)$ око z-осе за угао $v\in(0,2\pi)$ добија се тачка

$$\begin{pmatrix}\cos v&-\sin v&0\\ \sin v&\cos v&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{ch}u\\0\\\operatorname{sh}u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}u\cos v\\ \operatorname{ch}u\sin v\\ \operatorname{sh}u\end{pmatrix}.$$ Према томе, $r:\mathbb{R}\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=(\operatorname{ch}u\cos v,\operatorname{ch}u\sin v,\operatorname{sh}u)$

представља параметризацију једнограног хиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ као ротационе површи.

(б) $(0,\sqrt{2},1)=(\operatorname{ch}u_0\cos v_0, \operatorname{ch}u_0\sin v_0, \operatorname{sh}u_0) \Rightarrow 0=\operatorname{ch}u_0\cos v_0,\ \sqrt{2}=\operatorname{ch}u_0\sin v_0,\ 1=\operatorname{sh}u_0$

Како је $\operatorname{ch}u>0$ (тачније, $\operatorname{ch}u\geq 1$) за свако $u\in\mathbb{R}$, следи да је $\cos v_0=0$, па је $v_0=\frac{\pi}{2}$ или $v_0=\frac{3\pi}{2}$. Из $\operatorname{ch}u>0$ за свако $u\in\mathbb{R}$ и $\operatorname{ch}u_0\sin v_0=\sqrt{2}>0$ следи да је $\sin v_0>0$, па је $v_0=\frac{\pi}{2}$.
Такође, из $\operatorname{sh}u_0=1$ следи да је $u_0=\operatorname{arsh}1$. Треба још проверити да ли је $\sqrt{2}=\operatorname{ch}u_0\cdot\sin\frac{\pi}{2}=$
$=\operatorname{ch}u_0$, али из $\operatorname{ch}u>0$ и $\operatorname{ch}^2u-\operatorname{sh}^2u=1$ следи да је $\operatorname{ch}u_0=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2u_0}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Дакле,
$(0,\sqrt{2},1)=r(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$. За одређивање тангентне равни хиперболоида у тој тачки потребан
је још нормални вектор хиперболоида у тој тачки, нпр. $r_u(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})\times r_v(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$.

$r_u(u,v)=(\operatorname{sh}u\cos v, \operatorname{sh}u\sin v, \operatorname{ch}u)$, $r_v(u,v)=(-\operatorname{ch}u\sin v, \operatorname{ch}u\cos v, 0)$

$$r_u(u,v)\times r_v(u,v)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \operatorname{sh}u\cos v & \operatorname{sh}u\sin v & \operatorname{ch}u \\ -\operatorname{ch}u\sin v & \operatorname{ch}u\cos v & 0 \end{vmatrix}=(-\operatorname{ch}^2u\cos v, -\operatorname{ch}^2u\sin v, \operatorname{sh}u\operatorname{ch}u\cos^2v+\operatorname{ch}u\operatorname{sh}u\sin^2v)=$$

$$=(-\operatorname{ch}^2u\cos v, -\operatorname{ch}^2u\sin v, \operatorname{ch}u\operatorname{sh}u)=$$

$\operatorname{ch}^2(\operatorname{arsh}1)=1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh}1)=1+1^2=2$
$\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}1)=\sqrt{2}$

$$r_u(\operatorname{arsh}1,\tfrac{\pi}{2})\times r_v(\operatorname{arsh}1,\tfrac{\pi}{2})=(-2\cdot 0, -2\cdot 1, \sqrt{2}\cdot 1)=(0,-2,\sqrt{2})$$

Дакле, тангентна раван хиперболоида у тачки $(0,\sqrt{2},1)$ је $0\cdot(x-0)-2\cdot(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}\cdot(z-1)=0$,
тј. $-2y+2\sqrt{2}+\sqrt{2}z-\sqrt{2}=0$, односно $-2y+\sqrt{2}z+\sqrt{2}=0$. Дељењем с $-\sqrt{2}$ добија се $\sqrt{2}y-z-1=0$.
Тангентни простор хиперболоида у тачки $(0,\sqrt{2},1)$, у ознаци $T_{(0,\sqrt{2},1)}r$, представља скуп свих тангентних вектора хиперболоида у тој тачки. То је векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ свих вектора у простору $\mathbb{R}^3$. Његова база се састоји од вектора $r_u(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$ и вектора $r_v(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$, тј. од вектора $r_u(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})=(1\cdot 0, 1\cdot 1, \sqrt{2})=(0,1,\sqrt{2})$ и вектора
$r_v(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})=(-\sqrt{2}\cdot 1, \sqrt{2}\cdot 0, 0)=(-\sqrt{2},0,0)$. Сада одмах видимо да вектори $(1,0,0)$, $(0,1,\sqrt{2})$,
$(-1,1,\sqrt{2})$, $(1,1,\sqrt{2})$ припадају тангентном простору $T_{(0,\sqrt{2},1)}r$, јер је $(1,0,0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}r_v(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$,
$(0,1,\sqrt{2})=r_u(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$, $(-1,1,\sqrt{2})=(-1,0,0)+(0,1,\sqrt{2})=r_u(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}}r_v(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$ и $(1,1,\sqrt{2})=(1,0,0)+$
$+(0,1,\sqrt{2})=r_u(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})-\frac{1}{\sqrt{2}}r_v(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$. Ако је $\alpha(t)=r(u(t),v(t))$ крива на површи r која садржи тачку $r(u_0,v_0)$ и у тој тачки има вектор брзине једнак $a_0\cdot r_u(u_0,v_0)+b_0\cdot r_v(u_0,v_0)$,
онда је за неко t_0 испуњено $u(t_0)=u_0$, $v(t_0)=v_0$, а пошто је $\alpha'(t_0)=r_u(u(t_0),v(t_0))\cdot u'(t_0)+$
$+r_v(u(t_0),v(t_0))\cdot v'(t_0)=u'(t_0)\cdot r_u(u_0,v_0)+v'(t_0)\cdot r_v(u_0,v_0)$, па је $u'(t_0)=a$ и $v'(t_0)=b$. То значи да крива α која садржи тачку $(0,\sqrt{2},1)=r(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$ и има вектор брзине $(1,0,0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}r_v(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$ у тој тачки мора бити крива $\alpha(t)=r(u_\alpha(t),v_\alpha(t))$ таква да за неко t_0 важи $u_\alpha(t_0)=\operatorname{arsh}1$,
$v_\alpha(t_0)=\frac{\pi}{2}$ и $u_\alpha'(t_0)=0$, $v_\alpha'(t_0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Најједноставније је одабрати $t_0=0$ (то је и конвенција), а пошто не постоје додатни захтеви за функције u_α и v_α, можемо узети пресликавања
$u_\alpha(t)=0\cdot t+\operatorname{arsh}1$, $v_\alpha(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}t+\frac{\pi}{2}$ (тада је, очигледно, $u_\alpha(0)=\operatorname{arsh}1$, $u_\alpha'(0)=0$, $v_\alpha(0)=\frac{\pi}{2}$, $v_\alpha'(0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$),
али домен мора бити такав да $(u_\alpha(t),v_\alpha(t))\in\mathbb{R}\times(0,2\pi)$, тј. домену површи r. Пошто је функција u_α константна, не ставља ограничења на домен, а функција v_α поставља услов да
важи $0<-\frac{1}{\sqrt{2}}t+\frac{\pi}{2}<2\pi$, па је $-\frac{\pi}{2}<-\frac{1}{\sqrt{2}}t<\frac{3\pi}{2}$, тј. $-\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}<t<\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. Дакле, $\alpha:\left(-\frac{3\pi\sqrt{2}}{2},\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)\to\mathbb{R}^3$,
$\alpha(t)=r(\operatorname{arsh}1,-\frac{1}{\sqrt{2}}t+\frac{\pi}{2})$ (што је репараметризација v-параметарске координатне линије

$u=\operatorname{arsh}1=\text{const}$). Крива $\beta(t)=r(u_\beta(t),v_\beta(t))$, која садржи тачку $(0,\sqrt2,1)=r(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$ и у тој тачки има вектор брзине $(0,1,\sqrt2)=r_u(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$ јесте управо u-параметарска координатна линија $\beta(t)=r(t,\frac{\pi}{2})$, чији је домен $\mathbb{R}$ (то је $\{t\in\mathbb{R}:(t,\frac{\pi}{2})\in\mathbb{R}\times(0,2\pi)\}=\mathbb{R}$) (овде није испоштована конвенција да је $t_0=0$ (t_0 је тачка у којој се посматрају услови за u_β, v_β, u'_β и v'_β)). Крива $\gamma(t)=r(u_\gamma(t),v_\gamma(t))$, која садржи тачку $(0,\sqrt2,1)=r(\operatorname{arsh}1,\frac{\pi}{2})$ и у тој тачки има вектор брзине $(-1,1,\sqrt2)=r_u(\operatorname{arsh}1,\frac\pi2)+\frac{1}{\sqrt2}r_v(\operatorname{arsh}1,\frac\pi2)$, задовољава $u_\gamma(t_0)=\operatorname{arsh}1$, $v_\gamma(t_0)=\frac\pi2$, $u'_\gamma(t_0)=1$ и $v'_\gamma(t_0)=\frac1{\sqrt2}$, за неко t_0. Узећемо овог пута, по конвенцији, $t_0=0$ и пошто нема додатних услова за u_γ и v_γ, да је $u_\gamma(t)=1\cdot t+\operatorname{arsh}1$, $v_\gamma(t)=\frac1{\sqrt2}\cdot t+\frac\pi2$ (најједноставније је тако, узети пресликавања облика $f(t)=k\cdot t+n$, јер је онда $f(0)=n$ и $f'(0)=k$). Треба још утврдити домен за криву $\gamma(t)=r(t+\operatorname{arsh}1,\frac1{\sqrt2}t+\frac\pi2)$. Слично као за криву α, функција $u_\gamma(t)$ не даје никаква ограничења (јер је домен за r скуп $\mathbb R\times(0,2\pi)$), а функција $v_\gamma(t)$ даје ограничење $0<\frac1{\sqrt2}t+\frac\pi2<2\pi$, па је $-\frac\pi2<\frac1{\sqrt2}t<\frac{3\pi}2$, тј. $-\frac{\pi\sqrt2}2<t<\frac{3\pi\sqrt2}2$. Дакле, $\gamma:(-\frac{\pi\sqrt2}2,\frac{3\pi\sqrt2}2)\to\mathbb R^3$, $\gamma(t)=r(t+\operatorname{arsh}1,\frac1{\sqrt2}t+\frac\pi2)$ задовољава $\gamma(0)=r(\operatorname{arsh}1,\frac\pi2)=(0,\sqrt2,1)$ и $\gamma'(0)=r_u(\operatorname{arsh}1,\frac\pi2)\cdot1+r_v(\operatorname{arsh}1,\frac\pi2)\cdot\frac1{\sqrt2}=(0,1,\sqrt2)+\frac1{\sqrt2}\cdot(-\sqrt2,0,0)=(-1,1,\sqrt2)$. Коначно, крива $\delta(t)=r(u_\delta(t),v_\delta(t))$ која садржи тачку $(0,\sqrt2,1)=r(\operatorname{arsh}1,\frac\pi2)$ и у тој тачки има вектор брзине $(1,1,\sqrt2)=r_u(\operatorname{arsh}1,\frac\pi2)-\frac1{\sqrt2}r_v(\operatorname{arsh}1,\frac\pi2)$, задовољава услове $u_\delta(t_0)=\operatorname{arsh}1$, $v_\delta(t_0)=\frac\pi2$, $u'_\delta(t_0)=1$ и $v'_\delta(t_0)=-\frac1{\sqrt2}$. Слично као малопре, ставићемо $t_0=0$, $u_\delta(t)=1\cdot t+\operatorname{arsh}1$, $v_\delta(t)=-\frac1{\sqrt2}\cdot t+\frac\pi2$ и установити, слично као за криву α, да је $\delta:(-\frac{3\pi\sqrt2}2,\frac{\pi\sqrt2}2)\to\mathbb R^3$, $\delta(t)=r(t+\operatorname{arsh}1,-\frac1{\sqrt2}t+\frac\pi2)$.

(в) Да бисмо доказали да на хиперболоиду $x^2+y^2-z^2=1$ постоје праве, фиксирајмо тачку (x_0,y_0,z_0) с њега (дакле, за коју важи $x_0^2+y_0^2-z_0^2=1$) и утврдимо да ли постоји вектор (a,b,c) такав да свака тачка праве $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ припада хиперболоиду. Како из $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$ следи $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$ и $z=z_0+ct$, добијамо услов $(x_0+at)^2+(y_0+bt)^2-(z_0+ct)^2=1$, односно $\cancel{x_0^2}+2x_0at+a^2t^2+\cancel{y_0^2}+2y_0bt+b^2t^2-\cancel{z_0^2}-2z_0ct-c^2t^2=\cancel{1}$, тј. $2(x_0a+y_0b-z_0c)t+(a^2+b^2-c^2)t^2=0$, што треба да буде задовољено за свако $t\in\mathbb R$. Према томе, $x_0a+y_0b-z_0c=0$ и $a^2+b^2-c^2=0$. Приметимо да не може бити $c=0$, јер би онда било $a^2+b^2=0$, што би повлачило $a=b=0$, а нула вектор $(0,0,0)$ не може бити вектор правца неке праве. Зато без умањења општости узмимо $c=1$. Добијамо $x_0a+y_0b=z_0$ и $a^2+b^2=1$. Ако уведемо смену $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$, за неко $\varphi\in\mathbb R$ (таква смена је могућа, јер је $a^2+b^2=1$), добијамо $x_0\cdot\cos\varphi+y_0\cdot\sin\varphi=z_0$, тј. $\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cos(\varphi-\varphi_0)=z_0$, где је $\varphi_0\in(-\pi,\pi]$ такав да је $\cos\varphi_0=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$, $\sin\varphi_0=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. Како је $x_0^2+y_0^2=1+z_0^2$, добијамо $\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}$. Пошто додавање $2k\pi$, $k\in\mathbb Z$, на φ не мења вредност за a и b, можемо узети $\varphi-\varphi_0\in(-\pi,\pi]$, па је онда $\varphi-\varphi_0=\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}$ или $\varphi-\varphi_0=-\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}$ (при чему се не може узети решење $\varphi-\varphi_0=-\pi$ ако је $\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}=-1$, а то свакако није могуће, јер је $\frac{z_0^2}{1+z_0^2}<1$, тј. $\left|\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}\right|<1$, а онда не можемо добити ни $\varphi-\varphi_0=0$). Одавде закључујемо да за сваку тачку (x_0,y_0,z_0) с хиперболоида постоје два различита вектора (a,b,c) такви да пра-

за $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ припада хиперболоиду $x^2+y^2-z^2=1$ и важи
$a=\cos(\varphi_0+\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}})=\cos\varphi_0\cdot\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}-\sin\varphi_0\cdot\sin(\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}})=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}-\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\sqrt{1-\frac{z_0^2}{1+z_0^2}}=$
$=\frac{x_0z_0}{1+z_0^2}-\frac{y_0}{\sqrt{1+z_0^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+z_0^2-z_0^2}}{\sqrt{1+z_0^2}}=\frac{x_0z_0}{1+z_0^2}-\frac{y_0}{1+z_0^2}=\frac{x_0z_0-y_0}{1+z_0^2}$ (коришћено је: $\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}\in(0,\pi)$, па је $\sin(\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}})>0$ и $\sin(\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}})=\sqrt{1-\frac{z_0^2}{1+z_0^2}}$, $x_0^2+y_0^2=1+z_0^2$, $\cos\varphi_0=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$ и $\sin\varphi_0=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$ (по дефиницији φ_0)), $b=\sin(\varphi_0+\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}})=\sin\varphi_0\cdot\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}+\cos\varphi_0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+z_0^2}}=\frac{y_0z_0+x_0}{1+z_0^2}$, $c=1$ или
$a=\cos(\varphi_0-\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}})=\cos\varphi_0\cdot\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}+\sin\varphi_0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+z_0^2}}=\frac{x_0z_0+y_0}{1+z_0^2}$, $b=\sin(\varphi_0-\arccos\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}})=$
$=\sin\varphi_0\cdot\frac{z_0}{\sqrt{1+z_0^2}}-\cos\varphi_0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+z_0^2}}=\frac{y_0z_0-x_0}{1+z_0^2}$, $c=1$. Према томе, праве су $\frac{x-x_0}{\frac{x_0z_0-y_0}{1+z_0^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0z_0+x_0}{1+z_0^2}}=\frac{z-z_0}{1}$ и $\frac{x-x_0}{\frac{x_0z_0+y_0}{1+z_0^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0z_0-x_0}{1+z_0^2}}=\frac{z-z_0}{1}$, тј. $\frac{x-x_0}{x_0z_0+y_0}=\frac{y-y_0}{y_0z_0-x_0}=\frac{z-z_0}{1+z_0^2}$ и $\frac{x-x_0}{x_0z_0-y_0}=\frac{y-y_0}{y_0z_0+x_0}=\frac{z-z_0}{1+z_0^2}$. Дакле, постоје две фамилије мимоилазних правих и свака тачка припада по тачно једној правој из сваке фамилије. То значи да можемо параметризовати хиперболоид тако да једне од координатних буду неке праве из једне од фамилија. Иначе, кад параметризујемо (право)линијске површи, потребна нам је нека крива $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ и у свакој њеној тачки неки ненула вектор $w(u)$. (Право)линијска површ представља унију правих одређених тачкама $\alpha(u)$ криве α и вектором правца $w(u)$. Како су тачке таквих правих облика $\alpha(u)+v\cdot w(u)$, за неко $v\in\mathbb{R}$, следи да је површ $r:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ дата са $r(u,v)=\alpha(u)+v\cdot w(u)$ тражена (право)линијска површ. У случају датог хиперболоида, за криву α ћемо одабрати неку праву, нпр. ону кроз тачку $(x_0,y_0,z_0)=(0,\sqrt2,1)$. Знамо да кроз њу пролазе праве $\frac{x-0}{0\cdot1-\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2}{\sqrt2\cdot1+0}=\frac{z-1}{1+1^2}$ и $\frac{x-0}{0\cdot1+\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2}{\sqrt2\cdot1-0}=\frac{z-1}{1+1^2}$, тј. $\frac{x}{-\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x}{\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{z-1}{2}$. Одаберимо нпр. праву $\frac{x}{\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{z-1}{2}=u$, тј. $\alpha(u)=(u\sqrt2,\sqrt2+u\sqrt2,1+2u)$. Сада одредимо праве кроз тачку $\alpha(u)$. Оне су $\frac{x-u\sqrt2}{u\sqrt2\cdot(1+2u)-\sqrt2-u\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2-u\sqrt2}{(\sqrt2+u\sqrt2)(1+2u)+u\sqrt2}=\frac{z-1-2u}{1+(1+2u)^2}$ и
$\frac{x-u\sqrt2}{u\sqrt2\cdot(1+2u)+\sqrt2+u\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2-u\sqrt2}{(\sqrt2+u\sqrt2)(1+2u)-u\sqrt2}=\frac{z-1-2u}{1+(1+2u)^2}$. Међутим, друга од њих је заправо полазна права $\alpha(u)$, јер је $u\sqrt2(1+2u)+\sqrt2+u\sqrt2=u\sqrt2+2u^2\sqrt2+\sqrt2+u\sqrt2=\sqrt2(2u^2+2u+1)$, $(\sqrt2+u\sqrt2)(1+2u)-u\sqrt2=\sqrt2+2u\sqrt2+\cancel{u\sqrt2}+2u^2\sqrt2-\cancel{u\sqrt2}=\sqrt2(2u^2+2u+1)$ и $1+(1+2u)^2=1+1+4u+4u^2=2(2u^2+2u+1)$, тј. права је $\frac{x-u\sqrt2}{\sqrt2(2u^2+2u+1)}=\frac{y-\sqrt2-u\sqrt2}{\sqrt2(2u^2+2u+1)}=\frac{z-1-2u}{2(2u^2+2u+1)}$, односно $\frac{x-u\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2-u\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{z-1-2u}{2}$, те ћемо посматрати прву праву. Дакле, $u\sqrt2\cdot(1+2u)-\sqrt2-u\sqrt2=\cancel{u\sqrt2}+2u^2\sqrt2-\sqrt2-\cancel{u\sqrt2}=\sqrt2(2u^2-1)$, $(\sqrt2+u\sqrt2)(1+2u)+u\sqrt2=\sqrt2+2u\sqrt2+u\sqrt2+2u^2\sqrt2+u\sqrt2=\sqrt2(2u^2+4u+1)$ и $1+(1+2u)^2=2(2u^2+2u+1)$, па је права $\frac{x-u\sqrt2}{\cancel{\sqrt2}(2u^2-1)}=\frac{y-\sqrt2-u\sqrt2}{\cancel{\sqrt2}(2u^2+4u+1)}=\frac{z-1-2u}{\cancel{\sqrt2}\cdot\sqrt2(2u^2+2u+1)}=v$, тј. $x=u\sqrt2+(2u^2-1)\cdot v$, $y=\sqrt2+u\sqrt2+(2u^2+4u+1)\cdot v$, $z=1+2u+\sqrt2(2u^2+2u+1)\cdot v$. Дакле, параметризација хиперболоида као (право)линијске површи је $r^2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $r^2(u,v)=(u\sqrt2+(2u^2-1)v,\ \sqrt2+u\sqrt2+(2u^2+4u+1)\cdot v,\ 1+2u+\sqrt2(2u^2+2u+1)\cdot v)$.

(г) Посматрајмо праву $\frac{x}{\sqrt2}=\frac{y-\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{z-1}{2}=u$, тј. $\alpha(u)=(u\sqrt2,\sqrt2+u\sqrt2,1+2u)$. Ротацијом за неки угао θ око z-осе добија се тачка $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\sqrt2\\ \sqrt2+u\sqrt2\\ 1+2u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\sqrt2\cos\theta-(\sqrt2+u\sqrt2)\sin\theta\\ u\sqrt2\sin\theta+(\sqrt2+u\sqrt2)\cos\theta\\ 1+2u\end{pmatrix}$.
Важи $x^2+y^2=(u\sqrt2\cos\theta-(\sqrt2+u\sqrt2)\sin\theta)^2+(u\sqrt2\sin\theta+(\sqrt2+u\sqrt2)\cos\theta)^2=2u^2\cos^2\theta\cancel{-2u\sqrt2(\sqrt2+u\sqrt2)\cos\theta\sin\theta}+$

$+(\sqrt{2}+u\sqrt{2})^2\sin^2\vartheta+2u^2\sin^2\vartheta+2u\sqrt{2}(\sqrt{2}+u\sqrt{2})\sin\vartheta\cos\vartheta+(\sqrt{2}+u\sqrt{2})^2\cos^2\vartheta=2u^2+(\sqrt{2}+u\sqrt{2})^2=2u^2+2+4u+2u^2=$ $=4u^2+4u+1+1=(2u+1)^2+1=z^2+1$, тј. $x^2+y^2-z^2=1$, те ротацијом праве $\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-1}{2}$ око z-осе добијамо хиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$. Нека се материјална тачка у тренутку $t=0$ налази у тачки $(0,\sqrt{2},1)$ праве $\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-1}{2}$ и нека се она креће константном брзином V по тој правој, док се права ротира око z-осе константном угао брзином ω. Уколико привремено изузмемо ротацију праве, након времена t материјална тачка ће се наћи у тачки $(0,\sqrt{2},1)+Vt\cdot\frac{(\sqrt{2},\sqrt{2},2)}{\|(\sqrt{2},\sqrt{2},2)\|}$, односно у тачки $(0,\sqrt{2},1)+\frac{Vt}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+2^2}}\cdot(\sqrt{2},\sqrt{2},2)=(0,\sqrt{2},1)+\frac{Vt}{\sqrt{2+2+4}}(\sqrt{2},\sqrt{2},2)=(0,\sqrt{2},1)+\frac{Vt}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$. Дакле, положај материјалне тачке је $(0,\sqrt{2},1)+\frac{Vt}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2},\sqrt{2},2)=\left(\frac{Vt}{2\sqrt{2}}\sqrt{2},\sqrt{2}+\frac{Vt}{2\sqrt{2}}\sqrt{2},1+\frac{Vt}{2\sqrt{2}}2\right)$. Пошто се права ротира око z-осе угаоном брзином ω, за време t ће се заротирати за угао $\varphi=\omega t$, па ће крајњи положај бити у тачки $\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0\\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{Vt}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}+\frac{Vt}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}\\ 1+\frac{Vt}{2\sqrt{2}}2\end{pmatrix}$. Ако је $r^3:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $r^3(u,\vartheta)=(u\sqrt{2}\cos\vartheta-(\sqrt{2}+u\sqrt{2})\sin\vartheta, u\sqrt{2}\sin\vartheta+(\sqrt{2}+u\sqrt{2})\cos\vartheta, 1+2u)$, онда је тражена крива $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\beta(t)=r^3\left(\frac{Vt}{2\sqrt{2}},\omega t\right)$. Ако извршимо репараметризацију $\omega t=\varphi$, добијамо криву $\tilde{\beta}(\varphi)=\beta\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)=r^3\left(\frac{V}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\varphi}{\omega},\omega\cdot\frac{\varphi}{\omega}\right)=r^3\left(\frac{V}{\omega}\cdot\frac{\varphi}{2\sqrt{2}},\varphi\right)$, те видимо да крива зависи само од односа $a=\frac{V}{\omega}$ брзине V и угаоне брзине ω.

5. Дат је торус добијен ротацијом круга $(x-4)^2+z^2=4$ у xOz равни око z-осе.

(а) Одредити неку параметризовану површ чији је траг део торуса и израчунати површину торуса.

(б) Одредити нормално векторско поље торуса дуж мање кружнице на торусу која припада равни $z=0$ и представити га у Френеовој бази те кружнице. Одредити пресек торуса и тангентне равни у тачки $(0,2,0)$.

(в) Одредити нормално векторско поље торуса дуж мање кружнице на торусу која припада равни $z=\sqrt{3}$ и представити га у Френеовој бази те кружнице. Одредити пресек торуса и тангентне равни у тачки $(0,3,\sqrt{3})$.

(а) Круг припада равни Oxz, тј. равни $y=0$. Дељењем једначине $(x-4)^2+z^2=4$ са 4 добија се $\left(\frac{x-4}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2=1$, па се може узети параметризација $\frac{x-4}{2}=\cos u$, $\frac{z}{2}=\sin u$, тј. $x=4+2\cos u$, $y=0$, $z=2\sin u$, $u\in(0,2\pi)$ (траг је та кружница без тачке $(6,0,0)$). Ротацијом за угао $\vartheta\in(0,2\pi)$ добија се тачка $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4+2\cos u\\ 0\\ 2\sin u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(4+2\cos u)\cos\vartheta\\ (4+2\cos u)\sin\vartheta\\ 2\sin u\end{pmatrix}$.
Дакле, параметризација дела торуса (без слике кружнице $(x-4)^2+z^2=4$, $y=0$ осном симетријом у односу на z-осу и без кружнице $x^2+y^2=36$, $z=0$, настале ротацијом тачке $(6,0,0)$ око z-осе) може бити $r:(0,2\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $r(u,\vartheta)=((4+2\cos u)\cos\vartheta,(4+2\cos u)\sin\vartheta,2\sin u)$.
Површина површи, која је параметризована пресликавањем $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}$ отворен и повезан скуп, једнака је $\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,d\vartheta$, где су $E=E(u,\vartheta)$, $F=F(u,\vartheta)$, $G=G(u,\vartheta)$ коефицијенти прве фундаменталне форме. Израчунајмо коефицијенте прве фундаменталне форме за торус параметризован пресликавањем r датим изнад.

$r_u(u,\vartheta)=(-2\sin u\cos\vartheta,-2\sin u\sin\vartheta,2\cos u)$

$r_\vartheta(u,\vartheta)=((4+2\cos u)\cdot(-\sin\vartheta),(4+2\cos u)\cdot\cos\vartheta,0)$

$E(u,v)=\langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle = 4\sin^2 u\cos^2 v+4\sin^2 u\sin^2 v+4\cos^2 u = 4\sin^2 u+4\cos^2 u=4$

$F(u,v)=\langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle = -2\sin u\cos v(4+2\cos u)(-\sin v)-2\sin u\sin v(4+2\cos u)\cos v=0$

$G(u,v)=\langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle = (4+2\cos u)^2\sin^2 v+(4+2\cos u)^2\cos^2 v=(4+2\cos u)^2$

$E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2=4\cdot(4+2\cos u)^2-0^2=(2\cdot(4+2\cos u))^2=(8+4\cos u)^2$

$8+4\cos u \geq 8+4\cdot(-1)=8-4=4$

Површина торуса је $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{(8+4\cos u)^2}\,du\,dv=\int_0^{2\pi}(8+4\cos u)\,du\underbrace{\int_0^{2\pi}dv}_{=2\pi}=2\pi\left(8\int_0^{2\pi}du+4\int_0^{2\pi}\cos u\,du\right)=2\pi\cdot 8\cdot 2\pi+$
$+2\pi\cdot 4\cdot \sin u\Big|_0^{2\pi}=32\pi^2+8\pi\cdot\underbrace{(\sin 2\pi-\sin 0)}_{=0}=32\pi^2.$

(б) Потражимо пресек равни $z=0$ и торуса $r(u,v)=((4+2\cos u)\cos v,(4+2\sin u)\sin v, 2\sin u)$.
Дакле, интересују нас тачке торуса за које важи $2\sin u=0$. Како је $u\in(0,2\pi)$ (тиме
је избачена управо велика кружница $x^2+y^2=36$, $z=0$), следи да је $u=\pi$. Према томе,
добијамо криву $\beta_\pi(v):(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $\beta_\pi(v)=r(\pi,v)$. То значи да нас интересује нор-
мално векторско поље $n(u,v)$ дуж криве $u=\pi$, тј. $n(\pi,v)$.

$r_u(\pi,v)=(0,0,-2)$, $r_v(\pi,v)=((4-2)\cdot(-\sin v),(4-2)\cos v,0)=(-2\sin v,2\cos v,0)$

$r_u(\pi,v)\times r_v(\pi,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -2\\ -2\sin v & 2\cos v & 0\end{vmatrix}=(4\cos v,4\sin v,0)$

$\|r_u(\pi,v)\times r_v(\pi,v)\|^2=16\cos^2 v+16\sin^2 v=16 \Rightarrow \|r_u(\pi,v)\times r_v(\pi,v)\|=4$

$n(\pi,v)=\dfrac{r_u(\pi,v)\times r_v(\pi,v)}{\|r_u(\pi,v)\times r_v(\pi,v)\|}=\dfrac{(4\cos v,4\sin v,0)}{4}=(\cos v,\sin v,0)$

Сада ћемо изразити Френеову базу криве $\beta_\pi(v)=r(\pi,v)=((4-2)\cos v,(4-2)\sin v,0)=(2\cos v,2\sin v,0)$.

$\beta_\pi'(v)=(-2\sin v,2\cos v,0)$

$\|\beta_\pi'(v)\|^2=4\sin^2 v+4\cos^2 v=4 \Rightarrow \|\beta_\pi'(v)\|=2$

$T_{\beta_\pi}(v)=\dfrac{\beta_\pi'(v)}{\|\beta_\pi'(v)\|}=\dfrac{(-2\sin v,2\cos v,0)}{2}=(-\sin v,\cos v,0)$

$\beta_\pi''(v)=(-2\cos v,-2\sin v,0)$

$\beta_\pi'(v)\times\beta_\pi''(v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\sin v & 2\cos v & 0\\ -2\cos v & -2\sin v & 0\end{vmatrix}=(0,0,4\sin^2 v+4\cos^2 v)=(0,0,4)$

$\|\beta_\pi'(v)\times\beta_\pi''(v)\|=4$

$B_{\beta_\pi}(v)=\dfrac{\beta_\pi'(v)\times\beta_\pi''(v)}{\|\beta_\pi'(v)\times\beta_\pi''(v)\|}=\dfrac{(0,0,4)}{4}=(0,0,1)$

$N_{\beta_\pi}(v)=B_{\beta_\pi}(v)\times T_{\beta_\pi}(v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ -\sin v & \cos v & 0\end{vmatrix}=(-\cos v,-\sin v,0)$

Дакле, нормално векторско поље торуса дуж кружнице $u=\pi$ ($n(\pi,v)=(\cos v,\sin v,0)$)
изражава се у Френеовој бази те кружнице ($\beta_\pi(v)=r(\pi,v)$) као $n(\pi,v)=-N_{\beta_\pi}(v)$.
Да бисмо добили једначину тангентне равни торуса у тачки $(0,2,0)$, потражи-
мо (u_0,v_0) такво да је $r(u_0,v_0)=(0,2,0)$. Добијамо $((4+2\cos u_0)\cos v_0,(4+2\cos u_0)\sin v_0,2\sin u_0)=(0,2,0)$,
па је $2\sin u_0=0$, тј. $u_0=\pi$ (избачена је кружница $x^2+y^2=36$). Добијамо $(4-2)\cos v_0=0$ и
$(4-2)\sin v_0=2$, па је $v_0=\frac{\pi}{2}$. Нормални вектор је $n(\pi,\frac{\pi}{2})=(\cos\frac{\pi}{2},\sin\frac{\pi}{2},0)=(0,1,0)$, па је јед-
начина тангентне равни у тачки $(0,2,0)$ дата са $0\cdot(x-0)+1\cdot(y-2)+0\cdot(z-0)=0$, тј. $y-2=0$.
Пресек торуса и те равни је скуп тачака таквих да је $x=(4+2\cos u)\cos v$, $z=2\sin u$ и
$2=y=(4+2\cos u)\sin v$. Добијамо да је $\sin v=\dfrac{2}{4+2\cos u}=\dfrac{1}{2+\cos u}$, па је $\cos^2 v=1-\sin^2 v=1-\dfrac{1}{(2+\cos u)^2}=$

$= \frac{(2+\cos u)^2-1}{(2+\cos u)^2} = \frac{(2+\cos u-1)(2+\cos u+1)}{(2+\cos u)^2} = \frac{(1+\cos u)(3+\cos u)}{(2+\cos u)^2}$. Дакле, $\cos v = \frac{\pm\sqrt{(1+\cos u)(3+\cos u)}}{2+\cos u}$, па добијамо да је пресек торуса и његове тангентне равни $y=2$ у тачки $(0,2,0)$ скуп тачака сачињен од трагова кривих $\gamma_1, \gamma_2 : (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_1(u) = (2\sqrt{(1+\cos u)(3+\cos u)}, 2, 2\sin u)$ и $\gamma_2(u) = (-2\sqrt{(1+\cos u)(3+\cos u)}, 2, 2\sin u)$. Трагови тих кривих чине тзв. Бернулијеву лемнискату.

(в) Потражимо пресек равни $z=\sqrt{3}$ и торуса $r(u,v) = ((4+2\cos u)\cos v, (4+2\cos u)\sin v, 2\sin u)$. Дакле важи $2\sin u = \sqrt{3}$, тј. $\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}$, па је $u = \frac{\pi}{3}$ или $u = \frac{2\pi}{3}$. Мања кружница добија се када је x^2+y^2 мање, па стога треба узети $u = \frac{2\pi}{3}$, јер је тада $x = (4-2\cdot\frac{1}{2})\cos v$ и $y = (4-2\cdot\frac{1}{2})\sin v$, тј. $x = 3\cos v$ и $y = 3\sin v$. Дакле мања кружница на торусу је параметризована са $\beta_{\frac{2\pi}{3}}(v) = r(\frac{2\pi}{3}, v)$, па је потребно наћи нормално векторско поље торуса дуж криве $u=\frac{2\pi}{3}$.

$r_u(\frac{2\pi}{3}, v) = (-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos v, -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin v, 2\cdot(-\frac{1}{2})) = (-\sqrt{3}\cos v, -\sqrt{3}\sin v, -1)$

$r_v(\frac{2\pi}{3}, v) = ((4+2\cdot(-\frac{1}{2}))\cdot(-\sin v), (4+2\cdot(-\frac{1}{2}))\cos v, 0) = (-3\sin v, 3\cos v, 0)$

$$r_u(\tfrac{2\pi}{3}, v) \times r_v(\tfrac{2\pi}{3}, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{3}\cos v & -\sqrt{3}\sin v & -1 \\ -3\sin v & 3\cos v & 0 \end{vmatrix} = (3\cos v, 3\sin v, -3\sqrt{3}\cos^2 v - 3\sqrt{3}\sin^2 v) = (3\cos v, 3\sin v, -3\sqrt{3})$$

$\|r_u(\frac{\pi}{3}, v) \times r_v(\frac{\pi}{3}, v)\|^2 = 9\cos^2 v + 9\sin^2 v + 27 = 9+27 = 36 \Rightarrow \|r_u(\frac{\pi}{3}, v) \times r_v(\frac{\pi}{3}, v)\| = 6$

$$n(\tfrac{\pi}{3}, v) = \frac{r_u(\frac{\pi}{3}, v) \times r_v(\frac{\pi}{3}, v)}{\|r_u(\frac{\pi}{3}, v) \times r_v(\frac{\pi}{3}, v)\|} = \frac{(3\cos v, 3\sin v, -3\sqrt{3})}{6} = (\tfrac{1}{2}\cos v, \tfrac{1}{2}\sin v, -\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

Френеова база кружнице $\beta_{\frac{2\pi}{3}}(v) = r(\frac{2\pi}{3}, v) = ((4+2\cdot(-\frac{1}{2}))\cos v, (4+2\cdot(-\frac{1}{2}))\sin v, 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = (3\cos v, 3\sin v, \sqrt{3})$ добија се помоћу стандардних образаца.

$\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v) = (-3\sin v, 3\cos v, 0)$

$\|\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v)\|^2 = 9\sin^2 v + 9\cos^2 v = 9 \Rightarrow \|\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v)\| = 3$

$$T_{\beta_{\frac{2\pi}{3}}}(v) = \frac{\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v)}{\|\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v)\|} = \frac{(-3\sin v, 3\cos v, 0)}{3} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$\beta''_{\frac{2\pi}{3}}(v) = (-3\cos v, -3\sin v, 0)$

$$\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v) \times \beta''_{\frac{2\pi}{3}}(v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3\sin v & 3\cos v & 0 \\ -3\cos v & -3\sin v & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 9\sin^2 v + 9\cos^2 v) = (0,0,9)$$

$\|\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v) \times \beta''_{\frac{2\pi}{3}}(v)\| = 9$

$$B_{\beta_{\frac{2\pi}{3}}}(v) = \frac{\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v) \times \beta''_{\frac{2\pi}{3}}(v)}{\|\beta'_{\frac{2\pi}{3}}(v) \times \beta''_{\frac{2\pi}{3}}(v)\|} = \frac{(0,0,9)}{9} = (0,0,1)$$

$$N_{\beta_{\frac{2\pi}{3}}}(v) = B_{\beta_{\frac{2\pi}{3}}}(v) \times T_{\beta_{\frac{2\pi}{3}}}(v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

Дакле, $n(\frac{2\pi}{3}, v) = (\frac{1}{2}\cos v, \frac{1}{2}\sin v, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2}(-\cos v, -\sin v, 0) - \frac{\sqrt{3}}{2}(0,0,1) = -\frac{1}{2}N_{\beta_{\frac{2\pi}{3}}}(v) - \frac{\sqrt{3}}{2}B_{\beta_{\frac{2\pi}{3}}}(v)$.

Утврдимо за које вредности (u_0, v_0) се добија тачка $(0,3,\sqrt{3})$.

$(4+2\cos u_0)\cos v_0 = 0$, $(4+2\cos u_0)\sin v_0 = 3$, $2\sin u_0 = \sqrt{3} \Rightarrow u_0 = \frac{\pi}{3} \vee u_0 = \frac{2\pi}{3}$

$4+2\cos u_0 > 0 \Rightarrow \cos v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{\pi}{2} \vee v_0 = \frac{3\pi}{2}$

Не може бити $\vartheta_0=\frac{3\pi}{2}$ јер би онда било $(4+2\cos u_0)\cdot\sin\frac{3\pi}{2}<0$, а треба да буде једнако 3. Дакле, $\vartheta_0=\frac{\pi}{2}$ и $(4+2\cos u_0)\cdot\sin\frac{\pi}{2}=3$, тј. $4+2\cos u_0=3$, па је $2\cos u_0=-1$, тј. $\cos u_0=-\frac{1}{2}$. Следи да је $u_0=\frac{2\pi}{3}$, тј. да је $(0,3,\sqrt{3})=r(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2})$. Нормални вектор торуса у тој тачки је $n(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2})=(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})=(0,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, па је тангентна раван дата једначином $0\cdot(x-0)+\frac{1}{2}\cdot(y-3)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(z-\sqrt{3})=0$, тј. $y-3-\sqrt{3}z+3=0$, односно $y-\sqrt{3}z=0$. Крива у пресеку торуса $r(u,\vartheta)=((4+2\cos u)\cos\vartheta,(4+2\cos u)\sin\vartheta,2\sin u)$ и $y-\sqrt{3}z=0$ задовољава услов $(4+2\cos u)\sin\vartheta-\sqrt{3}\cdot 2\sin u=0$, тј. $\sin\vartheta=\frac{2\sqrt{3}\sin u}{2(2+\cos u)}=\frac{\sqrt{3}\sin u}{2+\cos u}$. Одатле је $\cos^2\vartheta=1-\sin^2\vartheta=1-\frac{3\sin^2 u}{(2+\cos u)^2}=\frac{4+4\cos u+\cos^2 u-3+3\cos^2 u}{(2+\cos u)^2}=\frac{1+4\cos u+4\cos^2 u}{(2+\cos u)^2}=\frac{(1+2\cos u)^2}{(2+\cos u)^2}$, па је $\cos\vartheta=\pm\frac{1+2\cos u}{2+\cos u}$. Следи да се пресечна крива састоји од трагова кривих $\delta_1,\delta_2:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $\delta_1(u)=(2(1+2\cos u),2\sqrt{3}\sin u,2\sin u)$ и $\delta_2(u)=(-2(1+2\cos u),2\sqrt{3}\sin u,2\sin u)$. Приметимо да важи $(\pm 4\cos u)^2+(2\sqrt{3}\sin u)^2+(2\sin u)^2=16\cos^2 u+12\sin^2 u+4\sin^2 u=16$, па закључујемо да траг криве δ_1 припада сфери $(x-2)^2+y^2+z^2=16$, а траг криве δ_2 сфери $(x+2)^2+y^2+z^2=16$, те су трагови ових кривих кружнице (без једне тачке).

6. Нека је $r:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)\to S^2$, $r(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)$, параметризована површ чији је траг део сфере S^2.

(а) Израчунати површину дела јединичне сфере између два меридијана и две паралеле.

(б) Доказати да су криве на сфери које заклапају константан угао ψ са меридијанима дате једначином $\gamma(\theta)=r(\theta,\pm\operatorname{tg}\psi\cdot\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+C)$, $C\in\mathbb{R}$. Ове криве називају се локсодроме.

(в) Израчунати дужину локсодроме која се добија за $C=0$.

(а) Меридијани су криве $\alpha_{\varphi_0}(\theta)=r(\theta,\varphi_0)$, $\varphi_0\in(0,2\pi)$ фиксирано, а паралеле су криве $\beta_{\theta_0}(\varphi)=r(\theta_0,\varphi)$, $\theta_0\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ фиксирано. Нека је $0<\varphi_0<\varphi_1<2\pi$ и $-\frac{\pi}{2}<\theta_0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$. Тада меридијани $\alpha_{\varphi_0},\alpha_{\varphi_1}$ и паралеле $\beta_{\theta_0},\beta_{\theta_1}$ одређују област где је $\varphi_0\le\varphi\le\varphi_1$ и $\theta_0\le\theta\le\theta_1$, а површина је $\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi$. Израчунајмо стога коефицијенте прве основне форме.

$$r_\theta(\theta,\varphi)=(-\sin\theta\cos\varphi,-\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$$
$$r_\varphi(\theta,\varphi)=(-\cos\theta\sin\varphi,\cos\theta\cos\varphi,0)$$
$$E(\theta,\varphi)=\langle r_\theta(\theta,\varphi),r_\theta(\theta,\varphi)\rangle=\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$F(\theta,\varphi)=\langle r_\theta(\theta,\varphi),r_\varphi(\theta,\varphi)\rangle=\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi+0=0$$
$$G(\theta,\varphi)=\langle r_\varphi(\theta,\varphi),r_\varphi(\theta,\varphi)\rangle=\cos^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta\cos^2\varphi=\cos^2\theta$$
$$\sqrt{E(\theta,\varphi)G(\theta,\varphi)-F(\theta,\varphi)^2}=\sqrt{1\cdot\cos^2\theta-0^2}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta\quad(\theta\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}),\text{ па је }\cos\theta>0)$$

Површина је $\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\theta\,d\theta\,d\varphi=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\cos\theta\,d\theta\underbrace{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}d\varphi}_{\varphi_1-\varphi_0}=(\varphi_1-\varphi_0)\cdot\sin\theta\Big|_{\theta_0}^{\theta_1}=(\varphi_1-\varphi_0)(\sin\theta_1-\sin\theta_0)$.

(б) Вектор брзине криве γ је $\gamma'(\theta)=r_\theta(\theta,\pm\operatorname{tg}\psi\cdot\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+C)+r_\varphi(\theta,\pm\operatorname{tg}\psi\cdot\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+C)\cdot(\pm\operatorname{tg}\psi)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\cdot\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\cdot(-\frac{1}{2})=r_\theta(\theta,\pm\operatorname{tg}\psi\cdot\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+C)-r_\varphi(\theta,\pm\operatorname{tg}\psi\cdot\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}))\cdot(\pm\operatorname{tg}\psi)\cdot\frac{1}{2\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}=$
$=r_\theta(\theta,\pm\operatorname{tg}\psi\cdot\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+C)-r_\varphi(\theta,\pm\operatorname{tg}\psi\cdot\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}))\cdot(\pm\operatorname{tg}\psi)\cdot\frac{1}{\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}_{=\cos\theta}}$. Његове координате у бази

$r_\theta(\theta, \pm tg\psi \cdot \ln tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+C)$, $r_\varphi(\theta, \pm tg\psi \cdot \ln tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+C)$ су $(1, -\frac{1}{\cos\theta}\cdot(\pm tg\psi))$. С друге стране, координате меридијана који пролази кроз ту тачку у истој бази су $(1,0)$, па можемо израчунати угао између тих вектора помоћу прве основне форме.

$$\left(1\ \ -\frac{1}{\cos\theta}\cdot(\pm tg\psi)\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\left(1\ \ -\cos\theta\cdot(\pm tg\psi)\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1 \text{ (скаларни производ)}$$

$$\left(1\ \ -\frac{1}{\cos\theta}\cdot(\pm tg\psi)\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{\cos\theta}\cdot(\pm tg\psi)\end{pmatrix}=\left(1\ \ -\cos\theta\cdot(\pm tg\psi)\right)\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{\cos\theta}\cdot(\pm tg\psi)\end{pmatrix}=1+(\pm tg\psi)^2=1+tg^2\psi$$
(интензитет $\gamma'(\theta)$)

$$(1\ \ 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(1\ \ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1 \text{ (интензитет вектора брзине меридијана)}$$

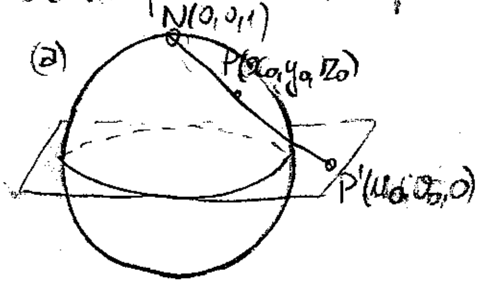
Дакле, косинус угла који граде ова два вектора је $\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\psi}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\psi}}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos\psi}}=\cos\psi$, тј. крива γ у свакој својој тачки гради угао ψ са одговарајућим меридијаном.

(б) Дужина локсодроме $\gamma(\theta)=r(\theta, \pm tg\psi\cdot\ln tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}))$ $(C=0)$ рачуна се по обрасцу

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\|\gamma'(\theta)\|d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+tg^2\psi}\,d\theta=\frac{1}{\cos\psi}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{1}{\cos\psi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{\cos\psi}\cdot\pi.$$

7. (а) Доказати да је параметризација јединичне сфере добијена стереографском пројекцијом конформна. Одредити координатне линије такве параметризације.
(б) Показати да су локсодроме на сфери слике одговарајућих логаритамских спирала из равни $z=0$ при стереографској пројекцији.

(а)



Стереографска пројекција пресликава тачку $P(x_0,y_0,z_0)$ са сфере, различиту од северног пола $N(0,0,1)$, у пресечну тачку праве NP и равни $z=0$.

$$\frac{x-0}{x_0-0}=\frac{y-0}{y_0-0}=\frac{z-1}{z_0-1} \text{ – једначина праве } NP.$$

Тачка $P'(u_0,v_0,0)$ је пресечна тачка праве NP и равни $z=0$, па важи $\frac{u_0}{x_0}=\frac{v_0}{y_0}=\frac{-1}{z_0-1}=\frac{1}{1-z_0}$, те је $u_0=\frac{x_0}{1-z_0}$, $v_0=\frac{y_0}{1-z_0}$. Приметимо да је $u_0^2+v_0^2=\frac{x_0^2}{(1-z_0)^2}+\frac{y_0^2}{(1-z_0)^2}=\frac{x_0^2+y_0^2}{(1-z_0)^2}=\frac{1-z_0^2}{(1-z_0)^2}=$
$=\frac{(1-z_0)(1+z_0)}{(1-z_0)^2}=\frac{1+z_0}{1-z_0}$, па је $(1-z_0)(u_0^2+v_0^2)=1+z_0$, тј. $u_0^2+v_0^2-(u_0^2+v_0^2)z_0=1+z_0$. Одавде је
$u_0^2+v_0^2-1=(u_0^2+v_0^2+1)z_0$, тј. $z_0=\frac{u_0^2+v_0^2-1}{u_0^2+v_0^2+1}$. Следи да је $1-z_0=1-\frac{u_0^2+v_0^2-1}{u_0^2+v_0^2+1}=\frac{u_0^2+v_0^2+1-u_0^2-v_0^2+1}{u_0^2+v_0^2+1}=$
$=\frac{2}{u_0^2+v_0^2+1}$, те је $x_0=u_0(1-z_0)=\frac{2u_0}{u_0^2+v_0^2+1}$ и $y_0=v_0(1-z_0)=\frac{2v_0}{u_0^2+v_0^2+1}$. Следи да је параметризација сфере стереографском пројекцијом дата са $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$.

Параметризација $r:U\to\mathbb{R}^3$ је конформна ако се две криве у $U\in\mathbb{R}^2$ које се секу у произвољној тачки $(u_0,v_0)\in U$ пресликавају у криве на трагу $r(U)$ површи r које се секу у тачки $r(u_0,v_0)$ и граде у тој тачки исти угао као полазне криве. Параметризација је конформна ако и само ако је $E(u,v)=G(u,v)$ и $F(u,v)=0$, за свако $(u,v)\in U$. Према томе, израчунајмо коефицијенте прве основне форме.

$$r_u(u,v)=\left(\frac{2(u^2+v^2+1)-2u\cdot 2u}{(u^2+v^2+1)^2},\ 2v\cdot\left(-\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\right)\cdot 2u,\ \frac{2u\cdot(u^2+v^2+1)-(u^2+v^2-1)\cdot 2u}{(u^2+v^2+1)^2}\right)=$$
$$=\left(\frac{2(-u^2+v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^2},\ -\frac{4uv}{(u^2+v^2+1)^2},\ \frac{4u}{(u^2+v^2+1)^2}\right)$$

$$r_v(u,v)=\left(2u\cdot\left(-\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\right)\cdot 2v,\ \frac{2(u^2+v^2+1)-2v\cdot 2v}{(u^2+v^2+1)^2},\ \frac{2v\cdot(u^2+v^2+1)-(u^2+v^2-1)\cdot 2v}{(u^2+v^2+1)^2}\right)=$$

$$=\left(-\frac{4uv}{(u^2+v^2+1)^2},\ \frac{2(u^2-v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^2},\ \frac{4v}{(u^2+v^2+1)^2}\right)$$

$$E(u,v)=\langle r_u(u,v),r_u(u,v)\rangle=\frac{1}{(u^2+v^2+1)^4}\cdot\left(4(u^4+v^4+1-2u^2v^2-2u^2+2v^2)+16u^2v^2+16u^2\right)=$$

$$=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^4}(u^4+v^4+1-2u^2v^2-2u^2+2v^2+4u^2v^2+4u^2)=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^4}(u^4+v^4+1+2u^2v^2+2u^2+2v^2)=$$

$$=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^{\cancel{4}\,2}}\cdot\cancel{(u^2+v^2+1)^2}=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}$$

$$F(u,v)=\langle r_u(u,v),r_v(u,v)\rangle=\frac{1}{(u^2+v^2+1)^4}\left(-8uv(-u^2+v^2+1)-8uv(u^2-v^2+1)+16uv\right)=$$

$$=\frac{8uv}{(u^2+v^2+1)^4}\cancel{(u^2-v^2-1-u^2+v^2-1+2)}=0$$

$$G(u,v)=\langle r_v(u,v),r_v(u,v)\rangle=\frac{1}{(u^2+v^2+1)^4}\left(16u^2v^2+4(u^4+v^4+1-2u^2v^2+2u^2-2v^2)+16v^2\right)=$$

$$=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^4}(4u^2v^2+u^4+v^4+1-2u^2v^2+2u^2-2v^2+4v^2)=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^4}(u^4+v^4+1+2u^2v^2+2u^2+2v^2)=$$

$$=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^{\cancel{4}\,2}}\cdot\cancel{(u^2+v^2+1)^2}=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}=E(u,v)$$

Дакле, параметризација јесте конформна.

Координатна линија $u=u_0$ се слика у пресечну криву сфере и равни која садржи тачку $N(0,0,1)$ и праву $u=u_0$, а координатна линија $v=v_0$ се слика у пресечну криву сфере и равни која садржи тачку $N(0,0,1)$ и праву $v=v_0$.

(б) Пошто је параметризација конформна, можемо посматрати углове у $\mathbb{R}^2$, уместо на сфери. Меридијани сфере се налазе у пресеку полуравни које садрже z-осу и сфере те се оне сликају у полуправе које садрже координатни почетак. Логаритамска спирала је крива $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(c\cdot a^t\cos t,\ c\cdot a^t\sin t)$. У тачки $t_0\in\mathbb{R}$ вектор брзине логаритамске спирале је $\alpha'(t_0)$, а кроз ту тачку пролази полуправа чији је вектор правца исти као вектор положаја $\alpha(t_0)-O$ те тачке. У 6. задатку из области криве доказано је да је угао између вектора брзине $\alpha'(t_0)$ и вектора положаја $\alpha(t_0)-O$ константан, тј. не зависи од тачке $t_0\in\mathbb{R}$. Према томе, логаритамска спирала α заклапа константан угао са сликама меридијана, те је она слика локсодроме сфере.

8. Дата је елементарна површ $r(u,v)=(\operatorname{sh}u\cos v,\ \operatorname{sh}u\sin v,\ v)$, $u\in\mathbb{R}^+$, $v\in\mathbb{R}$.

(а) Доказати да је дата површ конформна репараметризација хеликоида $f(s,t)=(s\cos t,\ s\sin t,\ t)$, $s\in\mathbb{R}^+$, $t\in\mathbb{R}$, па затим одредити две фамилије кривих на хеликоиду под углом $\frac{\pi}{4}$.

(б) Израчунати геодезијску и нормалну кривину координатних линија датог хеликоида.

(а) Једноставно видимо да је пресликавање $\varphi:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, дато са $\varphi(u,v)=(\operatorname{sh}u,\ v)$, дифеоморфизам који представља тражену репараметризацију ($f(\varphi(u,v))=f(\operatorname{sh}u,v)=(\operatorname{sh}u\cos v,\ \operatorname{sh}u\sin v,\ v)=r(u,v)$). Заиста, φ је дифеоморфизам, јер је бијекција, диференцијабилно је и његов инверз, $\varphi^{-1}(s,t)=(\operatorname{arsh} s, t)$, такође је диференцијабилно пресликавање. Треба још утврдити да је r конформно.

$r_u(u,v)=(\operatorname{ch}u\cos v, \operatorname{ch}u\sin v, 0)$

$r_v(u,v)=(-\operatorname{sh}u\sin v, \operatorname{sh}u\cos v, 1)$

$E(u,v)=\langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle=\operatorname{ch}^2u\cos^2v+\operatorname{ch}^2u\sin^2v=\operatorname{ch}^2u$

$F(u,v)=\langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle=-\operatorname{ch}u\operatorname{sh}u\cos v\sin v+\operatorname{ch}u\operatorname{sh}u\sin v\cos v+0=0$

$G(u,v)=\langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle=\operatorname{sh}^2u\sin^2v+\operatorname{sh}^2u\cos^2v+1=\operatorname{sh}^2u+1=\operatorname{ch}^2u=E(u,v)$

Дакле, r је конформна параметризација.

Хеликси на хеликоиду r јесу слике координатних линија $u=u_0$, а пошто је r конформно, довољно је у полуравни $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ одредити фамилије кривих које с правима $u=u_0$ граде константан угао $\frac{\pi}{4}$. Те фамилије кривих су $v=\pm u+v_0$.

(б) Нека је $\alpha(s)=r(u(s),v(s))$ природно параметризована крива на површи $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп. Тада је $T'(s)=\kappa(s)N(s)$ и помоћу тога дефинишемо кривину κ криве α. За нормалну и геодезијску кривину користимо да у тачки $\alpha(s_0)$ површи r постоји ортонормирана база сачињена од јединичног нормалног вектора $\mathbf{n}(u(s_0),v(s_0))$ површи r у тој тачки, тангентног вектора $T(s_0)$ криве α у тој тачки и вектора $S(s_0)=\mathbf{n}(u(s_0),v(s_0))\times T(s_0)$, који се назива вектором унутрашње нормале криве α на површи r. Према томе, вектор $T'(s_0)$ је могуће изразити у тој ОНБ и добија се $T'(s_0)=\langle T'(s_0),\mathbf{n}(u(s_0),v(s_0))\rangle\mathbf{n}(u(s_0),v(s_0))+\langle T'(s_0),S(s_0)\rangle S(s_0)$ (јер је $\langle T'(s_0),T(s_0)\rangle=\kappa(s_0)\langle N(s_0),T(s_0)\rangle=0$). Величина $\kappa_n(s_0)=\langle T'(s_0),\mathbf{n}(u(s_0),v(s_0))\rangle$ зове се нормална кривина криве α на површи r, а величина $\kappa_g(s_0)=\langle T'(s_0),S(s_0)\rangle=\langle T'(s_0),\mathbf{n}(u(s_0),v(s_0))\times T(s_0)\rangle=[\mathbf{n}(u(s_0),v(s_0)),T(s_0),T'(s_0)]$ зове се геодезијска кривина криве α на површи r. Ако крива α на површи r није природно параметризована, онда је $T'(t)=V(t)\kappa(t)N(t)$, где је $V(t)=\|\alpha'(t)\|$ интензитет вектора брзине криве α у тачки t, па је нормална кривина $\kappa_n(t)=\frac{\langle T'(t),\mathbf{n}(u(t),v(t))\rangle}{V(t)}$, а геодезијска кривина $\kappa_g(t)=\frac{[\mathbf{n}(u(t),v(t)),T(t),T'(t)]}{V(t)}$.

Координатне линије хеликоида $r(u,v)=(\operatorname{sh}u\cos v,\operatorname{sh}u\sin v, v)$ су $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)$ и $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)$.

$\alpha_{v_0}(u)=(\operatorname{sh}u\cos v_0, \operatorname{sh}u\sin v_0, v_0)$

$\alpha'_{v_0}(u)=(\operatorname{ch}u\cos v_0, \operatorname{ch}u\sin v_0, 0)$

$\|\alpha'_{v_0}(u)\|^2=\operatorname{ch}^2u\cos^2v_0+\operatorname{ch}^2u\sin^2v_0=\operatorname{ch}^2u\Rightarrow V_{\alpha_{v_0}}(u)=\|\alpha'_{v_0}(u)\|=\operatorname{ch}u$

$T_{\alpha_{v_0}}(u)=\frac{\alpha'_{v_0}(u)}{\|\alpha'_{v_0}(u)\|}=\frac{(\operatorname{ch}u\cos v_0, \operatorname{ch}u\sin v_0, 0)}{\operatorname{ch}u}=(\cos v_0, \sin v_0, 0)$

$T'_{\alpha_{v_0}}(u)=(0,0,0)=\vec{0}$

Следи да је $\kappa_{g\alpha_{v_0}}(u)=0$ и $\kappa_{n\alpha_{v_0}}(u)=0$ (што је логично, јер је координатна линија α_{v_0} део праве).

$\beta_{u_0}(v)=(\operatorname{sh}u_0\cos v, \operatorname{sh}u_0\sin v, v)$

$\beta'_{u_0}(v)=(-\operatorname{sh}u_0\sin v, \operatorname{sh}u_0\cos v, 1)$

$\|\beta'_{u_0}(v)\|^2=\operatorname{sh}^2u_0\sin^2v+\operatorname{sh}^2u_0\cos^2v+1=\operatorname{sh}^2u_0+1=\operatorname{ch}^2u_0\Rightarrow V_{\beta_{u_0}}(v)=\|\beta'_{u_0}(v)\|=\operatorname{ch}u_0$

$T_{\beta_{u_0}}(v)=\frac{\beta'_{u_0}(v)}{\|\beta'_{u_0}(v)\|}=\frac{(-\operatorname{sh}u_0\sin v, \operatorname{sh}u_0\cos v, 1)}{\operatorname{ch}u_0}=\left(-\operatorname{th}u_0\sin v, \operatorname{th}u_0\cos v, \frac{1}{\operatorname{ch}u_0}\right)$

$T'_{\beta_{u_0}}(v)=(-\operatorname{th}u_0\cos v, -\operatorname{th}u_0\sin v, 0)$

Јединично нормално векторско поље површи добија се из $n(u,v)=\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}$.

$r_u(u,v)=(\operatorname{ch}u\cos v, \operatorname{ch}u\sin v, 0)$

$r_v(u,v)=(-\operatorname{sh}u\sin v, \operatorname{sh}u\cos v, 1)$

$$r_u(u,v)\times r_v(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \operatorname{ch}u\cos v & \operatorname{ch}u\sin v & 0\\ -\operatorname{sh}u\sin v & \operatorname{sh}u\cos v & 1\end{vmatrix}=(\operatorname{ch}u\sin v, -\operatorname{ch}u\cos v, \operatorname{ch}u\operatorname{sh}u\cos^2 v+\operatorname{ch}u\operatorname{sh}u\sin^2 v)=$$

$$=(\operatorname{ch}u\sin v, -\operatorname{ch}u\cos v, \operatorname{ch}u\operatorname{sh}u)$$

$$\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2=\operatorname{ch}^2u\sin^2v+\operatorname{ch}^2u\cos^2v+\operatorname{ch}^2u\operatorname{sh}^2u=\operatorname{ch}^2u+\operatorname{ch}^2u\operatorname{sh}^2u=\operatorname{ch}^2u(1+\operatorname{sh}^2u)=\operatorname{ch}^4u$$

$$\Rightarrow \|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|=\operatorname{ch}^2u$$

$$n(u,v)=\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}=\frac{(\operatorname{ch}u\sin v, -\operatorname{ch}u\cos v, \operatorname{ch}u\operatorname{sh}u)}{\operatorname{ch}^2u}=\left(\frac{1}{\operatorname{ch}u}\sin v, -\frac{1}{\operatorname{ch}u}\cos v, \operatorname{th}u\right)$$

Дуж координатне линије $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)$ добијамо јединично нормално векторско поље $n(u_0,v)=\left(\frac{1}{\operatorname{ch}u_0}\sin v, -\frac{1}{\operatorname{ch}u_0}\cos v, \operatorname{th}u_0\right)$.

$$\langle T'_{\beta_{u_0}}(v), n(u_0,v)\rangle=\cancel{-\operatorname{th}u_0\frac{1}{\operatorname{ch}u_0}\cos v\sin v}+\cancel{\operatorname{th}u_0\frac{1}{\operatorname{ch}u_0}\sin v\cos v}+0=0\Rightarrow K_{n_{\beta_{u_0}}}(v)=0$$

$$[n(u_0,v), T_{\beta_{u_0}}(v), T'_{\beta_{u_0}}(v)]=\begin{vmatrix}\frac{1}{\operatorname{ch}u_0}\sin v & -\frac{1}{\operatorname{ch}u_0}\cos v & \operatorname{th}u_0\\ -\operatorname{th}u_0\sin v & \operatorname{th}u_0\cos v & \frac{1}{\operatorname{ch}u_0}\\ -\operatorname{th}u_0\cos v & -\operatorname{th}u_0\sin v & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2u_0}\operatorname{th}u_0\cos^2v+\operatorname{th}^3u_0\sin^2v+\operatorname{th}^3u_0\cos^2v+\frac{1}{\operatorname{ch}^2u_0}\operatorname{th}u_0\sin^2v=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{ch}^2u_0}\operatorname{th}u_0+\operatorname{th}^3u_0=\operatorname{th}u_0\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2u_0}+\operatorname{th}^2u_0\right)=\operatorname{th}u_0\frac{1+\operatorname{sh}^2u_0}{\operatorname{ch}^2u_0}=\operatorname{th}u_0$$

$$K_{g_{\beta_{u_0}}}(v)=\frac{[n(u_0,v), T_{\beta_{u_0}}(v), T'_{\beta_{u_0}}(v)]}{V_{\beta_{u_0}}(v)}=\frac{\operatorname{th}u_0}{\operatorname{ch}u_0}=\frac{\operatorname{sh}u_0}{\operatorname{ch}^2u_0}=\frac{\operatorname{sh}u_0}{1+\operatorname{sh}^2u_0}$$

Пошто је нормална кривина једнака 0 следи да је $K(v)=|K_g(v)|$. Пошто је крива $\beta_{u_0}(v)=(\operatorname{sh}u_0\cos v, \operatorname{sh}u_0\sin v, v)=(a\cos v, a\sin v, bv)$, где је $a=\operatorname{sh}u_0>0$, $b=1$, заправо кружни хеликс (10. задатак из области Криве), а његова кривина је $K(v)=\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{\operatorname{sh}u_0}{\operatorname{sh}^2u_0+1}$, следи да је добијен очекиван резултат.

9. (а) Доказати да се тангентна раван површи дуж асимптотске линије на површи поклапа с оскулаторном равни криве.

(б) Доказати да се тангентна раван површи дуж геодезијске линије на површи поклапа с ректификационом равни криве.

(а) Крива $\alpha(t)=r(u(t),v(t))$ на површи $r: U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан, јесте асимптотска линија на тој површи ако је $K_n(t)=0$ за свако t, тј. ако је њена нормална кривина једнака нули у свакој тачки те криве. То значи да важи $T'(t)=V(t)K_g(t)S(t)$, за свако t. Како важи и $T'(t)=V(t)K(t)N(t)$, следи да је $N(t)=\pm S(t)=\pm n(u(t),v(t))\times T(t)$.

Према томе, $B(t)=T(t)\times N(t)=T(t)\times(\pm n(u(t),v(t))\times T(t))=\pm(\langle T(t),T(t)\rangle n(u(t),v(t))-\underbrace{\langle T(t), n(u(t),v(t))\rangle}_{=0}T(t))$

$=\pm n(u(t),v(t))$, па тангентна раван површ r у тачки $\alpha(t_0)=r(u(t_0),v(t_0))$ има вектор нормале $n(u(t_0),v(t_0))$ који је истог правца као вектор нормале $B(t_0)$ оскулаторне равни криве α у истој тачки, а пошто обе равни садрже тачку $\alpha(t_0)$, следи да се поменуте две равни поклапају.

(б) Крива $\alpha(t)=r(u(t),v(t))$ на површи $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, јесте геодезијска линија на тој површи ако је $k_g(t)=0$ за свако t, тј. ако је њена геодезијска кривина у свакој те криве једнака нули. Тада је $T'(t)=V(t)k_n(t)n(u(t),v(t))$, а пошто је и $T'(t)=V(t)k(t)N(t)$, следи да је $n(u(t),v(t))=\pm N(t)$ (ово је кључно за разумевање шта представљају геодезијске линије), па тангентна раван површи r у тачки $\alpha(t_0)$ има вектор нормале $n(u(t),v(t))$ који је истог правца као и вектор нормале $N(t_0)$ ректификационе равни криве α у тој тачки. Како обе равни садрже тачку $\alpha(t_0)$, следи да се оне поклапају.

10. Нека је $\alpha=\alpha(s)$, $s\in I$, природно параметризована крива чија је кривина $k\neq 0$ и торзија $\tau\neq 0$. Дефинишимо линијску површ параметризацијом $r(s,v)=\alpha(s)+vB(s)$, $s\in I$, $v\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, при чему је $B=B(s)$ бинормално векторско поље криве α.

(а) Израчунати геодезијску и нормалну кривину координатних линија дате површи.

(б) Одредити тип свих тачака на површи.

(а) Координатне линије ове површи су $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)=\alpha(u)+v_0B(u)$ (обратити пажњу: то што је α природно параметризована, не значи да су криве α_{v_0} природно параметризоване), као и криве $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)=\alpha(u_0)+vB(u_0)$. Израчунајмо њихове нормалне и геодезијске кривине.

$\alpha_{v_0}'(u)=\alpha'(u)+v_0B'(u)=T(u)-v_0\tau(u)N(u)$ (крива α јесте природно параметризована, па из Френе-Серреових формула добијамо $B'(u)=-\tau(u)N(u)$)

$$\|\alpha_{v_0}'(u)\|^2=\langle\alpha_{v_0}'(u),\alpha_{v_0}'(u)\rangle=\langle T(u)-v_0\tau(u)N(u),T(u)-v_0\tau(u)N(u)\rangle=1+v_0^2\tau(u)^2\Rightarrow V_{\alpha_{v_0}}(u)=\|\alpha_{v_0}'(u)\|=\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}.$$

$$T_{\alpha_{v_0}}(u)=\frac{\alpha_{v_0}'(u)}{\|\alpha_{v_0}'(u)\|}=\frac{T(u)-v_0\tau(u)N(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}T(u)-\frac{v_0\tau(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}N(u)$$

$$T_{\alpha_{v_0}}'(u)=-\frac{1}{1+v_0^2\tau(u)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\cdot 2v_0^2\tau(u)\tau'(u)\cdot T(u)+\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}T'(u)-\frac{v_0\tau'(u)\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}-v_0\tau(u)\cdot\frac{2v_0^2\tau(u)\tau'(u)}{2\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}}{1+v_0^2\tau(u)^2}N(u)-$$
$$-\frac{v_0\tau(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}N'(u)=-\frac{v_0^2\tau(u)\tau'(u)}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^{\frac{3}{2}}}T(u)+\frac{k(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}N(u)-\frac{v_0\tau'(u)(1+\cancel{v_0^2\tau(u)^2})-\cancel{v_0^3\tau(u)^2\tau'(u)}}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^{\frac{3}{2}}}N(u)-$$
$$-\frac{v_0\tau(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\left(-k(u)T(u)+\tau(u)B(u)\right)=\left(-\frac{v_0^2\tau(u)\tau'(u)}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{v_0\tau(u)k(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\right)T(u)+\left(\frac{k(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}-\frac{v_0\tau'(u)}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)N(u)-$$
$$-\frac{v_0\tau(u)^2}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}B(u)$$

$r(u,v)=\alpha(u)+vB(u)$

$r_u(u,v)=\alpha'(u)+vB'(u)=T(u)-v\tau(u)N(u)$ (α је природно параметризована, па је $B'(u)=-\tau(u)N(u)$)

$r_v(u,v)=B(u)$

$$r_u(u,v)\times r_v(u,v)=(T(u)-v\tau(u)N(u))\times B(u)=T(u)\times B(u)-v\tau(u)N(u)\times B(u)=-N(u)-v\tau(u)T(u)$$

$$\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2=\langle r_u(u,v)\times r_v(u,v),r_u(u,v)\times r_v(u,v)\rangle=\langle -v\tau(u)T(u)-N(u),-v\tau(u)T(u)-N(u)\rangle=$$
$$=v^2\tau(u)^2+1\Rightarrow\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|=\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}$$

$$\Rightarrow n(u,v)=\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}=\frac{-v\tau(u)T(u)-N(u)}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}=-\frac{v\tau(u)}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}T(u)-\frac{1}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}N(u)$$

За рачунање нормалне и геодезијске кривине координатне линије α_{v_0}, потребно је посматрати јединично нормално векторско поље $n(u,v)$ површи $r(u,v)$ дуж те криве, тј. $n(u,v_0)$.

$$\langle T'_{\alpha_{v_0}}(u), n(u,v_0)\rangle = \left(-\frac{v_0^2\tau(u)\tau'(u)}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{v_0\tau(u)\kappa(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\right)\cdot\left(-\frac{v_0\tau(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\right) + \left(\frac{\kappa(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} - \frac{v_0\tau'(u)}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\right) =$$

$$= \frac{v_0^3\tau(u)^2\tau'(u)}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^2} - \frac{v_0^2\tau(u)^2\kappa(u)}{1+v_0^2\tau(u)^2} - \frac{\kappa(u)}{1+v_0^2\tau(u)^2} + \frac{v_0\tau'(u)}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^2} = \frac{v_0\tau'(u)\,\cancel{(v_0^2\tau(u)^2+1)}}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^2} -$$

$$- \frac{\kappa(u)\,\cancel{(v_0^2\tau(u)^2+1)}}{\cancel{1+v_0^2\tau(u)^2}} = \frac{v_0\tau'(u)}{1+v_0^2\tau(u)^2} - \kappa(u)$$

$$\Rightarrow K_{n_{\alpha_{v_0}}}(u) = \frac{\langle T'_{\alpha_{v_0}}(u), n(u,v_0)\rangle}{\|V_{\alpha_{v_0}}(u)\|} = \frac{\frac{v_0\tau'(u)}{1+v_0^2\tau(u)^2} - \kappa(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} = \frac{v_0\tau'(u)}{(1+v_0^2\tau(u)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\kappa(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}$$

$$[n(u,v_0), T_{\alpha_{v_0}}(u), T'_{\alpha_{v_0}}(u)] = \begin{vmatrix} -\frac{v_0\tau(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} & -\frac{v_0\tau(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} & 0 \\ \_\_\_ & \_\_\_ & -\frac{v_0\tau(u)^2}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} \end{vmatrix} = -\frac{v_0\tau(u)^2}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\cdot\begin{vmatrix} -\frac{v_0\tau(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} & -\frac{v_0\tau(u)}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} \end{vmatrix} =$$

небитни су, ради се развој по трећој колони и множе се нулама

$$= -\frac{v_0\tau(u)^2}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\cdot\left(\frac{v_0^2\tau(u)^2}{1+v_0^2\tau(u)^2} + \frac{1}{1+v_0^2\tau(u)^2}\right) = -\frac{v_0\tau(u)^2}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}\cdot\frac{\cancel{v_0^2\tau(u)^2+1}}{\cancel{1+v_0^2\tau(u)^2}} = -\frac{v_0\tau(u)^2}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}$$

$$\Rightarrow K_{g_{\alpha_{v_0}}}(u) = \frac{[n(u,v_0), T_{\alpha_{v_0}}(u), T'_{\alpha_{v_0}}(u)]}{V_{\alpha_{v_0}}(u)} = \frac{-\frac{v_0\tau(u)^2}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}}}{\sqrt{1+v_0^2\tau(u)^2}} = -\frac{v_0\tau(u)^2}{1+v_0^2\tau(u)^2}$$

$\beta_{u_0}(v) = \alpha(u_0) + v\,B(u_0)$

$\beta'_{u_0}(v) = B(u_0) \Rightarrow \|\beta'_{u_0}(v)\| = 1$, тј. крива β_{u_0} је природно параметризована, тј. $T_{\beta_{u_0}}(v) = \beta'_{u_0}(v)$

$T_{\beta_{u_0}}(v) = B(u_0)$

$T'_{\beta_{u_0}}(v) = \vec{0} \Rightarrow K_{n_{\beta_{u_0}}}(v) = 0$ и $K_{g_{\beta_{u_0}}}(v) = 0$ (јер је крива β_{u_0} део праве)

Као што постоји прва фундаментална форма, постоји и друга фундаментална форма. Она је дефинисана у свакој тачки $p = r(u_0,v_0)$ површи r и делује на тангентни простор $T_p r$ површи r у тачки p. Ако су $V = a\cdot r_u(u_0,v_0) + b\cdot r_v(u_0,v_0)$ и $W = c\cdot r_u(u_0,v_0) + d\cdot r_v(u_0,v_0)$ тангентни вектори површи r у тачки p, онда је $\mathrm{II}(V,W) = (a\ \ b)\begin{pmatrix} e(u_0,v_0) & f(u_0,v_0) \\ f(u_0,v_0) & g(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}$, где су $e(u_0,v_0) \overset{\text{деф}}{=} \langle r_{uu}(u_0,v_0), n(u_0,v_0)\rangle$, $f(u_0,v_0) \overset{\text{деф}}{=} \langle r_{uv}(u_0,v_0), n(u_0,v_0)\rangle$ и $g(u_0,v_0) \overset{\text{деф}}{=} \langle r_{vv}(u_0,v_0), n(u_0,v_0)\rangle$ коефицијенти друге фундаменталне форме. Показује се да се нормална кривина криве $\alpha(t) = r(u(t),v(t))$ на површи r може рачунати по обрасцу $K_n(t) = \frac{\mathrm{II}(\alpha'(t),\alpha'(t))}{\mathrm{I}(\alpha'(t),\alpha'(t))}$. Такође, геодезијска кривина криве α може се рачунати по обрасцу $K_g(t) = \frac{[n(u(t),v(t)), \alpha'(t), \alpha''(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3}$.

За произвољну тачку $p = r(u_0,v_0)$ на површи $r: U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, има смисла говорити о нормалној кривини саме површи r у правцу тангентног вектора $V\in T_p r$, јер све криве $\alpha(t) = r(u(t),v(t))$ такве да је $\alpha(t_0) = p = r(u_0,v_0)$ и $\alpha'(t_0) = V\in T_p r$ имају у тој тачки нормалну кривину $K_n(t_0) = \frac{\mathrm{II}(\alpha'(t_0),\alpha'(t_0))}{\mathrm{I}(\alpha'(t_0),\alpha'(t_0))} = \frac{\mathrm{II}(V,V)}{\mathrm{I}(V,V)}$. Према томе, $K_n(V) = \frac{\mathrm{II}(V,V)}{\mathrm{I}(V,V)}$ зове се нормална кривина површи r у тачки p у правцу тангентног вектора $V\in T_p r$. Лако се види да је $K_n(\lambda V) = \frac{\mathrm{II}(\lambda V,\lambda V)}{\mathrm{I}(\lambda V,\lambda V)} = \frac{\lambda^2\mathrm{II}(V,V)}{\lambda^2\mathrm{I}(V,V)} = \frac{\mathrm{II}(V,V)}{\mathrm{I}(V,V)} = K_n(V)$, тј. да нормална кривина не зависи од смера и интензитета тангентног вектора V, већ само од његовог правца, па можемо без умањења општости претпоставити да је V јединични вектор. Пошто сви јединички тангентни вектори површи r у тачки p чине компактан подскуп од $T_p r$, следи да функција k_n достиже најмању и највећу вредност, $k_1(p)$ и $k_2(p)$. Ове вредности се називају главним кривинама површи r у тачки p, а вектори V_1 и V_2 у којима се достижу ове екстремне вредности називају се главним векторима (тачније, главним правцима, пошто нормална кривина зависи само од правца тангентног вектора). Главне кривине $k_1(p)$ и $k_2(p)$ у тачки $p=r(u_0,v_0)$ јесу решења ~~квадратне~~ једначине $(EG-F^2)k^2-(eG+Eg-2fF)k+eg-f^2=0$ (сваки од коефицијената E,F,G,e,f,g узет је у тачки (u_0,v_0)), а главни вектори $V=a r_u(u_0,v_0)+b r_v(u_0,v_0)$ из једначине $\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ e & f & g \\ E & F & G \end{vmatrix}=0$. Бројеви $K(p)=k_1(p)k_2(p)=\dfrac{e(u_0,v_0)g(u_0,v_0)-f(u_0,v_0)^2}{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)-F(u_0,v_0)^2}$ и $H(p)=\dfrac{k_1(p)+k_2(p)}{2}=$

$=\dfrac{e(u_0,v_0)G(u_0,v_0)+E(u_0,v_0)g(u_0,v_0)-2f(u_0,v_0)F(u_0,v_0)}{2(E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)-F(u_0,v_0)^2)}$ зову се редом Гаусова и средња кривина површи r у тачки p. Тачка p је <u>елиптичка</u> ако је $K(p)>0$, <u>хиперболичка</u> ако је $K(p)<0$, <u>параболичка</u> ако је $K(p)=0$ и бар једна од главних кривина $k_1(p), k_2(p)$ различита од нуле, а <u>планарна</u> ако је $k_1(p)=k_2(p)=0$. Тачка p је <u>умбиличка</u> ако је $k_1(p)=k_2(p)$.

(б) Израчунајмо коефицијенте прве и друге фундаменталне форме.

$E(u,v)=\langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle=\langle T(u)-v\tau(u)N(u), T(u)-v\tau(u)N(u)\rangle=1+v^2\tau(u)^2$

$F(u,v)=\langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle=\langle T(u)-v\tau(u)N(u), B(u)\rangle=0$

$G(u,v)=\langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle=\langle B(u), B(u)\rangle=1$

$r_{uu}(u,v)=T'(u)-v\tau'(u)N(u)-v\tau(u)N'(u)=k(u)N(u)-v\tau'(u)N(u)-v\tau(u)(-k(u)T(u)+\tau(u)B(u))=$

$=v\tau(u)k(u)T(u)+(k(u)-v\tau'(u))N(u)-v\tau(u)^2B(u)$

$r_{uv}(u,v)=-\tau(u)N(u)$ $\qquad n(u,v)=-\dfrac{v\tau(u)}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}T(u)-\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}N(u)$

$r_{vv}(u,v)=\vec{0}$

$e(u,v)=\langle r_{uu}(u,v), n(u,v)\rangle=v\tau(u)k(u)\cdot\left(-\dfrac{v\tau(u)}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}\right)+(k(u)-v\tau'(u))\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}\right)$

$f(u,v)=\langle r_{uv}(u,v), n(u,v)\rangle=-\tau(u)\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}\right)=\dfrac{\tau(u)}{\sqrt{1+v^2\tau(u)^2}}$

$g(u,v)=\langle r_{vv}, n(u,v)\rangle=0$

$\Rightarrow K(u,v)=\dfrac{e(u,v)g(u,v)-f(u,v)^2}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}=\dfrac{-f(u,v)^2}{(1+v^2\tau(u)^2)\cdot 1-0^2}=-\dfrac{\frac{\tau(u)^2}{1+v^2\tau(u)^2}}{1+v^2\tau(u)^2}=-\dfrac{\tau(u)^2}{(1+v^2\tau(u)^2)^2}<0$ (јер је $\tau(u)\neq 0$)

Према томе, све тачке ове површи су хиперболичке. Ниједна тачка није умбиличка, јер би иначе било $K(u,v)=k_1(u,v)\cdot k_2(u,v)=k_1(u,v)^2\geq 0$.

11. Дата је параметризована крива $\gamma(t)=(\sin t-t\cos t, \cos t+t\sin t, t^2)$, $t\in\mathbb{R}$, чији траг припада кружном параболоиду $z=x^2+y^2-1$.

(а) Израчунати геодезијску и нормалну кривину криве γ на датом параболоиду.

(б) Израчунати коефицијенте друге фундаменталне форме две параметризације параболоида (као график функције и као ротациона површ) и упоредити их у одговарајућим тачкама површи користећи координатну трансформацију између тих параметризација.

(в) Израчунати главне, Гаусову и средњу кривину датог параболоида у тачкама $(0,0,-1)$ и $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

(г) Нека је $\mathcal{D}(r)$ површина дела параболоида где је $x^2+y^2<r^2$, а $\widetilde{\mathcal{D}}(r)$ површина слике тог дела параболоида сфери $\mathbb{S}^2$ при Гаусовом пресликавању. Доказати да је $\lim\limits_{r\to 0+}\frac{\widetilde{\mathcal{D}}(r)}{\mathcal{D}(r)}$ једнак Гаусовој кривини параболоида у тачки $(0,0,-1)$.

Пошто је за рачунање нормалне и геодезијске кривине криве γ потребно имати јединично нормално векторско поље параболоида дуж те криве, као и коефицијенти друге фундаменталне форме дуж те криве, урадићемо прво део под (б).

(б) $r^1(x,y)=(x,y,x^2+y^2-1)$ параметризација као график функције (јер је $z=x^2+y^2-1$ једначина параболоида)

$r^1_x(x,y)=(1,0,2x)$

$r^1_y(x,y)=(0,1,2y)$

$$r^1_x(x,y)\times r^1_y(x,y)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2x\\0&1&2y\end{vmatrix}=(-2x,-2y,1)$$

$$\|r^1_x(x,y)\times r^1_y(x,y)\|^2=4x^2+4y^2+1\Rightarrow\|r^1_x(x,y)\times r^1_y(x,y)\|=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$n^1(x,y)=\frac{r^1_x(x,y)\times r^1_y(x,y)}{\|r^1_x(x,y)\times r^1_y(x,y)\|}=\frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}=\left(-\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},-\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right)$$

$$r^1_{xx}(x,y)=(0,0,2)\Rightarrow e^1(x,y)=\langle r^1_{xx}(x,y),n^1(x,y)\rangle=\frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

$$r^2_{xy}(x,y)=(0,0,0)\Rightarrow f^1(x,y)=\langle r^1_{xy}(x,y),n^1(x,y)\rangle=0$$

$$r^2_{yy}(x,y)=(0,0,2)\Rightarrow g^1(x,y)=\langle r^1_{yy}(x,y),n^1(x,y)\rangle=\frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

Пресек параболоида и равни $y=0$ (равни Oxz) је крива $z=x^2-1$, $y=0$, што је парабола, чији се део у полуравни $x>0$ параметризује са $\alpha(u)=(u,0,u^2-1)$, $u\in(0,+\infty)$. Ротацијом произвољне тачке те параболе око z-осе за угао $v\in(0,2\pi)$ добија се тачка $\begin{pmatrix}\cos v&-\sin v&0\\\sin v&\cos v&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\0\\u^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\cos v\\u\sin v\\u^2-1\end{pmatrix}$, те добијамо параметризацију $r^2(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u^2-1)$ дела параболоида $z=x^2+y^2-1$ (тачније, параболоида без дела параболе $z=x^2-1$, $y=0$, $x\geq 0$) као ротационе површи. Пошто је $(u\cos v)^2+(u\sin v)^2=u^2\cos^2v+u^2\sin^2v=u^2=(u^2-1)+1$, следи да ово заиста јесте параметризација параболоида $x^2+y^2=z+1$.

$r^2_u(u,v)=(\cos v,\sin v,2u)$

$r^2_v(u,v)=(-u\sin v,u\cos v,0)$

$$r^2_u(u,v)\times r^2_v(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\cos v&\sin v&2u\\-u\sin v&u\cos v&0\end{vmatrix}=(-2u^2\cos v,-2u^2\sin v,u\cos^2v+u\sin^2v)=(-2u^2\cos v,-2u^2\sin v,u)$$

$$\|r^2_u(u,v)\times r^2_v(u,v)\|^2=4u^4\cos^2v+4u^4\sin^2v+u^2=4u^4+u^2=u^2(4u^2+1)\Rightarrow\|r^2_u(u,v)\times r^2_v(u,v)\|=u\sqrt{1+4u^2}$$

$$n^2(u,v)=\frac{r^2_u(u,v)\times r^2_v(u,v)}{\|r^2_u(u,v)\times r^2_v(u,v)\|}=\frac{(-2u^2\cos v,-2u^2\sin v,u)}{u\sqrt{1+4u^2}}=\left(-\frac{2u\cos v}{\sqrt{1+4u^2}},-\frac{2u\sin v}{\sqrt{1+4u^2}},\frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}\right)$$

$$r^2_{uu}(u,v)=(0,0,2)\Rightarrow e^2(u,v)=\langle r^2_{uu}(u,v),n^2(u,v)\rangle=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}$$

$$r^2_{uv}(u,v)=(-\sin v,\cos v,0)\Rightarrow f^2(u,v)=\frac{2u\cos v\sin v}{\sqrt{1+4u^2}}-\frac{2u\sin v\cos v}{\sqrt{1+4u^2}}+0=0$$

$$r^2_{vv}(u,v)=(-u\cos v,-u\sin v,0)\Rightarrow g^2(u,v)=\frac{2u^2\cos^2v}{\sqrt{1+4u^2}}+\frac{2u^2\sin^2v}{\sqrt{1+4u^2}}+0=\frac{2u^2}{\sqrt{1+4u^2}}$$

Да би се могли упоредити коефицијенти e^1, f^1, g^1 с коефицијентима e^2, f^2, g^2, неопходно је да буду изражени у функцији истих параметара (било то параметри (x,y) или параметри (u,v)), па је неопходно пронаћи трансформацију координата $(x,y) \xrightarrow{\Phi} (u,v)$. Приметимо најпре да трагови површи r^1 и r^2 нису исти (траг површи $r^1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ је цео параболоид $z=x^2+y^2-1$, а траг површи $r^2:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ је тај параболоид без дела параболе $z=x^2-1,\ y=0$ у полуравни $x\geq 0$ равни Oxz), па је из домена пресликавања r^1 потребно избацити скуп $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0 \text{ и } y=0\}$. Тада између скупова $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ и $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0, y=0\}$ постоји дифеоморфизам Φ, дефинисан као $\Phi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0, y=0\}$, $\Phi(u,v)=(u\cos v, u\sin v)$ (прелазак из поларних координата (u,v) у Декартове координате (x,y)). То пресликавање је бијекција, диференцијабилно је и његов јакобијан $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\cos^2 v+u\sin^2 v=u>0$ јесте различит од нуле, па је и инверзно пресликавање Φ^{-1} диференцијабилно. Репараметризације коефицијената e^1, f^1, g^1 у поларним координатама (u,v) су

$$\tilde{e}^1(u,v)=e^1(u\cos v,u\sin v)=\frac{2}{\sqrt{1+4(u\cos v)^2+4(u\sin v)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2\cos^2 v+4u^2\cos^2 v}}=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}=e^2(u,v)$$

$$\tilde{f}^1(u,v)=f^1(u\cos v,u\sin v)=0$$

$$\tilde{g}^1(u,v)=g^1(u\cos v,u\sin v)=\frac{2}{\sqrt{1+4(u\cos v)^2+4(u\sin v)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}\neq\frac{2u^2}{\sqrt{1+4u^2}}=g^2(u,v)$$

Дакле, коефицијенти e^1 и e^2 су исти, као и f^1 и f^2, а коефицијенти g^1 и g^2 нису.

(а) $\gamma(t)=(\sin t-t\cos t,\ \cos t+t\sin t,\ t^2)$

$(\sin t-t\cos t)^2+(\cos t+t\sin t)^2=\sin^2 t\cancel{-2t\sin t\cos t}+t^2\cos^2 t+\cos^2 t\cancel{+2t\cos t\sin t}+t^2\sin^2 t=1+t^2\Rightarrow x^2+y^2=1+z$,

односно траг криве γ припада параболоиду $x^2+y^2=z+1$

$\gamma(t)=r^1(x(t),y(t))\Rightarrow x(t)=\sin t-t\cos t,\ y(t)=\cos t+t\sin t$

$\gamma'(t)=r^1_x(x(t),y(t))\cdot x'(t)+r^1_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$ $\quad x'(t)=\cancel{\cos t}-\cancel{\cos t}-t\cdot(-\sin t)=t\sin t$

$\quad y'(t)=\cancel{-\sin t}+\cancel{\sin t}+t\cos t=t\cos t$

$\gamma'(t)=(1,0,2x(t))\cdot t\sin t+(0,1,2y(t))\cdot t\cos t=$

$=(t\sin t,\ t\cos t,\ 2t\sin t(\sin t\cancel{-t\cos t})+2t\cos t(\cos t\cancel{+t\sin t}))=(t\sin t,\ t\cos t,\ 2t)$

$\mathrm{I}(\gamma'(t),\gamma'(t))=\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle=t^2\sin^2 t+t^2\cos^2 t+4t^2=t^2+4t^2=5t^2$

$$e^1(x(t),y(t))=g^1(x(t),y(t))=\frac{2}{\sqrt{1+4x(t)^2+4y(t)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4(x(t)^2+y(t)^2)}}=\frac{2}{\sqrt{1+4(1+t^2)}}=\frac{2}{\sqrt{5+4t^2}}$$

$f^1(x(t),y(t))=0$

$$\mathrm{II}(\gamma'(t),\gamma'(t))=(x'(t)\ \ y'(t))\begin{pmatrix}e^1(x(t),y(t)) & f^1(x(t),y(t))\\ f^1(x(t),y(t)) & g^1(x(t),y(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=(t\sin t\ \ t\cos t)\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5+4t^2}} & 0\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5+4t^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\sin t\\ t\cos t\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{2t\sin t}{\sqrt{5+4t^2}}\ \ \frac{2t\cos t}{\sqrt{5+4t^2}}\right)\begin{pmatrix}t\sin t\\ t\cos t\end{pmatrix}=\frac{2t^2\sin^2 t}{\sqrt{5+4t^2}}+\frac{2t^2\cos^2 t}{\sqrt{5+4t^2}}=\frac{2t^2}{\sqrt{5+4t^2}}$$

$$\Rightarrow K_{n_\gamma}(t)=\frac{\mathrm{II}(\gamma'(t),\gamma'(t))}{\mathrm{I}(\gamma'(t),\gamma'(t))}=\frac{\frac{2t^2}{\sqrt{5+4t^2}}}{5t^2}=\frac{2}{5\sqrt{5+4t^2}},\ t\neq 0$$ (јер је $\|\gamma'(0)\|^2=\mathrm{I}(\gamma'(0),\gamma'(0))=5\cdot 0^2=0$,

тј. крива γ није регуларна у тачки $t=0$).

$\gamma''(t)=(\sin t+t\cos t,\cos t-t\sin t,2)$

$$n^1(x(t),y(t))=\left(-\frac{2x(t)}{\sqrt{1+4x(t)^2+4y(t)^2}},-\frac{2y(t)}{\sqrt{1+4x(t)^2+4y(t)^2}},\frac{1}{\sqrt{1+4x(t)^2+4y(t)^2}}\right)=\left(-\frac{2(\sin t-t\cos t)}{\sqrt{5+4t^2}},-\frac{2(\cos t+t\sin t)}{\sqrt{5+4t^2}},\frac{1}{\sqrt{5+4t^2}}\right)$$

$$K_{g\gamma}(t)=\frac{[n^1(x(t),y(t)),\gamma'(t),\gamma''(t)]}{\|\gamma'(t)\|^3};\quad \|\gamma'(t)\|^2=I(\gamma'(t),\gamma'(t))=5t^2\Rightarrow\|\gamma'(t)\|=\sqrt{5t^2}=\sqrt5|t|$$

$$[n^1(x(t),y(t)),\gamma'(t),\gamma''(t)]=\begin{vmatrix}-\frac{2(\sin t-t\cos t)}{\sqrt{5+4t^2}} & -\frac{2(\cos t+t\sin t)}{\sqrt{5+4t^2}} & \frac{1}{\sqrt{5+4t^2}}\\ t\sin t & t\cos t & 2t\\ \sin t+t\cos t & \cos t-t\sin t & 2\end{vmatrix}=-\frac{4t\cos t(\sin t-t\cos t)}{\sqrt{5+4t^2}}-\frac{4t(\sin t+t\cos t)(\cos t+t\sin t)}{\sqrt{5+4t^2}}+$$

$$+\frac{t\sin t(\cos t-t\sin t)}{\sqrt{5+4t^2}}-\frac{t\cos t(\sin t+t\cos t)}{\sqrt{5+4t^2}}+\frac{4t(\cos t-t\sin t)(\sin t-t\cos t)}{\sqrt{5+4t^2}}+\frac{4t\sin t(\cos t+t\sin t)}{\sqrt{5+4t^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5+4t^2}}\Big(\cancel{-4t\cos t\sin t}+\cancel{4t^2\cos^2 t}\cancel{-4t\sin t\cos t}\cancel{-4t^2\sin^2 t}-4t^2\cos^2 t\cancel{-4t^3\cos t\sin t}+\cancel{t\sin t\cos t}-t^2\sin^2 t\cancel{-t\cos t\sin t}-$$
$$-t^2\cos^2 t+\cancel{4t\cos t\sin t}\cancel{-4t^2\cos^2 t}-4t^2\sin^2 t+\cancel{4t^3\sin t\cos t}+\cancel{4t\sin t\cos t}+\cancel{4t^2\sin^2 t}\Big)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5+4t^2}}(-4t^2-t^2)=\frac{-5t^2}{\sqrt{5+4t^2}}$$

$$\Rightarrow K_{g\gamma}(t)=\frac{\frac{-5t^2}{\sqrt{5+4t^2}}}{(\sqrt5|t|)^3}=\frac{-5t^2}{5\sqrt5 t^2|t|\sqrt{5+4t^2}}=-\frac{1}{\sqrt5|t|\sqrt{5+4t^2}}$$

(в) Тачка $(0,0,-1)$ не може се добити у параметризацији $r^2:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $r^2(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u^2-1)$, јер се добија $u=0$, што не припада домену. Стога посматрајмо параметризацију $r^1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $r^1(x,y)=(x,y,x^2+y^2-1)$, где се тачка $(0,0,-1)$ добија за $(x,y)=(0,0)$. Да бисмо добили главне кривине, потребни су нам коефицијенти $E^1(0,0)$, $F^1(0,0)$, $G^1(0,0)$ прве основне форме у тачки $(0,0,-1)$, као и коефицијенти $e^1(0,0)$, $f^1(0,0)$, $g^1(0,0)$ друге основне форме у тој тачки.

$E^1(x,y)=\langle r^1_x(x,y),r^1_x(x,y)\rangle=1+4x^2\Rightarrow E^1(0,0)=1$

$F^1(x,y)=\langle r^1_x(x,y),r^1_y(x,y)\rangle=4xy\Rightarrow F^1(0,0)=0$

$G^1(x,y)=\langle r^1_y(x,y),r^1_y(x,y)\rangle=1+4y^2\Rightarrow G^1(0,0)=1$

$e^1(0,0)=g^1(0,0)=\frac{2}{\sqrt{1+4\cdot0^2+4\cdot0^2}}=\frac{2}{\sqrt1}=2$

$f^1(0,0)=0$

Квадратна једначина за добијање главних кривина је $(E^1(0,0)G^1(0,0)-F^1(0,0)^2)k^2-(e^1(0,0)G^1(0,0)+E^1(0,0)g^1(0,0)-2f^1(0,0)F^1(0,0))k+(e^1(0,0)g^1(0,0)-f^1(0,0)^2)=0$, тј. $(1\cdot1-0^2)k^2-(2\cdot1+1\cdot2-2\cdot0\cdot0)k+(2\cdot2-0^2)=0$. Дакле, $k^2-4k+4=0$, па је $(k-2)^2=0$ тј. $k_1(0,0)=k_2(0,0)=2$ (главне кривине су једнаке). То значи да је тачка $(0,0,-1)=r^1(0,0)$ умбиличка тачка. Гаусова кривина је $K(0,0)=k_1(0,0)\cdot k_2(0,0)=2\cdot2=4$, а средња кривина је $H(0,0)=\frac{k_1(0,0)+k_2(0,0)}{2}=\frac{2+2}{2}=2$.

Тачка $(\frac12,\frac12,-\frac12)$ добија се за $x=\frac12$, $y=\frac12$ $\left(x^2+y^2=\frac14+\frac14=\frac12=-\frac12+1\right)$, тј. $(\frac12,\frac12,-\frac12)=r^1(\frac12,\frac12)$.

$E^1(\frac12,\frac12)=1+4\cdot\frac14=2$, $F^1(\frac12,\frac12)=4\cdot\frac12\cdot\frac12=1$, $G^1(\frac12,\frac12)=1+4\cdot\frac14=2$

$e^1(\frac12,\frac12)=g^1(\frac12,\frac12)=\frac{2}{\sqrt{1+4\cdot\frac14+4\cdot\frac14}}=\frac{2}{\sqrt3}$, $f^1(\frac12,\frac12)=0$

$(2\cdot2-1^2)k^2-\left(\frac{2}{\sqrt3}\cdot2+2\cdot\frac{2}{\sqrt3}-2\cdot0\cdot1\right)k+\left(\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{2}{\sqrt3}-0^2\right)=0$, тј. $3k^2-\frac{8}{\sqrt3}k+\frac43=0$

$$k_{1,2}\left(\tfrac12,\tfrac12\right)=\frac{\frac{8}{\sqrt3}\pm\sqrt{\frac{64}{3}-4\cdot3\cdot\frac43}}{2\cdot3}=\frac{\frac{8}{\sqrt3}\pm\sqrt{\frac{64-48}{3}}}{6}=\frac{\frac{8}{\sqrt3}\pm\sqrt{\frac{16}{3}}}{6}=\frac{\frac{8}{\sqrt3}\pm\frac{4}{\sqrt3}}{6}$$

$$k_1\left(\tfrac12,\tfrac12\right)=\frac{\frac{8}{\sqrt3}+\frac{4}{\sqrt3}}{6}=\frac{\cancel{12}^{\,2}}{\cancel{6}\sqrt3}=\frac{2}{\sqrt3},\quad k_2\left(\tfrac12,\tfrac12\right)=\frac{\frac{8}{\sqrt3}-\frac{4}{\sqrt3}}{6}=\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}^{\,3}\sqrt3}=\frac{2}{3\sqrt3}$$

Главне кривине у тачки $\left(\frac12,\frac12,-\frac12\right)=r^1\left(\frac12,\frac12\right)$ су $k_1\left(\frac12,\frac12\right)=\frac{2}{\sqrt3}$ и $k_2\left(\frac12,\frac12\right)=\frac{2}{3\sqrt3}$, па следи да је Гаусова кривина $K\left(\frac12,\frac12\right)=\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{2}{3\sqrt3}=\frac49$, а средња кривина $H\left(\frac12,\frac12\right)=\frac{\frac{2}{\sqrt3}+\frac{2}{3\sqrt3}}{2}=\frac{3+1}{3\sqrt3}=\frac{4}{3\sqrt3}$.

(в) Површина дела параболоида одређеног са $U_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<r^2\}$ једнака је

$$P(r)=\iint_{U_r}\sqrt{E^1G^1-(F^1)^2}\,dxdy=\iint_{U_r}\sqrt{(1+4x^2)(1+4y^2)-(4xy)^2}\,dxdy=\iint_{U_r}\sqrt{1+4x^2+4y^2+\cancel{16x^2y^2}-\cancel{16x^2y^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint_{U_r}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\left\{\begin{matrix}x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta\\ \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho\end{matrix}\right\}=\int_0^r\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4(\rho\cos\theta)^2+4(\rho\sin\theta)^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^r\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^r\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^r\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho\overbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}^{=2\pi}=\left\{\begin{matrix}1+4\rho^2=u\\ 8\rho\,d\rho=du\end{matrix}\right\}=$$

$$=2\pi\cdot\int_1^{1+4r^2}\sqrt{u}\cdot\frac{du}{8}=\frac{\pi}{4}\int_1^{1+4r^2}u^{\frac12}\,du=\frac{\pi}{\cancel{2}4}\cdot\frac{u^{\frac32}}{\frac{3}{\cancel{2}}}\Bigg|_1^{1+4r^2}=\frac{\pi}{6}\left((1+4r^2)^{\frac32}-1\right)$$

Гаусово пресликавање јесте пресликавање које слика тачку $r(u,v)$ са површи r у тачку на јединичној сфери S^2 која представља врх јединичног нормалног вектора $n(u,v)$ у тој тачки, када се одабере онај представник тог вектора чија је почетна тачка координатни почетак $(0,0,0)$. Према томе, Гаусово пресликавање површи $r: U\to\mathbb{R}^3$ јесте пресликавање $\Gamma: r(U)\to S^2$, $\Gamma=n\circ r^{-1}$ ($r^{-1}(p)=(u,v)$ такви да је $r(u,v)=p$, а $\Gamma(p)=n(u,v)=n(r^{-1}(p))$). Према томе, део сфере S^2 добијен Гаусовим пресликавањем дела параболоида где је $x^2+y^2<r^2$ јесте скуп $n^1(U_r)$, где је n^1 јединично нормално векторско поље параболоида параметризованог са $r^1(x,y)=(x,y,x^2+y^2-1)$. Према томе, $n^1(x,y)=\left(-\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},-\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right)$, $(x,y)\in U_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<r^2\}$ представља параметризацију траженог дела сфере, насталог Гаусовим пресликавањем дела параболоида $r^1(U_r)$.

$$n^1_x(x,y)=\left(-\frac{2\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}-2x\cdot\frac{4\cdot2x}{2\sqrt{1+4x^2+4y^2}}}{1+4x^2+4y^2},\ -2y\cdot\left(-\frac{1}{1+4x^2+4y^2}\right)\cdot\frac{4\cdot2x}{2\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\ -\frac{1}{1+4x^2+4y^2}\cdot\frac{4\cdot2x}{2\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right)=$$

$$=\left(-\frac{2+\cancel{8x^2}+8y^2-\cancel{8x^2}}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac32}},\ \frac{8xy}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac32}},\ -\frac{4x}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac32}}\right)$$

$$n^1_y(x,y)=\left(-2x\cdot\left(-\frac{1}{1+4x^2+4y^2}\right)\cdot\frac{4\cdot2y}{2\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\ -\frac{2\sqrt{1+4x^2+4y^2}-2y\cdot\frac{4\cdot2y}{2\sqrt{1+4x^2+4y^2}}}{1+4x^2+4y^2},\ -\frac{1}{1+4x^2+4y^2}\cdot\frac{4\cdot2y}{2\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{8xy}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac32}},\ -\frac{2+8x^2+\cancel{8y^2}-\cancel{8y^2}}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac32}},\ -\frac{4y}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac32}}\right)$$

$$E^{n^1}(x,y)=\langle n^1_x(x,y),n^1_x(x,y)\rangle=\frac{(2+8y^2)^2}{(1+4x^2+4y^2)^3}+\frac{64x^2y^2}{(1+4x^2+4y^2)^3}+\frac{16x^2}{(1+4x^2+4y^2)^3}=\frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^3}\left((1+4y^2)^2+16x^2y^2+4x^2\right)$$

$$F^{n^1}(x,y)=\langle n^1_x(x,y),n^1_y(x,y)\rangle=-\frac{2(1+4y^2)\cdot 8xy}{(1+4x^2+4y^2)^3}-\frac{8xy\cdot 2(1+4x^2)}{(1+4x^2+4y^2)^3}+\frac{16xy}{(1+4x^2+4y^2)^3}=\frac{16xy}{(1+4x^2+4y^2)^3}\left(-1-4y^2\cancel{-1}-4x^2\cancel{+1}\right)$$

$$G^{n^1}(x,y)=\langle n^1_y(x,y),n^1_y(x,y)\rangle=\frac{64x^2y^2}{(1+4x^2+4y^2)^3}+\frac{(2+8x^2)^2}{(1+4x^2+4y^2)^3}+\frac{16y^2}{(1+4x^2+4y^2)^3}=\frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^3}\left(16x^2y^2+(1+4x^2)^2+4y^2\right)$$

$$E^{n^1}(x,y)G^{n^1}(x,y)-F^{n^1}(x,y)^2=\frac{16}{(1+4x^2+4y^2)^6}\left((1+4y^2)^2+16x^2y^2+4x^2\right)\left(16x^2y^2+(1+4x^2)^2+4y^2\right)-\frac{16^2x^2y^2}{(1+4x^2+4y^2)^{\cancel{6}\,4}}\cancel{(1+4x^2+4y^2)^2}$$

$$=\frac{16}{(1+4x^2+4y^2)^6}\left((1+4y^2)^2+4x^2(4y^2+1)\right)\left((1+4x^2)^2+4y^2(4x^2+1)\right)-\frac{16^2x^2y^2}{(1+4x^2+4y^2)^4}=$$

$$=\frac{16}{(1+4x^2+4y^2)^{\cancel{6}\,4}}(1+4y^2)\cancel{(1+4y^2+4x^2)}(1+4x^2)\cancel{(1+4x^2+4y^2)}-\frac{16^2x^2y^2}{(1+4x^2+4y^2)^4}$$

$$=\frac{16}{(1+4x^2+4y^2)^{\cancel{4}\,3}}\cdot\left(\cancel{1+4x^2+4y^2}+\cancel{16x^2y^2}-\cancel{16x^2y^2}\right)=\frac{16}{(1+4x^2+4y^2)^3}$$

$$\widetilde{\mathcal{D}}(r)=\iint\limits_{U_r}\frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac32}}\,dx\,dy=\left\{\begin{array}{l}x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta\\ \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho\end{array}\right\}=\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{4}{(1+4(\rho\cos\theta)^2+4(\rho\sin\theta)^2)^{\frac32}}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{4}{(1+4\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta)^{\frac32}}\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{4}{(1+4\rho^2)^{\frac32}}\rho\,d\rho\,d\theta=4\int_0^r\frac{\rho\,d\rho}{(1+4\rho^2)^{\frac32}}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{2\pi}=\left\{\begin{array}{l}1+4\rho^2=u\\ 8\rho\,d\rho=du\end{array}\right\}=$$

$$=8\pi\int_1^{1+4r^2}\frac{\frac{du}{8}}{u^{\frac32}}=\pi\int_1^{1+4r^2}u^{-\frac32}du=\pi\cdot\frac{u^{-\frac12}}{-\frac12}\Bigg|_1^{1+4r^2}=-2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+4r^2}}-1\right)=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4r^2}}\right)$$

Добијамо да је $\lim\limits_{r\to0+}\frac{\widetilde{\mathcal{D}}(r)}{\mathcal{D}(r)}=\lim\limits_{r\to0+}\frac{2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4r^2}}\right)}{\frac{\pi}{6}\left((1+4r^2)^{\frac32}-1\right)}=12\lim\limits_{r\to0+}\frac{1-(1+4r^2)^{-\frac12}}{(1+4r^2)^{\frac32}-1}=$

$$=12\lim_{r\to0+}\frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-\frac12\cdot4r^2+o(r^2))}{\cancel{1}+\frac32\cdot4r^2+o(r^2)\cancel{-1}}=12\lim_{r\to0+}\frac{2r^2+o(r^2)}{6r^2+o(r^2)}=12\lim_{r\to0+}\frac{2+o(1)}{6+o(1)}=$$

$$=12\cdot\frac{2}{6}=4$$

Гаусова кривина параболоида у тачки $(0,0,-1)$ једнака је 4, према томе, важи тражена једнакост. Резултат је очекиван, пошто је Гаус управо тако дефинисао појам Гаусове кривине површи у некој тачки.

12. Одредити параметризацију неке криве у нормалном сечеву хиперболичког параболоида $z=x^2-y^2$ у тачки $(0,0,0)$ у правцу тангентног вектора w и израчунати њену обичну, нормалну и геодезијску кривину у тој тачки, уколико вектор w:

(а) полови један од углова између главних праваца;

(б) заклапа угао $\frac{\pi}{6}$ са неким главним правцем.

Могућа параметризација хиперболичког параболоида је $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$.

Одредимо главне правце у тачки $(0,0,0)=r(0,0)$.

$r_u(u,v)=(1,0,2u)$
$r_v(u,v)=(0,1,-2v)$

$E(u,v)=\langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle = 1+4u^2$
$F(u,v)=\langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle = -4uv$
$G(u,v)=\langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle = 1+4v^2$

$$r_u(u,v)\times r_v(u,v)=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix}=(-2u,2v,1)$$

$$\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2=4u^2+4v^2+1 \Longrightarrow \|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|=\sqrt{1+4u^2+4v^2}$$

$$n(u,v)=\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}=\left(-\frac{2u}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \frac{2v}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}\right)$$

$$r_{uu}(u,v)=(0,0,2) \Rightarrow e(u,v)=\langle r_{uu}(u,v), n(u,v)\rangle=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$
$$r_{uv}(u,v)=(0,0,0) \Rightarrow f(u,v)=\langle r_{uv}(u,v), n(u,v)\rangle=0$$
$$r_{vv}(u,v)=(0,0,-2) \Rightarrow g(u,v)=\langle r_{vv}(u,v), n(u,v)\rangle=-\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

У тачки $(0,0,0)=r(0,0)$ је $E(0,0)=1$, $F(0,0)=0$, $G(0,0)=1$, $e(0,0)=2$, $f(0,0)=0$, $g(0,0)=-2$, па главни правци $V_{1/2}=a_{1/2}r_u(0,0)+b_{1/2}r_v(0,0)$ задовољавају

$$\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ тј. } -ab\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$ односно $-ab(2+2)=0$. Дакле, $ab=0$, па ($b\neq0$, јер $\vec 0=0\cdot r_u(0,0)+0\cdot r_v(0,0)$ није главни вектор) су главни вектори одређени са $a=0$ и $b=0$ ($a\neq0$), тј. са $V_1=b\cdot r_v(0,0)$ и $V_2=a\cdot r_u(0,0)$. Специјално, $V_1=r_v(0,0)$ и $V_2=r_u(0,0)$ су главни вектори. Штавише, пошто је $1=G(0,0)=\|r_v(0,0)\|^2=\|V_1\|^2$, $1=E(0,0)=\|r_u(0,0)\|^2=\|V_2\|^2$ и $0=F(0,0)=\langle r_u(0,0), r_v(0,0)\rangle=\langle V_2, V_1\rangle$, следи да главни вектори V_1 и V_2 чине ОНБ тангентног простора у тачки $(0,0,0)=r(0,0)$.

(а) Вектор w који полови неки од углова између главних праваца може бити вектор $w=V_1+V_2=r_v(0,0)+r_u(0,0)=(0,1,0)+(1,0,0)=(1,1,0)$. Нормално сечење хиперболичког параболоида у тачки $(0,0,0)$ у правцу тангентног вектора w јесте крива у пресеку хиперболичког параболоида и равни која садржи тачку $(0,0,0)$ и садржи вектор $n(0,0)$ нормале површи у тој тачки, као и вектор w. Према томе, вектор нормале те равни је $n(0,0)\times w=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,1,0)$, те је једначина равни $-1\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)+0\cdot(z-0)=0$, тј. $-x+y=0$. Према томе, $x=y$, а крива у нормалном сечењу је $\alpha(u)=r(u,u)=(u,u,0)$. Како је $\alpha'(u)=(1,1,0)$ и $\alpha''(u)=(0,0,0)$, следи да је $\alpha'(u)\times\alpha''(u)=\vec 0$, те је $\kappa(u)=\frac{\|\alpha'(u)\times\alpha''(u)\|}{\|\alpha'(u)\|^3}=0$.
Самим тим је и $\kappa_n(u)=0$ и $\kappa_g(u)=0$.

(б) Вектор w који гради угао $\frac{\pi}{6}$ с главним вектором V_1 може бити вектор $w=\cos\frac{\pi}{6}V_1+\sin\frac{\pi}{6}V_2=\frac{\sqrt3}{2}r_v(0,0)+\frac12 r_u(0,0)=\frac{\sqrt3}{2}(0,1,0)+\frac12(1,0,0)=\left(\frac12,\frac{\sqrt3}{2},0\right)$. Раван која садржи

тачку $(0,0,0)$ и векторе $n(0,0)=(0,0,1)$ и $w=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ има вектор нормале
$n(0,0)\times w=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$, па је њена једначина $-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-0)+\frac{1}{2}(y-0)+0\cdot(z-0)=0$,
тј. $-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0$. Према томе, $y=\sqrt{3}x$, па је крива у нормалном пресеку дата са

$\beta(u)=r(u,\sqrt{3}u)=(u,\sqrt{3}u,u^2-3u^2)=(u,\sqrt{3}u,-2u^2)$

$\beta'(u)=(1,\sqrt{3},-4u)$ Тачка $(0,0,0)$ се добија за $u=0$.

$\beta''(u)=(0,0,-4)$

$\beta'(0)\times\beta''(0)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=(-4\sqrt{3},4,0)$

$\|\beta'(0)\times\beta''(0)\|^2=16\cdot 3+16=16\cdot 4\Rightarrow\|\beta'(0)\times\beta''(0)\|=4\cdot 2=8$

$\|\beta'(0)\|^2=1+3=4\Rightarrow\|\beta'(0)\|=2$

$K(0)=\frac{\|\beta'(0)\times\beta''(0)\|}{\|\beta'(0)\|^3}=\frac{8}{8}=1$

$\beta'(u)=r_u(u,\sqrt{3}u)\cdot 1+r_v(u,\sqrt{3}u)\cdot\sqrt{3}\Rightarrow\beta'(0)=r_u(0,0)\cdot 1+r_v(0,0)\cdot\sqrt{3}$

$II(\beta'(0),\beta'(0))=(1\ \ \sqrt{3})\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=(2\ \ -2\sqrt{3})\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=2-2\cdot 3=2-6=-4$

$K_n(0)=\frac{II(\beta'(0),\beta'(0))}{I(\beta'(0),\beta'(0))}=\frac{-4}{\|\beta'(0)\|^2}=\frac{-4}{2^2}=-1$

$K(u)^2=K_g(u)^2+K_n(u)^2 \leftarrow$ ово увек важи

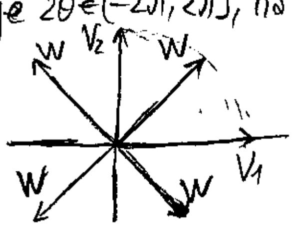
$K(0)^2=K_g(0)^2+K_n(0)^2$, тј. $1=K_g(0)^2+1\Rightarrow K_g(0)=0$

13. Нека је дата минимална површ (средња кривина једнака је нули).
(а) Доказати да асимптотски правци у хиперболичким тачкама минималне површи полове углове између главних праваца.
(б) Доказати да је збир нормалних кривина минималне површи дуж било која два међусобно ортогонална правца тангентног простора једнак нули.
(в) Доказати да су коефицијенти прве форме параметризације сфере индуковане Гаусовим пресликавањем минималне површи пропорционални коефицијентима прве форме те површи у одговарајућој хиперболичкој тачки.

(а) Нека је $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, произвољна површ и $p=r(u_0,v_0)$ произвољна тачка на тој површи. Нека су $E=E(u_0,v_0)$, $F=F(u_0,v_0)$ и $G=G(u_0,v_0)$ коефицијенти прве основне форме површи r у тачки $p=r(u_0,v_0)$ и $e=e(u_0,v_0)$, $f=f(u_0,v_0)$ и $g=g(u_0,v_0)$ коефицијенти друге основне форме површи r у тој тачки. Претпоставимо да тачка p није умбиличка, тј. да није $k_1(p)=k_2(p)$ (уколико је тачка p умбиличка, тј.

главне кривине (које представљају најмању и највећу вредност нормалне кривине у тој тачки) јесу једнаке, онда следи да су у тој тачки сви правци у тангентном простору главни правци, јер је нормална кривина површи иста у свим правцима) и нека су V_1 и V_2 јединични главни вектори такви да је $K_n(V_1)=\frac{\mathrm{II}(V_1,V_1)}{\underbrace{\mathrm{I}(V_1,V_1)}_{=1}}=$
$=\mathrm{II}(V_1,V_1)=k_1(p)$ и $K_n(V_2)=\frac{\mathrm{II}(V_2,V_2)}{\underbrace{\mathrm{I}(V_2,V_2)}_{=1}}=\mathrm{II}(V_2,V_2)=k_2(p)$. Може се доказати да онда важи и $\mathrm{I}(V_1,V_2)=0$ (тј. $\langle V_1,V_2\rangle=0$, односно $V_1\perp V_2$) и $\mathrm{II}(V_1,V_2)=0$, па V_1,V_2 чине ортонормирану базу тангентног простора $T_p r$ површи r у тачки p. Ако је $W\in T_p r$ произвољан јединични тангентни вектор и θ оријентисани угао од V_1 до W, онда важи да је $W=\cos\theta V_1+\sin\theta V_2$, па је $K_n(W)=\frac{\mathrm{II}(W,W)}{\underbrace{\mathrm{I}(W,W)}_{=1}}=\mathrm{II}(W,W)=\mathrm{II}(\cos\theta V_1+\sin\theta V_2,\cos\theta V_1+\sin\theta V_2)=$
$=\mathrm{II}(\cos\theta V_1+\sin\theta V_2,\cos\theta V_1)+\mathrm{II}(\cos\theta V_1+\sin\theta V_2,\sin\theta V_2)=\mathrm{II}(\cos\theta V_1,\cos\theta V_1)+\mathrm{II}(\sin\theta V_2,\cos\theta V_1)+$
$+\mathrm{II}(\cos\theta V_1,\sin\theta V_2)+\mathrm{II}(\sin\theta V_2,\sin\theta V_2)=\cos^2\theta\underbrace{\mathrm{II}(V_1,V_1)}_{k_1(p)}+\sin\theta\cos\theta\underbrace{\mathrm{II}(V_2,V_1)}_{=0}+\cos\theta\sin\theta\underbrace{\mathrm{II}(V_1,V_2)}_{=0}+$
$+\sin^2\theta\underbrace{\mathrm{II}(V_2,V_2)}_{k_2(p)}=\cos^2\theta\, k_1(p)+\sin^2\theta\, k_2(p)$.

Дакле, за сваку површ r и њену неумбиличку тачку $p=r(u_0,v_0)$ важи да јединични главни вектори V_1 и V_2, који испуњавају $K_n(V_1)=k_1(p)$ и $K_n(V_2)=k_2(p)$, где су $k_1(p)\neq k_2(p)$ главне кривине у тачки p, чине ортонормирану базу $T_p r$ (и $\mathrm{II}(V_1,V_2)=0$), а сваки јединични вектор $W\in T_p r$ може да се запише као $W=\cos\theta V_1+\sin\theta V_2$ и онда је $K_n(W)=\cos^2\theta k_1(p)+\sin^2\theta k_2(p)$. То важи и за минималну површ r, чија је средња кривина у свакој тачки $p=r(u_0,v_0)$ једнака 0, тј. $0=H(p)=\frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}$. Према томе, важи $k_1(p)=-k_2(p)$, те је Гаусова кривина $K(p)=k_1(p)k_2(p)=-k_2(p)^2\leq 0$. Ово значи да је свака тачка минималне површи или хиперболичка (ако је $k_2(p)\neq 0$) или планарна (ако је $k_2(p)=0$, јер је онда и $k_1(p)=-k_2(p)=0$). За произвољну површ важи да је свака планарна тачка умбиличка (јер је $k_1(p)=k_2(p)=0$ за планарне тачке), а свака хиперболичка тачка је неумбиличка (јер је $K(p)=k_1(p)k_2(p)<0$, па не може бити $k_1(p)=k_2(p)$ јер то повлачи $K(p)=k_1(p)k_2(p)=k_2(p)^2\geq 0$). Стога у хиперболичкој тачки p минималне површи r можемо уочити јединичне главне векторе V_1,V_2 такве да је $\mathrm{I}(V_1,V_2)=0$ и $\mathrm{II}(V_1,V_2)=0$. Нека је $W\in T_p r$ јединични асимптотски вектор и нека је θ угао који он гради са V_1. Тада је $K_n(W)=0$ (јер је асимптотски правац), па је $\cos^2\theta k_1(p)+\sin^2\theta k_2(p)=0$. Пошто је $k_2(p)=-k_1(p)$, следи да је $0=\cos^2\theta k_1(p)-\sin^2\theta k_1(p)=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)k_1(p)=\cos 2\theta\cdot k_1(p)$, па пошто је $k_1(p)\neq 0$ (тачка p је хиперболичка), следи да је $\cos 2\theta=0$. Ако је $\theta\in(-\pi,\pi]$, онда је $2\theta\in(-2\pi,2\pi]$, па је $2\theta\in\{-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$, тј. $\theta\in\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\}$.



Према томе, асимптотски правци полове углове између главних праваца, што је и требало доказати.

(б) Нека је r минимална површ и $p=r(u_0,v_0)$ њена произвољна тачка. Нека су $k_1(p)$ и $k_2(p)$ главне кривине тачке p. Тада је $H(p)=\frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}=0$, па је $k_1(p)=-k_2(p)$. Ако је $k_1(p)=0$, онда је и $k_2(p)=0$, па следи да је нормална кривина произвољног тангентног вектора $W\in T_pr$ једнака нули (јер су главне кривине $k_1(p)$ и $k_2(p)$ најмања и највећа вредност нормалне кривине у тачки p, па пошто су једнаке, следи да је нормална кривина произвољног ненула тангентног вектора једнака њима). Специјално, ако су W_1 и W_2 нека два ортогонална правца, онда је $k_n(W_1)+k_n(W_2)=0+0=0$.

Нека је $k_1(p)\neq 0$. Тада је $k_2(p)=-k_1(p)$, па је $k_2(p)\neq k_1(p)$, тј. тачка p није умбиличка. Нека су V_1 и V_2 јединични главни вектори такви да је $k_n(V_1)=k_1(p)$ и $k_n(V_2)=k_2(p)$ и нека су W_1 и W_2 јединични тангентни вектори који су међусобно ортогонални. Тада је, без умањења општости, $W_1=\cos\theta V_1+\sin\theta V_2$ и $W_2=\cos(\theta+\frac{\pi}{2})V_1+\sin(\theta+\frac{\pi}{2})V_2$, па је $k_n(W_1)=\cos^2\theta\, k_1(p)+\sin^2\theta\, k_2(p)$ и $k_n(W_2)=\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})k_1(p)+\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})k_2(p)=(-\sin\theta)^2k_1(p)+(\cos\theta)^2k_2(p)=\sin^2\theta\, k_1(p)+\cos^2\theta\, k_2(p)$. Узимајући у обзир да је $k_2(p)=-k_1(p)$, добијамо $k_n(W_1)=\cos^2\theta\, k_1(p)-\sin^2\theta\, k_1(p)=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)k_1(p)$ и $k_n(W_2)=\sin^2\theta\, k_1(p)-\cos^2\theta\, k_1(p)=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)k_1(p)=-k_n(W_1)$, па је $k_n(W_1)+k_n(W_2)=0$.

(в) Нека је $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, произвољна површ. Гаусово пресликавање је пресликавање $\Gamma: r(U)\to S^2$, $\Gamma=n\circ r^{-1}$, које свакој тачки $p\in r(U)$ додељује тачку на јединичној сфери S^2 такву да је вектор коме је почетак у тачки $O(0,0,0)$, а врх у тој тачки. Тада је $n:U\to S^2$ параметризација дела сфере S^2 и кажемо да је она индукована Гаусовим пресликавање површи r. Израчунајмо коефицијенте прве основне форме сфере која је параметризована пресликавањем n и докажимо да су они у свакој тачки $(u_0,v_0)\in U$, таквој да је $r(u_0,v_0)$ хиперболичка тачка минималне површи r, пропорционални коефицијентима $E=E(u_0,v_0)$, $F=F(u_0,v_0)$ и $G=G(u_0,v_0)$ прве основне форме минималне површи r у тачки (u_0,v_0).

Иначе, за произвољну површ $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, постоје једначине $n_u(u,v)=\beta_1^1(u,v)r_u(u,v)+\beta_1^2(u,v)r_v(u,v)$ и $n_v(u,v)=\beta_2^1(u,v)r_u(u,v)+\beta_2^2(u,v)r_v(u,v)$, где је $\beta_1^1(u,v)=\frac{-e(u,v)G(u,v)+f(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}$, $\beta_1^2(u,v)=\frac{-f(u,v)E(u,v)+e(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}$, $\beta_2^1(u,v)=\frac{-f(u,v)G(u,v)+g(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}$ и $\beta_2^2(u,v)=\frac{-g(u,v)E(u,v)+f(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}$. Оне се зову Вајнгартенове једначине. Поред њих постоје и Гаусове једначине $r_{uu}(u,v)=\Gamma_{11}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{11}^2r_v(u,v)+e(u,v)n(u,v)$, $r_{uv}(u,v)=\Gamma_{12}^1r_u(u,v)+\Gamma_{12}^2r_v(u,v)+f(u,v)n(u,v)$ и $r_{vv}(u,v)=\Gamma_{22}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{22}^2(u,v)r_v(u,v)+g(u,v)n(u,v)$, где је

$$\Gamma_{11}^1(u,v)=\frac{E_u(u,v)G(u,v)-2F_u(u,v)F(u,v)+E_v(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2)},\ \Gamma_{11}^2(u,v)=\frac{2F_u(u,v)E(u,v)-E_v(u,v)E(u,v)-E_u(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2)},$$

$$\Gamma_{12}^1(u,v)=\frac{E_v(u,v)G(u,v)-G_u(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2)},\ \Gamma_{12}^2(u,v)=\frac{G_u(u,v)E(u,v)-E_v(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1(u,v)=\frac{2F_v(u,v)G(u,v)-G_u(u,v)G(u,v)-G_v(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2)},\ \Gamma_{22}^2(u,v)=\frac{G_v(u,v)E(u,v)-2F_v(u,v)F(u,v)+G_u(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2)}.$$

Коефицијенти $\Gamma_{ij}^k(u,v)$ $(1\le i\le j\le 2,\ 1\le k\le 2)$, називају се Кристофелим симболима друге врсте.
Искористимо Вајнгартенове једначине у тачки $(u_0,v_0)\in U$ минималне површи $r:U\to\mathbb{R}^3$ такву да је $p=r(u_0,v_0)$ хиперболичка тачка на трагу површи r како бисмо одредили коефицијенте $E^n=\langle n_u(u_0,v_0), n_u(u_0,v_0)\rangle$, $F^n=\langle n_u(u_0,v_0), n_v(u_0,v_0)\rangle$, $G^n=\langle n_v(u_0,v_0), n_v(u_0,v_0)\rangle$ прве основне форме на јединичној сфери у параметризацији $n:U\to S^2$ индукованој Гаусовим пресликавањем $\Gamma=n\circ r^{-1}$ минималне површи r.

$n_u(u_0,v_0)=\beta_1^1(u_0,v_0)r_u(u_0,v_0)+\beta_1^2(u_0,v_0)r_v(u_0,v_0)$, $n_v(u_0,v_0)=\beta_2^1(u_0,v_0)r_u(u_0,v_0)+\beta_2^2(u_0,v_0)r_v(u_0,v_0)$

$$E^n=\langle n_u(u_0,v_0), n_u(u_0,v_0)\rangle=I(n_u(u_0,v_0), n_u(u_0,v_0))=\begin{pmatrix}\beta_1^1(u_0,v_0) & \beta_1^2(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(u_0,v_0) & F(u_0,v_0)\\ F(u_0,v_0) & G(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^1(u_0,v_0)\\ \beta_1^2(u_0,v_0)\end{pmatrix}$$

$E=E(u_0,v_0)$, $F=F(u_0,v_0)$, $G=G(u_0,v_0)$, $e=e(u_0,v_0)$, $\ell=\ell(u_0,v_0)$, $g=g(u_0,v_0)$, $\beta_1^1=\beta_1^1(u_0,v_0)$, $\beta_1^2=\beta_1^2(u_0,v_0)$

$\beta_1^1=\frac{-eG+\ell F}{EG-F^2}$, $\beta_1^2=\frac{-\ell E+eF}{EG-F^2}$

$$E^n=\begin{pmatrix}\beta_1^1 & \beta_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^1\\ \beta_1^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1^1E+\beta_1^2F & \beta_1^1F+\beta_1^2G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^1\\ \beta_1^2\end{pmatrix}=(\beta_1^1)^2E+\beta_1^2\beta_1^1F+\beta_1^1\beta_1^2F+(\beta_1^2)^2G=(\beta_1^1)^2E+2\beta_1^1\beta_1^2F+(\beta_1^2)^2G=$$

$$=\frac{e^2G^2-2e\ell FG+\ell^2F^2}{(EG-F^2)^2}E+2\frac{e\ell EG-e^2FG-\ell^2EF+e\ell F^2}{(EG-F^2)^2}F+\frac{\ell^2E^2-2e\ell EF+e^2F^2}{(EG-F^2)^2}G=\frac{e^2EG^2-\cancel{2e\ell EFG}+\ell^2EF^2}{(EG-F^2)^2}+$$

$$+\frac{\cancel{2e\ell EFG}-2e^2F^2G-2\ell^2EF^2+2e\ell F^3}{(EG-F^2)^2}+\frac{\ell^2E^2G-2e\ell EFG+e^2F^2G}{(EG-F^2)^2}=\frac{e^2G(EG-2F^2+F^2)+\ell^2E(F^2-2F^2+EG)-2e\ell F(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2}=$$

$$=\frac{e^2G+\ell^2E-2e\ell F}{EG-F^2}=\frac{e(eG-2\ell F)+\ell^2E}{EG-F^2}$$

Пошто је r минимална површ, следи да је $0=H(u_0,v_0)=\frac{e(u_0,v_0)G(u_0,v_0)+E(u_0,v_0)g(u_0,v_0)-2\ell(u_0,v_0)F(u_0,v_0)}{2(E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)-F(u_0,v_0)^2)}$ $=\frac{eG+Eg-2\ell F}{2(EG-F^2)}$, па је $eG+Eg-2\ell F=0$, тј. $eG-2\ell F=-Eg$. Према томе,

$E^n=\frac{e(-Eg)+\ell^2E}{EG-F^2}=E\cdot\frac{-eg+\ell^2}{EG-F^2}=-E\cdot\frac{eg-\ell^2}{EG-F^2}=-E\cdot K(u_0,v_0)=-E\cdot K$, $K=K(u_0,v_0)<0$, јер је $p=r(u_0,v_0)$ хиперболичка тачка.

$\beta_2^1=\beta_2^1(u_0,v_0)=\frac{-\ell G+gF}{EG-F^2}$, $\beta_2^2=\beta_2^2(u_0,v_0)=\frac{-gE+\ell F}{EG-F^2}$

$$F^n=\langle n_u(u_0,v_0), n_v(u_0,v_0)\rangle=I(n_u(u_0,v_0), n_v(u_0,v_0))=\begin{pmatrix}\beta_1^1 & \beta_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_2^1\\ \beta_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1^1E+\beta_1^2F & \beta_1^1F+\beta_1^2G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_2^1\\ \beta_2^2\end{pmatrix}=$$

$$=\beta_1^1\beta_2^1E+\beta_1^2\beta_2^1F+\beta_1^1\beta_2^2F+\beta_1^2\beta_2^2G=\frac{e\ell G^2-egFG-\ell^2FG+\ell gF^2}{(EG-F^2)^2}E+\frac{\ell^2EG-\ell gEF-e\ell FG+egF^2}{(EG-F^2)^2}F+$$

$$+\frac{egEG-e\ell FG-\ell gEF+\ell^2F^2}{(EG-F^2)^2}F+\frac{\ell gE^2-\ell^2EF-egEF+e\ell F^2}{(EG-F^2)^2}G=\frac{e\ell EG^2-egEFG-\ell^2EFG+\ell gEF^2}{(EG-F^2)^2}+$$

$$+\frac{\ell^2EFG-\ell gEF^2-e\ell F^2G+egF^3+egEFG-e\ell F^2G-\ell gEF^2+\ell^2F^3}{(EG-F^2)^2}+\frac{\ell gE^2G-\ell^2EFG-egEFG+e\ell F^2G}{(EG-F^2)^2}=$$

$$=\frac{e\ell G(EG-F^2)-egF(EG-F^2)+\ell gE(EG-F^2)-\ell^2F(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2}=\frac{e\ell G-egF+\ell gE-\ell^2F}{EG-F^2}=\frac{\ell(eG+gE-\ell F)-egF}{EG-F^2}$$

$eG+gE-2\ell F=0$, јер је r минимална површ $\Rightarrow eG+gE-\ell F=\ell F$

$$F^n=\frac{\ell\cdot\ell F-egF}{EG-F^2}=F\cdot\frac{\ell^2-eg}{EG-F^2}=-F\cdot\frac{eg-\ell^2}{EG-F^2}=-F\cdot K$$

$$G^n=\langle n_v(u_0,v_0), n_v(u_0,v_0)\rangle=I(n_v(u_0,v_0), n_v(u_0,v_0))=\begin{pmatrix}\beta_2^1 & \beta_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_2^1\\ \beta_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_2^1E+\beta_2^2F & \beta_2^1F+\beta_2^2G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_2^1\\ \beta_2^2\end{pmatrix}=$$

$$=(\beta_2^1)^2E+\beta_2^2\beta_2^1F+\beta_2^1\beta_2^2F+(\beta_2^2)^2G=(\beta_2^1)^2E+2\beta_2^1\beta_2^2F+(\beta_2^2)^2G=\frac{f^2G^2-2fgFG+g^2F^2}{(EG-F^2)^2}E+$$

$$+2\frac{fgEG-f^2FG-g^2EF+fgF^2}{(EG-F^2)^2}F+\frac{g^2E^2-2fgEF+f^2F^2}{(EG-F^2)^2}G=\frac{\boxed{f^2EG^2}-2fgEFG+g^2EF^2}{(EG-F^2)^2}+$$

$$+\frac{2fgEFG-\boxed{2f^2F^2G}-2g^2EF^2+2fgF^3+g^2E^2G-2fgEFG+\boxed{f^2F^2G}}{(EG-F^2)^2}=\frac{f^2G(EG-2F^2+F^2)+g^2E(F^2-2F^2+EG)-2fgF(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2}=$$

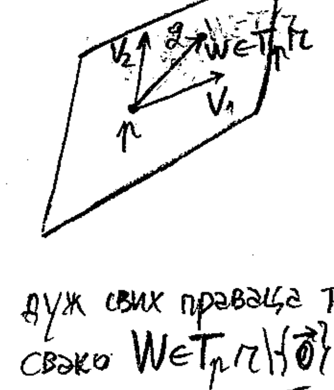
$$=\frac{f^2G\cancel{(EG-F^2)}+g^2E\cancel{(EG-F^2)}-2fgF\cancel{(EG-F^2)}}{(EG-F^2)^{\cancel{2}}}=\frac{f^2G+g^2E-2fgF}{EG-F^2}=\frac{g(gE-2fF)+f^2G}{EG-F^2}=$$

Пошто је $eG+gE-2fF=0$ јер је r минимална површ, следи да је $gE-2fF=-eG$, па је

$$G^n=\frac{g\cdot(-eG)+f^2G}{EG-F^2}=G\cdot\frac{-eg+f^2}{EG-F^2}=-G\cdot\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=-G\cdot K.$$

Према томе, коефицијенти прве основне форме сфере у параметризацији индукованој Гаусовим пресликавањем минималне површи r једнаки су $E^n=-KE$, $F^n=-KF$, $G^n=-KG$, (у тачкама које су хиперболичке на r), тј. пропорционалне су коефицијентима прве основне форме E,F,G минималне површи r.

14. Описати скуп тачака тангентне равни на растојању $\frac{1}{\sqrt{|K_n|}}$ од фиксиране тачке регуларне површи у којој се посматра тангентна раван, где је K_n нормална кривина површи дуж одговарајућег правца.



Нека је $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$, регуларна елементарна површ и нека је $p=r(u_0,v_0)$ њена произвољна тачка. Нека су $k_1=k_1(p)$ и $k_2=k_2(p)$ главне кривине површи r у тачки p. Ако је p умбиличка тачка, онда важи $k_1=k_2$, па је за свако $W\in T_pr\setminus\{\vec{0}\}$ испуњено $K_n(W)=k_1=k_2$ (јер су главне кривине k_1,k_2 најмања и највећа вредност нормалне кривине K_n дуж свих праваца тангентне равни). Ако тачка p није планарна, онда је $k_1=k_2\neq 0$, па је за свако $W\in T_pr\setminus\{\vec{0}\}$ испуњено $K_n(W)=k_1\neq 0$. Тражени скуп тачака Γ јесте скуп тачака q тангентне равни π_p таквих да је $d(p,q)=\|\vec{pq}\|=\frac{1}{\sqrt{|K_n(\vec{pq})|}}=\frac{1}{\sqrt{|k_1|}}$. Како је $K=k_1k_2=k_1^2>0$, следи да је $|k_1|=\sqrt{K}$, тј. $d(p,q)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{K}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{K}}$, тј. скуп Γ је круг у равни π_p с центром p и полупречником $\sqrt[4]{K}$. Ако је p планарна тачка, тј. $k_1=k_2=0$, онда је $K_n(W)=0$ за свака тангентни вектор $W\in T_p(r)$. Међутим, онда растојање тачке $q\in\Gamma$ од тачке p није дефинисано, па је $\Gamma=\emptyset$.

Нека је p неумбиличка и нека су $V_1,V_2\in T_pr$ јединични главни вектори такви да је $K_n(V_1)=k_1$ и $K_n(V_2)=k_2$. Тада за сваки јединични тангентни вектор $W\in T_pr$ важи $W=\cos\theta\cdot V_1+\sin\theta\cdot V_2$ (θ-оријентисани угао од V_1 ка W) и $K_n(W)=\cos^2\theta\cdot k_1+\sin^2\theta\cdot k_2$. Према томе, ако је $\theta\in[0,2\pi)$ такав да је $\cos^2\theta\cdot k_1+\sin^2\theta\cdot k_2\neq 0$, тада скупу Γ припада тачка q из π_p таква да су вектори $\vec{pq}$ и $W=\cos\theta\cdot V_1+\sin\theta\cdot V_2$ истог смера, тј. $W=\frac{\vec{pq}}{\|\vec{pq}\|}=\frac{1}{d(p,q)}\vec{pq}$ и да је $d(p,q)=\frac{1}{\sqrt{|K_n(W)|}}=\frac{1}{\sqrt{|\cos^2\theta\cdot k_1+\sin^2\theta\cdot k_2|}}$. Ако у тангентној равни π_p уведемо координатни систем одређен тачком p као координатним почетком и векторима V_1 и V_2, онда тачка q има исте координате као вектор $\vec{pq}=d(p,q)\cdot W=\frac{1}{\sqrt{|k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta|}}(\cos\theta\cdot V_1+\sin\theta\cdot V_2)$, односно

$g\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{|k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta|}},\frac{\sin\theta}{\sqrt{|k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta|}}\right)$. Разликујемо три случаја.

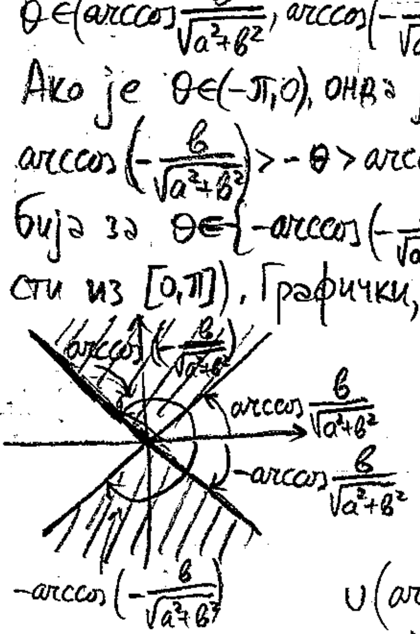
1° Тачка p је елиптичка, тј. $K=k_1k_2>0$. Другим речима, k_1 и k_2 су истог знака. Ако је $k_1<0$ и $k_2<0$, обележимо $a=\sqrt{-k_1}$, $b=\sqrt{-k_2}$ (да би било $a^2=-k_1>0$ и $b^2=-k_2>0$), и приметимо да је $|k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta|=|-a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta|=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$, а ако је $k_1>0$ и $k_2>0$, обележимо $a=\sqrt{k_1}$, $b=\sqrt{k_2}$ и приметимо да је $|k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta|=|a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta|=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$.

У сваком случају је $a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta>0$ за свако $\theta\in[0,2\pi)$ (ако би за неко $\theta\in[0,2\pi)$ било $a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=0$ морало би бити $a^2\cos^2\theta=0$ и $b^2\sin^2\theta=0$, тј. $\cos^2\theta=0$ и $\sin^2\theta=0$ због $a\neq0$ и $b\neq0$ (због $k_1\neq0$ и $k_2\neq0$), па би било $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta=0+0=0$ ↯) и тачка $g(x,y)$ задовољава $a^2x^2+b^2y^2=a^2\cdot\frac{\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+b^2\cdot\frac{\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=\frac{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=1$, тј. $\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}}=1$. Ово значи да $g(x,y)$ припада елипси с центром у p и осама у смеру главних вектора V_1, V_2, а пошто је $\theta\in[0,2\pi)$, добијамо да је скуп Γ свих тачака g једнак тој елипси.

2° Тачка p је параболичка, тј. $K=k_1k_2=0$. Нека је без умањења општости $k_2=0$ и $k_1\neq0$. Тада је $k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta=0$ ако и само је $k_1\cos^2\theta=0$, тј. $\cos^2\theta=0$ (пошто је $k_1\neq0$), односно $\cos\theta=0$. Према томе, θ не сме бити $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ (иначе није дефинисано $d(p,g)$). Нека је $a=\sqrt{|k_1|}$. Тада је $|k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta|=|k_1\cos^2\theta|=|k_1|\cdot\cos^2\theta=a^2\cos^2\theta$, па је $g\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}},\frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}}\right)$. Како је $a>0$, следи да је $g\left(\frac{\cos\theta}{a\cdot|\cos\theta|},\frac{\sin\theta}{a\cdot|\cos\theta|}\right)$. Ако је $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, тј. ако је $\cos\theta>0$, онда је $g\left(\frac{\cos\theta}{a\cdot\cos\theta},\frac{\sin\theta}{a\cdot\cos\theta}\right)$, тј. $g\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a}\operatorname{tg}\theta\right)$, а ако је $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$, тј. ако је $\cos\theta<0$, онда је $g\left(\frac{\cos\theta}{-a\cos\theta},\frac{\sin\theta}{-a\cos\theta}\right)$, тј. $g\left(-\frac{1}{a},-\frac{1}{a}\operatorname{tg}\theta\right)$. Исто је узети $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ и $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, те добијамо да у полуравни $x>0$ (тада је $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$) тачке g припадају правој $m: x=\frac{1}{a}$, тј. правој која је паралелна y-оси (има правац главног вектора V_2) и $d(p,m)=\frac{1}{a}$, а због тога што се узимају сви углови $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, добија се цела права. Такође, у полуравни $x<0$ (тада је $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$) тачке g припадају правој $n: x=-\frac{1}{a}$, која исто има правац главног вектора V_2 и $d(p,n)=\frac{1}{a}$, а пошто се узимају сви $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$, добија се цела права. Према томе, скуп Γ једнак је унији двеју правих које имају правац оног главног вектора код којег се достиже главна кривина 0 и на растојању су $\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{|k_1|}}$, где је $k_1\neq0$ ненула главна кривина.

3° Тачка g је хиперболичка, тј. $K=k_1k_2<0$. Нека је без умањења општости $k_1<0<k_2$. Обележимо $a=\sqrt{-k_1}$ и $b=\sqrt{k_2}$. Тада је $|k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta|=|-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta|$, па треба раздвојити све θ за које је $-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta>0$ и оне за које је $-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta<0$, а одбацити оне θ за које је $-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=0$. Решимо прво неједначину $-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta>0$. Како је $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, добијамо да је $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$, па је

$-a^2\cos^2\theta+b^2(1-\cos^2\theta)>0$, тј. $-a^2\cos^2\theta+b^2-b^2\cos^2\theta>0$. Добијамо $b^2>(a^2+b^2)\cos^2\theta$, односно $\cos^2\theta<\frac{b^2}{a^2+b^2}$. Према томе, $-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<\cos\theta<\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ако је $\theta\in[0,\pi]$, применом инверзне функције arccos, која је опадајућа, добијамо $\arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)>\theta>\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тј: $\theta\in\left(\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right)$. Једнакост се добија за $\theta\in\left\{\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right\}$. Ако је $\theta\in(-\pi,0)$, онда је $-\theta\in(0,\pi)$, па добијамо $-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<\cos\theta=\cos(-\theta)<\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, те је $\arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)>-\theta>\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тј. $\theta\in\left(-\arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Једнакост се добија за $\theta\in\left\{-\arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$ (одређују исте правце као и одговарајуће вредности из $[0,\pi]$). Графички, шрафирана област одговара области где је $-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta>0$,



унија правих на граници шрафиране области одговара делу где је $-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=0$, а нешрафирана област одговара области где је $-a^2\cos^2\theta\pm b^2\sin^2\theta<0$.

Нека је $W=\cos\theta V_1+\sin\theta V_2$ за $\theta\in\left(-\arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cup\left(\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right)$. Тада тачка $g\in\Gamma$ има координате $g\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\right)$. Приметимо да је $-a^2x^2+b^2y^2=-a^2\frac{\cos^2\theta}{-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+b^2\frac{\sin^2\theta}{-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=\frac{-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{-a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=1$, тј. $-\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}}=1$, што значи да тачка g припада хиперболи. Њене асимптоте задовољавају $-\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}}=0$, тј. $\left(\frac{y}{\frac{1}{b}}-\frac{x}{\frac{1}{a}}\right)\left(\frac{y}{\frac{1}{b}}+\frac{x}{\frac{1}{a}}\right)=0$, па су асимптоте праве $y=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}x=\frac{a}{b}x$ и $y=-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}x=-\frac{a}{b}x$. Докажимо да су оне управо праве на граници шрафиране области. На правој $y=\frac{a}{b}x$ налази се тачка (b,a), чије је растојање од тачке $(0,0)$ једнако $\sqrt{a^2+b^2}$, а косинус оријентисаног угла који гради са позитивним делом x-осе (главним вектором V_1) једнак је $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Слично, на правој $y=-\frac{a}{b}x$ налази се тачка $(-b,a)$, чије је растојање од $(0,0)$ једнако $\sqrt{a^2+b^2}$, а косинус угла који гради с позитивним делом x-осе (главним вектором V_1) једнак је $-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Како се за тачке са хиперболе узимају сви углови који се узимају за g, следи да читава хипербола припада скупу Γ.

Нека је $W=\cos\theta V_1+\sin\theta V_2$ за $\theta\in\left(-\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cup\left(\arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 2\pi-\arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right)$. Тада тачка g има координате $g\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}}\right)$ и приметимо да важи $a^2x^2-b^2y^2=a^2\frac{\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}-b^2\frac{\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}=\frac{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}=1$, тј. $\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}}=1$. То значи да тачка g припада хиперболи, а пошто су њене асимптоте $y=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}x=\frac{a}{b}x$ и $y=-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}x=-\frac{a}{b}x$ (исте као малопре), следи да све тачке хиперболе припадају нешрафираној области, тј. да се за тачке са хиперболе узимају сви углови који се узимају за g. Према томе, читава хипербола припада скупу Γ, што значи да је скуп Γ унија двеју хипербола.

15. Нека је $\gamma(s)=r(u(s),v(s))$ природно параметризована крива на површи $r=r(u,v)$ и $[T_\gamma, S_\gamma, n_\gamma]$ придружена Дарбуова база криве γ. Геодезијска торзија τ_g криве γ је дефинисана следећим формулама (аналогне Френе-Сереовим формулама):
$T_\gamma'=k_n n_\gamma+k_g S_\gamma$, $S_\gamma'=-k_g T_\gamma-\tau_g n_\gamma$, $n_\gamma'=-k_n T_\gamma+\tau_g S_\gamma$. Доказати да важи:
(а) $\tau_g=-\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)=(k_1-k_2)\sin\varphi\cos\varphi$, где је φ угао између једног главног вектора и T_γ;
(б) $\tau_g=-\tau-\frac{d\theta}{ds}$, где је θ угао између векторских поља n_γ и N_γ.

Приметимо да се дате формуле матрично записују као

јединично нормално в. поље дуж криве γ

$$\begin{pmatrix} T_\gamma' \\ S_\gamma' \\ n_\gamma' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & -\tau_g \\ -k_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_\gamma \\ S_\gamma \\ n_\gamma \end{pmatrix}.$$

Такође, $n_\gamma(s)\overset{\text{деф}}{=}n(u(s),v(s))$ и $S_\gamma(s)\overset{\text{деф}}{=}n(u(s),v(s))\times T_\gamma(s)=n_\gamma(s)\times T_\gamma(s)$.

Прва од њих дефинише нормалну кривину k_n и геодезијску кривину k_g. Како је $\langle T_\gamma(s),n_\gamma(s)\rangle=0$ за све s, диференцирањем добијамо $\langle T_\gamma'(s),n_\gamma(s)\rangle+\langle T_\gamma(s),n_\gamma'(s)\rangle=0$, па је $\langle n_\gamma'(s),T_\gamma(s)\rangle=-\langle T_\gamma'(s),n_\gamma(s)\rangle=-k_n(s)$. Дакле, $\tau_g(s)\overset{\text{деф}}{=}\langle n_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle$. Треба још проверити да ли важи $\langle n_\gamma'(s),n_\gamma(s)\rangle=0$, $\langle S_\gamma'(s),T_\gamma(s)\rangle=-k_g(s)$, $\langle S_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle=0$ и $\langle S_\gamma'(s),n_\gamma(s)\rangle=-\tau_g(s)$.
Из $\langle S_\gamma(s),S_\gamma(s)\rangle=1$ и $\langle n_\gamma(s),n_\gamma(s)\rangle=1$ за све s, диференцирањем добијамо $0=\langle S_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle+\langle S_\gamma(s),S_\gamma'(s)\rangle=2\langle S_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle$ и $0=\langle n_\gamma'(s),n_\gamma(s)\rangle+\langle n_\gamma(s),n_\gamma'(s)\rangle=2\langle n_\gamma'(s),n_\gamma(s)\rangle$, те је $\langle S_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle=0$ и $\langle n_\gamma'(s),n_\gamma(s)\rangle=0$. Из $\langle T_\gamma(s),S_\gamma(s)\rangle=0$ и $\langle n_\gamma(s),S_\gamma(s)\rangle=0$ за све s, диференцирањем по s добијамо $\langle T_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle+\langle T_\gamma(s),S_\gamma'(s)\rangle=0$ и $\langle n_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle+\langle n_\gamma(s),S_\gamma'(s)\rangle=0$, те је $\langle S_\gamma'(s),T_\gamma(s)\rangle=-\langle T_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle=-k_g(s)$ и $\langle S_\gamma'(s),n_\gamma(s)\rangle=-\langle n_\gamma'(s),S_\gamma(s)\rangle=-\tau_g(s)$.

(а) Нека је $p=\gamma(s_0)=r(u(s_0),v(s_0))$ тачка криве γ, која припада површи r. Нека је p умбиличка тачка. Тада су главне кривине $k_1=k_1(p)$ и $k_2=k_2(p)$ једнаке, па следи да је нормална кривина сваког вектора $W\in T_pr\setminus\{\vec{0}\}$ једнака $k_1(=k_2)$. Специјално, нормална кривина вектора $T_\gamma=T_\gamma(s_0)$ и $S_\gamma=S_\gamma(s_0)$ (он припада T_pr јер је $S_\gamma\perp n_\gamma=n_\gamma(s_0)=n(u(s_0),v(s_0))$) једнаке су k_1. Како су они јединични ($\mathrm{I}(T_\gamma,T_\gamma)=\mathrm{I}(S_\gamma,S_\gamma)=1$), следи да је
$k_1=k_n(T_\gamma)=\frac{\mathrm{II}(T_\gamma,T_\gamma)}{\mathrm{I}(T_\gamma,T_\gamma)}=\mathrm{II}(T_\gamma,T_\gamma)$ и $k_1=k_n(S_\gamma)=\frac{\mathrm{II}(S_\gamma,S_\gamma)}{\mathrm{I}(S_\gamma,S_\gamma)}=\mathrm{II}(S_\gamma,S_\gamma)$. Вектор $T_\gamma+S_\gamma$ је такође тангентан на r у тачки p и $\mathrm{I}(T_\gamma+S_\gamma,T_\gamma+S_\gamma)=\mathrm{I}(T_\gamma,T_\gamma)+\mathrm{I}(T_\gamma,S_\gamma)+\mathrm{I}(S_\gamma,T_\gamma)+\mathrm{I}(S_\gamma,S_\gamma)=1+1=2$. Такође, $k_1=k_n(T_\gamma+S_\gamma)=\frac{\mathrm{II}(T_\gamma+S_\gamma,T_\gamma+S_\gamma)}{\mathrm{I}(T_\gamma+S_\gamma,T_\gamma+S_\gamma)}=\frac{\mathrm{II}(T_\gamma+S_\gamma,T_\gamma+S_\gamma)}{2}$, па је $\mathrm{II}(T_\gamma+S_\gamma,T_\gamma+S_\gamma)=2k_1$.
С друге стране, $\mathrm{II}(T_\gamma+S_\gamma,T_\gamma+S_\gamma)=\mathrm{II}(T_\gamma,T_\gamma)+\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)+\mathrm{II}(S_\gamma,T_\gamma)+\mathrm{II}(S_\gamma,S_\gamma)=k_1+k_1+2\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)$, те је $2k_1+2\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)=2k_1$, односно $\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)=0$. Како је $k_1=k_2$, који год главни вектор изабрали (сви су главни) и прогласили да је φ угао између њега и T_γ, добићемо да је $(k_1-k_2)\sin\varphi\cos\varphi=0$, те је $\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)=(k_1-k_2)\sin\varphi\cos\varphi$.

Нека је p неумбиличка тачка и нека су $V_1,V_2\in T_pr$ јединични главни вектори такви да је $k_n(V_1)=k_1$, $k_n(V_2)=k_2$ и да је смер од V_1 ка V_2 исти као смер од T_γ ка S_γ. Ако је φ угао између V_1 и T_γ, онда је $\varphi+\frac{\pi}{2}$ угао између V_1 и S_γ. Пошто су T_γ и S_γ јединични вектори, следи да је $T_\gamma=\cos\varphi\cdot V_1+\sin\varphi\cdot V_2$ и $S_\gamma=\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})\cdot V_1+\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})\cdot V_2=$ $=-\sin\varphi\cdot V_1+\cos\varphi\cdot V_2$. Одавде је

$$\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)=\mathrm{II}(\cos\varphi\cdot V_1+\sin\varphi\cdot V_2,-\sin\varphi\cdot V_1+\cos\varphi\cdot V_2)=\mathrm{II}(\cos\varphi\cdot V_1,-\sin\varphi\cdot V_1)+\mathrm{II}(\cos\varphi\cdot V_1,\cos\varphi\cdot V_2)+$$
$$+\mathrm{II}(\sin\varphi\cdot V_2,-\sin\varphi\cdot V_1,\sin\varphi\cdot V_2,\cos\varphi\cdot V_2)=-\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{II}(V_1,V_1)+\cos^2\varphi\cdot\mathrm{II}(V_1,V_2)-\sin^2\varphi\cdot\mathrm{II}(V_2,V_1)+$$
$$+\sin\varphi\cos\varphi\cdot\mathrm{II}(V_2,V_2).$$

Како су V_1,V_2 јединични, важи $k_1=k_n(V_1)=\frac{\mathrm{II}(V_1,V_1)}{\mathrm{I}(V_1,V_1)}=\mathrm{II}(V_1,V_1)$, $k_2=k_n(V_2)=\frac{\mathrm{II}(V_2,V_2)}{\mathrm{I}(V_2,V_2)}=\mathrm{II}(V_2,V_2)$, а важи и $\mathrm{I}(V_1,V_2)=\mathrm{II}(V_1,V_2)=0$. Према томе, добијамо

$\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)=-\cos\varphi\sin\varphi\cdot k_1+\cos^2\varphi\cdot 0-\sin^2\varphi\cdot 0+\sin\varphi\cos\varphi\cdot k_2=-(k_1-k_2)\sin\varphi\cos\varphi$, што значи да је $-\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)=(k_1-k_2)\sin\varphi\cos\varphi$. Остаје још да се докаже да је $\tau_g=\tau_g(s_0)=-\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)$.

С једне стране, $T_\gamma=T_\gamma(s_0)=\gamma'(s_0)=r_u(u(s_0),v(s_0))\cdot u'(s_0)+r_v(u(s_0),v(s_0))\cdot v'(s_0)$ (крива γ је природно параметризована) и $S_\gamma=S_\gamma(s_0)=n_\gamma(s_0)\times T_\gamma(s_0)=\frac{r_u(u(s_0),v(s_0))\times r_v(u(s_0),v(s_0))}{\|r_u(u(s_0),v(s_0))\times r_v(u(s_0),v(s_0))\|}\times T_\gamma(s_0)$. Ако је $E=E(u(s_0),v(s_0))$, $F=F(u(s_0),v(s_0))$ и $G=G(u(s_0),v(s_0))$, онда је $\|r_u(u(s_0),v(s_0))\times r_v(u(s_0),v(s_0))\|^2=EG-F^2$ (зато што је $\|\vec a\times\vec b\|^2=\|\vec a\|^2\|\vec b\|^2\sin^2\angle(\vec a,\vec b)=\|\vec a\|^2\|\vec b\|^2-\|\vec a\|^2\|\vec b\|^2\cos^2\angle(\vec a,\vec b)=\langle\vec a,\vec a\rangle\langle\vec b,\vec b\rangle-\langle\vec a,\vec b\rangle^2=EG-F^2$, $\vec a=r_u(u(s_0),v(s_0))$, $\vec b=r_v(u(s_0),v(s_0))$), па је $S_\gamma(s_0)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\langle r_u(u(s_0),v(s_0)),T_\gamma(s_0)\rangle r_v(u(s_0),v(s_0))-\langle r_v(u(s_0),v(s_0)),T_\gamma(s_0)\rangle r_u(u(s_0),v(s_0)))$. Како је

$$\langle r_u(u(s_0),v(s_0)),T_\gamma(s_0)\rangle=(1\ \ 0)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(s_0)\\v'(s_0)\end{pmatrix}=(E\ \ F)\begin{pmatrix}u'(s_0)\\v'(s_0)\end{pmatrix}=E\cdot u'(s_0)+F\cdot v'(s_0)\ \text{ и}$$
$$\langle r_v(u(s_0),v(s_0)),T_\gamma(s_0)\rangle=(0\ \ 1)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(s_0)\\v'(s_0)\end{pmatrix}=(F\ \ G)\begin{pmatrix}u'(s_0)\\v'(s_0)\end{pmatrix}=F\cdot u'(s_0)+G\cdot v'(s_0),$$

добијамо

$S_\gamma=S_\gamma(s_0)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}((-F u'(s_0)-G\cdot v'(s_0))r_u(u(s_0),v(s_0))+(E\cdot u'(s_0)+F\cdot v'(s_0))\cdot r_v(u(s_0),v(s_0)))=\frac{-F\cdot u'(s_0)-G\cdot v'(s_0)}{\sqrt{EG-F^2}}r_u(u(s_0),v(s_0))+$ $+\frac{E\cdot u'(s_0)+F\cdot v'(s_0)}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot r_v(u(s_0),v(s_0))$. Ако је $e=e(u(s_0),v(s_0))$, $f=f(u(s_0),v(s_0))$ и $g=g(u(s_0),v(s_0))$, следи да је

$$\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)=(u'(s_0)\ \ v'(s_0))\begin{pmatrix}e&f\\f&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-F\cdot u'(s_0)-G\cdot v'(s_0)}{\sqrt{EG-F^2}}\\\frac{E\cdot u'(s_0)+F\cdot v'(s_0)}{\sqrt{EG-F^2}}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot(e\cdot u'(s_0)+f\cdot v'(s_0)\ \ \ f u'(s_0)+g\cdot v'(s_0))\begin{pmatrix}-F\cdot u'(s_0)-G\cdot v'(s_0)\\E\cdot u'(s_0)+F\cdot v'(s_0)\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot(-eFu'(s_0)^2-eGu'(s_0)v'(s_0)-\cancel{fFu'(s_0)v'(s_0)}-fGv'(s_0)^2+fEu'(s_0)^2+\cancel{fFu'(s_0)v'(s_0)}+gEu'(s_0)v'(s_0)+$$
$$+gFv'(s_0)^2)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot((-eF+fE)u'(s_0)^2+(-eG+gE)u'(s_0)v'(s_0)+(-fG+gF)v'(s_0)^2).$$

С друге стране, $n_\gamma'(s_0)=n_u(u(s_0),v(s_0))\cdot u'(s_0)+n_v(u(s_0),v(s_0))\cdot v'(s_0)$. Ако је $\beta_i^j=\beta_i^j(u(s_0),v(s_0))$ за све $i,j\in\{1,2\}$ (β_i^j су коефицијенти Вајнгартенових једначина), онда је

$n_u(u(s_0),v(s_0))=\beta_1^1 r_u(u(s_0),v(s_0))+\beta_1^2 r_v(u(s_0),v(s_0))$ и

$n_v(u(s_0),v(s_0))=\beta_2^1 r_u(u(s_0),v(s_0))+\beta_2^2 r_v(u(s_0),v(s_0))$ (саме Вајнгартенове једначине). Према томе, $n_\gamma'(s_0)=(\beta_1^1\cdot u'(s_0)+\beta_2^1 v'(s_0))r_u(u(s_0),v(s_0))+(\beta_1^2 u'(s_0)+\beta_2^2 v'(s_0))r_v(u(s_0),v(s_0))$, па је

$$\tau_g=\tau_g(s_0)=\langle n_\gamma'(s_0),S_\gamma(s_0)\rangle=\mathrm{I}(n_\gamma'(s_0),S_\gamma(s_0))=(\beta_1^1\cdot u'(s_0)+\beta_2^1 v'(s_0)\ \ \ \beta_1^2\cdot u'(s_0)+\beta_2^2\cdot v'(s_0))\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-F\cdot u'(s_0)-G\cdot v'(s_0)}{\sqrt{EG-F^2}}\\\frac{E u'(s_0)+F\cdot v'(s_0)}{\sqrt{EG-F^2}}\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}((\beta_1^1\cdot E+\beta_1^2F)\cdot u'(s_0)+(\beta_2^1E+\beta_2^2F)\cdot v'(s_0)\ \ \ (\beta_1^1F+\beta_1^2G)\cdot u'(s_0)+(\beta_2^1F+\beta_2^2G)v'(s_0))\begin{pmatrix}-Fu'(s_0)-G\cdot v'(s_0)\\E\cdot u'(s_0)+F\cdot v'(s_0)\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}((\cancel{-\beta_1^1EF}-\beta_1^2F^2)\cdot u'(s_0)^2+(-\beta_1^1EG-\cancel{\beta_1^2FG}-\beta_2^1EF-\beta_2^2F^2)u'(s_0)v'(s_0)+(-\beta_2^1EG-\cancel{\beta_2^2FG})v'(s_0)^2+$$
$$+(\cancel{\beta_1^1EF}+\beta_1^2EG)\cdot u'(s_0)^2+(\beta_1^1F^2+\cancel{\beta_1^2FG}+\beta_2^1EF+\beta_2^2EG)u'(s_0)v'(s_0)+(\beta_2^1F^2+\cancel{\beta_2^2FG})v'(s_0)^2=$$

$=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\beta_1^2\cdot(EG-F^2)\cdot u'(s_0)^2+\left(-\beta_1^1(EG-F^2)+\beta_2^2(EG-F^2)\right)u'(s_0)\cdot v'(s_0)+\left(-\beta_2^1(EG-F^2)\right)v'(s_0)^2\right)$. Како је
$\beta_1^1=\frac{-eG+fF}{EG-F^2}$, $\beta_1^2=\frac{-fE+eF}{EG-F^2}$, $\beta_2^1=\frac{-fG+gF}{EG-F^2}$, $\beta_2^2=\frac{-gE+fF}{EG-F^2}$, следи да је
$\tau_g=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left((-fE+eF)u'(s_0)^2+(eG-\cancel{fF}-gE+\cancel{fF})u'(s_0)v'(s_0)+(fG-gF)v'(s_0)^2\right)=-\mathrm{II}(T_\gamma,S_\gamma)$, што је и требало доказати.

(б) Ако је $\theta(s)$ угао који заклапају $n_\gamma(s)$ и $N_\gamma(s)$ у тачки $\gamma(s)$, онда је $N_\gamma(s)=\cos\theta(s)\cdot n_\gamma(s)+\sin\theta(s)\cdot S_\gamma(s)$.
Како је $\kappa(s)N_\gamma(s)=T'_\gamma(s)=\kappa_n(s)n_\gamma(s)+\kappa_g(s)S_\gamma(s)$, следи да је $N_\gamma(s)=\frac{\kappa_n(s)}{\kappa(s)}n_\gamma(s)+\frac{\kappa_g(s)}{\kappa(s)}S_\gamma(s)$, тј. да је $\cos\theta(s)=\frac{\kappa_n(s)}{\kappa(s)}$ и $\sin\theta(s)=\frac{\kappa_g(s)}{\kappa(s)}$. Диференцирањем по s добијамо
$N'_\gamma(s)=-\sin\theta(s)\cdot\theta'(s)n_\gamma(s)+\cos\theta(s)\cdot n'_\gamma(s)+\cos\theta(s)\cdot\theta'(s)\cdot S_\gamma(s)+\sin\theta(s)\cdot S'_\gamma(s)$. Даље,
$B_\gamma(s)=T_\gamma(s)\times N_\gamma(s)=T_\gamma(s)\times\left(\cos\theta(s)n_\gamma(s)+\sin\theta(s)\cdot S_\gamma(s)\right)=\boxed{-\cos\theta(s)S_\gamma(s)+\sin\theta(s)\cdot n_\gamma(s)}$ (пошто је $S_\gamma(s)=n_\gamma(s)\times T_\gamma(s)$, онда је $T_\gamma(s)\times n_\gamma(s)=-S_\gamma(s)$ и $T_\gamma(s)\times S_\gamma(s)=T_\gamma(s)\times(n_\gamma(s)\times T_\gamma(s))=\underbrace{\langle T_\gamma(s),T_\gamma(s)\rangle}_{=1}n_\gamma(s)-\underbrace{\langle T_\gamma(s),n_\gamma(s)\rangle}_{=0}T_\gamma(s)=n_\gamma(s)$). Такође, $n'_\gamma(s)=-\kappa_n(s)T_\gamma(s)+\tau_g(s)S_\gamma(s)$ и $S'_\gamma(s)=-\kappa_g(s)T_\gamma(s)-\tau_g(s)n_\gamma(s)$, па је $N'_\gamma(s)=-\sin\theta(s)\cdot\theta'(s)n_\gamma(s)+\cos\theta(s)\cdot\left(-\kappa_n(s)T_\gamma(s)+\tau_g(s)S_\gamma(s)\right)+\cos\theta(s)\cdot\theta'(s)\cdot S_\gamma(s)+\sin\theta(s)\cdot\left(-\kappa_g(s)T_\gamma(s)-\tau_g(s)n_\gamma(s)\right)=\left(-\kappa_n(s)\cos\theta(s)-\kappa_g(s)\sin\theta(s)\right)T_\gamma(s)+\cos\theta(s)\left(\tau_g(s)+\theta'(s)\right)S_\gamma(s)-\sin\theta(s)\left(\theta'(s)+\tau_g(s)\right)n_\gamma(s)$.
Како је из Френе-Сереових формула $N'_\gamma(s)=-\kappa(s)T_\gamma(s)+\tau(s)B_\gamma(s)$, следи да је
$\tau(s)=\langle N'_\gamma(s),B_\gamma(s)\rangle=-\cos^2\theta(s)\left(\tau_g(s)+\theta'(s)\right)-\sin^2\theta(s)\left(\tau_g(s)+\theta'(s)\right)=\tau_g(s)+\theta'(s)\cdot\left(-\cos^2\theta(s)-\sin^2\theta(s)\right)=$
$=-\tau_g(s)-\theta'(s)$, па следи да је $\tau_g(s)=-\tau(s)-\theta'(s)=-\tau(s)-\frac{d\theta}{ds}$.

16. Дата је Енеперова површ $r(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,-v+\frac{v^3}{3}-vu^2,u^2-v^2\right)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.
(а) Доказати да се параметризација сфере индукована Гаусовим пресликавањем Енеперове површи поклапа са оном добијеном стереографском пројекцијом.
(б) Одредити главне и асимптотске правце дате површи и одредити углове између њих.
(в) Одредити главне линије (линије кривине) и асимптотске линије дате површи.
(а) Параметризација сфере индукована Гаусовим пресликавањем поклапа се с пресликавањем n које тачки (u,v) придружује нормални вектор $n(u,v)$ површи r у тачки $r(u,v)$.

$$r_u(u,v)=(1-u^2+v^2,-2uv,2u)$$
$$r_v(u,v)=(2uv,-1+v^2-u^2,-2v)$$
$$r_u(u,v)\times r_v(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1-u^2+v^2&-2uv&2u\\2uv&-1+v^2-u^2&-2v\end{vmatrix}=\left(4uv^2-2u(-1+v^2-u^2),4u^2v+2v(1-u^2+v^2),(1-u^2+v^2)(-1+v^2-u^2)+4u^2v^2\right)=$$
$$=\left(4uv^2+2u-2uv^2+2u^3,4u^2v+2v-2u^2v+2v^3,(-u^2+v^2)^2-1^2+4u^2v^2\right)=$$
$$=\left(2u+2uv^2+2u^3,2v+2u^2v+2v^3,u^4-2u^2v^2+v^4-1+4u^2v^2\right)=$$
$$=\left(2u(1+v^2+u^2),2v(1+u^2+v^2),u^4+2u^2v^2+v^4-1\right)=$$
$$=\left(2u(u^2+v^2+1),2v(u^2+v^2+1),(u^2+v^2)^2-1\right)=\left(2u(u^2+v^2+1),2v(u^2+v^2+1),(u^2+v^2-1)(u^2+v^2+1)\right)$$
$$\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2=4u^2(u^2+v^2+1)^2+4v^2(u^2+v^2+1)^2+(u^4+v^4+1+2u^2v^2-2u^2-2v^2)(u^2+v^2+1)^2=$$
$$=(u^2+v^2+1)^2(u^4+v^4+1+2u^2v^2+2u^2+2v^2)=(u^2+v^2+1)^2(u^2+v^2+1)^2=(u^2+v^2+1)^4$$

Дакле, $n(u,v)=\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}=\frac{(2u(u^2+v^2+1),\,2v(u^2+v^2+1),\,(u^2+v^2-1)(u^2+v^2+1))}{(u^2+v^2+1)^2}=\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$,
што заиста одговара параметризацији сфере помоћу стереографске пројекције.

(б) За одређивање главних и асимптотских праваца потребни су коефицијенти прве и друге основне форме.

$$E(u,v)=\langle r_u(u,v),r_v(u,v)\rangle=(1-u^2+v^2)^2+4u^2v^2+4u^2=1+u^4+v^4-2u^2+2v^2-2u^2v^2+4u^2v^2+4u^2=$$
$$=u^4+v^4+1+2u^2v^2+2u^2+2v^2=(u^2+v^2+1)^2$$
$$F(u,v)=\langle r_u(u,v),r_v(u,v)\rangle=2uv(1-u^2+v^2)-2uv(-1+v^2-u^2)-4uv=2uv(\cancel{1}\cancel{-u^2}\cancel{+v^2}\cancel{+1}\cancel{-v^2}\cancel{+u^2}\cancel{-2})=0$$
$$G(u,v)=\langle r_v(u,v),r_v(u,v)\rangle=4u^2v^2+(-1+v^2-u^2)^2+4v^2=4u^2v^2+1+v^4+u^4-2v^2+2u^2-2u^2v^2+4v^2=$$
$$=u^4+v^4+1+2u^2+2u^2v^2+2v^2=(u^2+v^2+1)^2$$

$$r_{uu}(u,v)=(-2u,-2v,2)$$
$$r_{uv}(u,v)=(2v,-2u,0)$$
$$r_{vv}(u,v)=(2u,2v,-2)$$
$$e(u,v)=\langle r_{uu}(u,v),n(u,v)\rangle=\frac{-4u^2}{u^2+v^2+1}+\frac{-4v^2}{u^2+v^2+1}+\frac{2u^2+2v^2-2}{u^2+v^2+1}=\frac{-2u^2-2v^2-2}{u^2+v^2+1}=-2\frac{\cancel{u^2+v^2+1}}{\cancel{u^2+v^2+1}}=-2$$
$$f(u,v)=\langle r_{uv}(u,v),n(u,v)\rangle=\frac{2u\cancel{v}}{u^2+v^2+1}+\frac{-2u\cancel{v}}{\cancel{u^2+v^2+1}}+0=0$$
$$g(u,v)=\langle r_{vv}(u,v),n(u,v)\rangle=\frac{4u^2}{u^2+v^2+1}+\frac{4v^2}{u^2+v^2+1}+\frac{-2u^2-2v^2+2}{u^2+v^2+1}=\frac{2u^2+2v^2+2}{u^2+v^2+1}=2\cdot\frac{\cancel{u^2+v^2+1}}{\cancel{u^2+v^2+1}}=2$$

Нека је $p=r(u_0,v_0)$, $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2$, произвољна тачка Енеперове површи. У тангентном простору T_pr главни вектори $V_1=a_1r_u(u_0,v_0)+b_1r_v(u_0,v_0)$ и $V_2=a_2r_u(u_0,v_0)+b_2r_v(u_0,v_0)$ могу се добити из једначине

$$\begin{vmatrix}-b^2 & ab & -a^2\\ e & f & g\\ E & F & G\end{vmatrix}=0,\ \text{тј.}\ \begin{vmatrix}-b^2 & ab & a^2\\ -2 & 0 & 2\\ (u_0^2+v_0^2+1)^2 & 0 & (u_0^2+v_0^2+1)^2\end{vmatrix}=0.$$

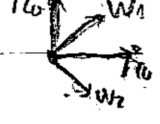
Развијањем по другој колони добијамо $-ab\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ (u_0^2+v_0^2+1)^2 & (u_0^2+v_0^2+1)^2\end{vmatrix}=0$, тј. $-ab\cdot(u_0^2+v_0^2+1)^2\overbrace{\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}^{=-2-2=-4}=0$, односно $4ab(u_0^2+v_0^2+1)^2=0$.

Како је $(u_0^2+v_0^2+1)^2\neq0$, следи $a=0$ или $b=0$. Другим речима, главни вектори су облика $a\cdot r_u(u_0,v_0)$, $a\neq0$ и $b\cdot r_v(u_0,v_0)$, $b\neq0$, односно вектори брзине координатних линија. Асимптотске правце $W=c\cdot r_u(u_0,v_0)+d\cdot r_v(u_0,v_0)$ добијамо из $0=k_n(W)=\frac{II(W,W)}{I(W,W)}$, тј. $II(W,W)=0$.

Дакле, $(c\ d)\begin{pmatrix}e & f\\ f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=0$, тј. $(c\ d)\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=0$.

$$(-2c\ \ 2d)\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=0$$
$$-2c^2+2d^2=0$$
$$2c^2=2d^2$$
$$c^2=d^2\Rightarrow c=\pm d$$

Према томе, асимптотски вектори су облика $W_1=c\cdot r_u(u_0,v_0)+c\cdot r_v(u_0,v_0)$ и $W_2=c\cdot r_u(u_0,v_0)-c\cdot r_v(u_0,v_0)$.
Како је $F(u_0,v_0)=0$, вектори $r_u(u_0,v_0)$ и $r_v(u_0,v_0)$ су нормални (што мора важити, пошто су они главни), а вектори W_1 и W_2 заклапају угао $\frac{\pi}{4}$ са одговарајућим главним векторима.



(в) Главне линије (линије кривине) површи $r: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, јесу криве $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ такве да је за свако t вектор брзине криве α главни вектор површи r у тачки $r(u(t), v(t))$. Асимптотске линије на тој површи су криве чија је нормална кривина у свакој тачки једнака нули, што је потпуно исто (по дефиницији) да је у свакој њеној тачки вектор брзине асимптотски вектор.

Како су вектори брзине координатних линија главни вектори у свакој тачки Енеперове површи, r параметризоване као у поставци задатка, следи да су оне главне линије. Штавише, за параметризацију се онда каже да је главна. Потребан и довољан услов је $F = f = 0$ у свакој тачки. У општем случају, вектор брзине $\alpha'(t) = r_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + r_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$ мора задовољавати $\begin{vmatrix} -v'(t)^2 & u'(t)v'(t) & -u'(t)^2 \\ e(u(t),v(t)) & f(u(t),v(t)) & g(u(t),v(t)) \\ E(u(t),v(t)) & F(u(t),v(t)) & G(u(t),v(t)) \end{vmatrix} = 0$, тј. треба решити диференцијалну једначину с непознатим функцијама $u(t), v(t)$.

Крива $\beta(t) = r(u_\beta(t), v_\beta(t))$ јесте асимптотска ако је $K_n(\beta'(t)) = 0$ за свако t. Како је $K_n(\beta'(t)) = \frac{\mathrm{II}(\beta'(t), \beta'(t))}{\mathrm{I}(\beta'(t), \beta'(t))}$, следи да је β асимптотска ако је $\mathrm{II}(\beta'(t), \beta'(t)) = 0$ за свако t. Како је $\beta'(t) = r_u(u_\beta(t), v_\beta(t)) \cdot u_\beta'(t) + r_v(u_\beta(t), v_\beta(t)) \cdot v_\beta'(t)$, следи да је $\mathrm{II}(\beta'(t), \beta'(t)) = (u_\beta'(t) \;\; v_\beta'(t)) \begin{pmatrix} e(u_\beta(t), v_\beta(t)) & f(u_\beta(t), v_\beta(t)) \\ f(u_\beta(t), v_\beta(t)) & g(u_\beta(t), v_\beta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta'(t) \\ v_\beta'(t) \end{pmatrix}$, па се асимптотске линије добијају решавањем диференцијалне једначине с непознатим функцијама $u_\beta(t), v_\beta(t)$. Како је $e(u,v) = -2$, $f(u,v) = 0$ и $g(u,v) = 2$ за свако $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, специјално је $e(u_\beta(t), v_\beta(t)) = -2$, $f(u_\beta(t), v_\beta(t)) = 0$ и $g(u_\beta(t), v_\beta(t)) = 2$ за свако t (тј. коефицијенти e, f, g су $-2, 0, 2$ дуж криве β). Добијамо

$$(u_\beta'(t) \;\; v_\beta'(t)) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta'(t) \\ v_\beta'(t) \end{pmatrix} = 0$$

$$(-2u_\beta'(t) \;\; 2v_\beta'(t)) \begin{pmatrix} u_\beta'(t) \\ v_\beta'(t) \end{pmatrix} = 0$$

$$-\cancel{2}u_\beta'(t)^2 + \cancel{2}v_\beta'(t)^2 = 0$$

$$u_\beta'(t)^2 = v_\beta'(t)^2$$

$$u_\beta'(t) = v_\beta'(t) \text{ или } u_\beta'(t) = -v_\beta'(t)$$

$$u_\beta(t) = v_\beta(t) + c \text{ или } u_\beta(t) = -v_\beta(t) + d$$

Дакле, решења су било какве функције $u_\beta(t), v_\beta(t)$ такве да је $u_\beta(t) = v_\beta(t) + c$ или $u_\beta(t) = -v_\beta(t) + d$. Следи да су $\beta_1^c(t) = r(v_\beta(t) + c, v_\beta(t))$, $c \in \mathbb{R}$ и $\beta_2^d(t) = r(-v_\beta(t) + d, v_\beta(t))$, $d \in \mathbb{R}$. Уведимо репараметризацију кривих β_1^c, β_2^d тако да је v нови параметар и добићемо $\tilde{\beta}_1^c(v) = r(v + c, v)$, $\tilde{\beta}_2^d(v) = r(-v + d, v)$.

17. Репараметризовати следеће површи тако да важи $F = f = 0$:

(а) хеликоид $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$, $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

(б) седло $z = xy$.

Тражимо репараметризације ових површи код којих је $F = f = 0$, тј. чије су координатне линије главне. Стога потражимо главне линије ових површи.

(а) $r_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 0)$

$r_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, a)$

$E(u,v) = \langle r_u(u,v), r_u(u,v) \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$

$F(u,v) = \langle r_u(u,v), r_v(u,v) \rangle = \cancel{-u\cos v \sin v + u \sin v \cos v} + 0 = 0$

$$G(u,v)=\langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle = u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+a^2=u^2+a^2$$

$$r_u(u,v)\times r_v(u,v)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}=(a\sin v, -a\cos v, u\cos^2 v+u\sin^2 v)=(a\sin v, -a\cos v, u)$$

$$\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2=a^2\sin^2 v+a^2\cos^2 v+u^2=a^2+u^2 \Rightarrow \|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|=\sqrt{a^2+u^2}$$

$$n(u,v)=\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}=\frac{(a\sin v, -a\cos v, u)}{\sqrt{a^2+u^2}}=\left(\frac{a\sin v}{\sqrt{a^2+u^2}}, -\frac{a\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}\right)$$

$$r_{uu}(u,v)=(0,0,0)$$

$$r_{uv}(u,v)=(-\sin v, \cos v, 0)$$

$$r_{vv}(u,v)=(-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

$$e(u,v)=\langle r_{uu}(u,v), n(u,v)\rangle=0$$

$$f(u,v)=\langle r_{uv}(u,v), n(u,v)\rangle=-\frac{a\sin^2 v}{\sqrt{a^2+u^2}}-\frac{a\cos^2 v}{\sqrt{a^2+u^2}}+0=-\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}$$

$$g(u,v)=\langle r_{vv}(u,v), n(u,v)\rangle=-\cancel{\frac{au\sin v\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}}}+\cancel{\frac{au\cos v\sin v}{\sqrt{a^2+u^2}}}+0=0$$

Крива $\alpha(t)=r(u(t),v(t))$ је главна ако важи

$$\begin{vmatrix} -v'(t)^2 & u'(t)v'(t) & -u'(t)^2 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+u(t)^2}} & 0 \\ 1 & 0 & u(t)^2+a^2 \end{vmatrix}=0.$$

$$-\frac{a}{\sqrt{a^2+u(t)^2}}\cdot\begin{vmatrix} -v'(t)^2 & -u'(t)^2 \\ 1 & u(t)^2+a^2 \end{vmatrix}=0$$

$$-v'(t)^2(u(t)^2+a^2)+u'(t)^2=0$$

$$u'(t)^2=v'(t)(u(t)^2+a^2)$$

$$u'(t)=v'(t)\sqrt{u(t)^2+a^2} \quad \text{или} \quad u'(t)=-v'(t)\sqrt{u(t)^2+a^2}$$

Ово су примери диференцијалних једначина које раздвајају променљиве и решавају се тако што се с једне стране једнакости ставе изрази који садрже једну непознату функцију, а с друге стране другу непознату (раздвојимо их).

$$v'(t)=\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)^2+a^2}} \quad \text{или} \quad v'(t)=-\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)^2+a^2}}$$

$$v(t)=\int\frac{u'(t)dt}{\sqrt{u(t)^2+a^2}} \quad \text{или} \quad v(t)=-\int\frac{u'(t)dt}{\sqrt{u(t)^2+a^2}}$$

Смена: $u(t)=x$, $u'(t)dt=dx$

$$\int\frac{u'(t)dt}{\sqrt{u(t)^2+a^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\left\{\begin{matrix} x=|a|\operatorname{sh} y \\ dx=|a|\operatorname{ch} y\,dy \end{matrix}\right\}=\int\frac{|a|\operatorname{ch} y\,dy}{\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 y+a^2}}=\int\frac{|a|\operatorname{ch} y\,dy}{\sqrt{a^2\underbrace{(\operatorname{sh}^2 y+1)}_{\operatorname{ch}^2 y}}}=\int\frac{|a|\operatorname{ch} y\,dy}{|a|\operatorname{ch} y}=y+c=\operatorname{arsh}\frac{x}{|a|}+c=\operatorname{arsh}\frac{u(t)}{|a|}+c$$

Дакле, $v(t)=\operatorname{arsh}\frac{u(t)}{|a|}+c$, $c\in\mathbb{R}$ или је $v(t)=-\operatorname{arsh}\frac{u(t)}{|a|}+d$, $d\in\mathbb{R}$. Пошто се јављају и $|a|$ и $-|a|$, можемо рећи да су решења $v(t)=\operatorname{arsh}\frac{u(t)}{a}+c$ и $v(t)=-\operatorname{arsh}\frac{u(t)}{|a|}+d$, за неке $c,d\in\mathbb{R}$. У новој параметризацији $\tilde{r}(\tilde{u},\tilde{v})$, где је $(\tilde{u},\tilde{v})=\Phi(u,v)$ за неки дифеоморфизам Φ, координатне линије су $\alpha_{\tilde{v}_0}(\tilde{u})=\tilde{r}(\tilde{u},\tilde{v}_0)$ и $\beta_{\tilde{u}_0}(\tilde{v})=\tilde{r}(\tilde{u}_0,\tilde{v})$, што се може записати као $\tilde{v}=const$ (за криву $\alpha_{\tilde{v}_0}$) и $\tilde{u}=const$ (за криву $\beta_{\tilde{u}_0}$). Такође, пошто је $\tilde{r}$ репараметризација r, важи $r(u,v)=\tilde{r}(\Phi(u,v))$, т.ј. $\tilde{r}(\tilde{u},\tilde{v})=r(\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}))$, где је $\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v})=(u,v)$. За један тип главних линија на r важи $v=\operatorname{arsh}\frac{u}{a}+c$, те је $\operatorname{arsh}\frac{u}{a}-v=-c=const$, а за други тип главних линија на r важи $v=-\operatorname{arsh}\frac{u}{a}+d$, те је $\operatorname{arsh}\frac{u}{a}+v=d=const$. Зато ћемо рећи $(\tilde{u},\tilde{v})=\Phi(u,v)=(\operatorname{arsh}\frac{u}{a}+v,\operatorname{arsh}\frac{u}{a}-v)$, како би на површи $\tilde{r}(\tilde{u},\tilde{v})$, насталој репараметризацијом површи r, координатне линије $\tilde{v}=const$ и $\tilde{u}=const$ заправо биле $\operatorname{arsh}\frac{u}{a}-v=const$ и $\operatorname{arsh}\frac{u}{a}+v=const$, а то су управо главне линије! Према томе, $(\tilde{u},\tilde{v})=\Phi(u,v)=(\operatorname{arsh}\frac{u}{a}+v,\operatorname{arsh}\frac{u}{a}-v)$ представља трансформацију координата. Докажимо да је Φ дифеоморфизам.

$$\tilde{u}=\operatorname{arsh}\frac{u}{a}+v$$
$$\tilde{v}=\operatorname{arsh}\frac{u}{a}-v$$
$$\tilde{u}+\tilde{v}=2\operatorname{arsh}\frac{u}{a}$$
$$\tilde{u}-\tilde{v}=2v$$
$$u=a\operatorname{sh}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}$$
$$v=\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}$$

$(u,v)=\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v})=\left(a\operatorname{sh}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2},\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}\right)\Rightarrow\Phi$ је бијекција

Φ^{-1} је очигледно диференцијабилно. $(\Phi^{-1})^{-1}=\Phi$ је диференцијабилно

$$\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial\tilde{v}}\\ \frac{\partial v}{\partial\tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial\tilde{v}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\operatorname{ch}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\cdot\frac{1}{2} & a\cdot\operatorname{ch}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}a\cdot\operatorname{ch}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}-\frac{1}{4}\cdot a\operatorname{ch}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}=-\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{ch}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\neq0$$

Према томе, тражена репараметризација је $\tilde{r}(\tilde{u},\tilde{v})=r(\Phi^{-1}(u,v))=r\left(a\cdot\operatorname{sh}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2},\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}\right)$, т.ј.

$$\tilde{r}(\tilde{u},\tilde{v})=\left(a\cdot\operatorname{sh}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\cos\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2},\ a\cdot\operatorname{sh}\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\sin\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2},\ a\cdot\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}\right).$$

(б) Могућа параметризација седла $z=xy$ је $r(x,y)=(x,y,xy)$. Одредимо његове главне линије.

$$r_x(x,y)=(1,0,y)$$
$$r_y(x,y)=(0,1,x)$$
$$r_x(x,y)\times r_y(x,y)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & y\\ 0 & 1 & x\end{vmatrix}=(-y,-x,1)$$
$$\|r_x(x,y)\times r_y(x,y)\|^2=y^2+x^2+1\Rightarrow\|r_x(x,y)\times r_y(x,y)\|=\sqrt{1+x^2+y^2}$$
$$n(x,y)=\frac{r_x(x,y)\times r_y(x,y)}{\|r_x(x,y)\times r_y(x,y)\|}=\frac{(-y,-x,1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=\left(-\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},-\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$$
$$E(x,y)=\langle r_x(x,y),r_x(x,y)\rangle=1+y^2$$
$$F(x,y)=\langle r_x(x,y),r_y(x,y)\rangle=xy$$
$$G(x,y)=\langle r_y(x,y),r_y(x,y)\rangle=1+x^2$$
$$r_{xx}(x,y)=(0,0,0)$$
$$r_{xy}(x,y)=(0,0,1)$$
$$r_{yy}(x,y)=(0,0,0)$$

$e(x,y)=\langle r_{xx}(x,y), n(x,y)\rangle = 0$
$f(x,y)=\langle r_{xy}(x,y), n(x,y)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$
$g(x,y)=\langle r_{yy}(x,y), n(x,y)\rangle = 0$

Диференцијална једначина коју задовољава главна линија $\alpha(t)=r(x(t),y(t))$ је

$$\begin{vmatrix} -y'(t)^2 & x'(t)y'(t) & -x'(t)^2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x(t)^2+y(t)^2}} & 0 \\ 1+y(t)^2 & x(t)y(t) & 1+x(t)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{1+x(t)^2+y(t)^2}}} \begin{vmatrix} -y'(t)^2 & -x'(t)^2 \\ 1+y(t)^2 & 1+x(t)^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-y'(t)^2(1+x(t)^2)+x'(t)^2(1+y(t)^2)=0$$

$$x'(t)^2(1+y(t)^2)=y'(t)^2(1+x(t)^2)$$

$$x'(t)\sqrt{1+y(t)^2}=y'(t)\sqrt{1+x(t)^2} \qquad x'(t)\sqrt{1+y(t)^2}=-y'(t)\sqrt{1+x(t)^2}$$

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{1+x(t)^2}}=\frac{y'(t)}{\sqrt{1+y(t)^2}} \qquad \frac{x'(t)}{\sqrt{1+x(t)^2}}=-\frac{y'(t)}{\sqrt{1+y(t)^2}}$$

$$\int\frac{x'(t)dt}{\sqrt{1+x(t)^2}}=\int\frac{y'(t)dt}{\sqrt{1+y(t)^2}} \qquad \int\frac{x'(t)dt}{\sqrt{1+x(t)^2}}=-\int\frac{y'(t)dt}{\sqrt{1+y(t)^2}}$$

Пошто сви интеграли имају исти облик, довољно је решити један.

$$\int\frac{x'(t)dt}{\sqrt{1+x(t)^2}}=\begin{Bmatrix} u=x(t) \\ du=x'(t)dt\end{Bmatrix}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\begin{Bmatrix} u=\operatorname{sh}\vartheta \\ du=\operatorname{ch}\vartheta d\vartheta\end{Bmatrix}=\int\frac{\operatorname{ch}\vartheta d\vartheta}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\vartheta}}=\int\frac{\operatorname{ch}\vartheta d\vartheta}{\operatorname{ch}\vartheta}=\int d\vartheta=\vartheta+c=$$

$$=\operatorname{arsh}u+c=\operatorname{arsh}x(t)+c$$

$\operatorname{arsh}x(t)=\operatorname{arsh}y(t)+c$ или $\operatorname{arsh}x(t)=-\operatorname{arsh}y(t)+d$

Слично као малопре, уведимо $(u,\vartheta)=\Phi(x,y)=(\operatorname{arsh}x+\operatorname{arsh}y, \operatorname{arsh}x-\operatorname{arsh}y)$. Овакво Φ се уводи да би на површи $\tilde{r}(u,\vartheta)=r(\Phi^{-1}(u,\vartheta))$ координатне линије $\vartheta=const$ и $u=const$, што су $\operatorname{arsh}x+\operatorname{arsh}y=const$ и $\operatorname{arsh}x-\operatorname{arsh}y=const$ биле главне линије. Треба проверити да ли је Φ дифеоморфизам.

$u=\operatorname{arsh}x+\operatorname{arsh}y$
$\vartheta=\operatorname{arsh}x-\operatorname{arsh}y$
$u+\vartheta=2\operatorname{arsh}x$
$u-\vartheta=2\operatorname{arsh}y$
$x=\operatorname{sh}\frac{u+\vartheta}{2}$
$y=\operatorname{sh}\frac{u-\vartheta}{2}$

Φ је бијекција. $\Phi^{-1}(u,\vartheta)=\left(\operatorname{sh}\frac{u+\vartheta}{2}, \operatorname{sh}\frac{u-\vartheta}{2}\right)$ је диференцијабилно.

$$\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}\frac{u+\vartheta}{2}\cdot\frac{1}{2} & \operatorname{ch}\frac{u+\vartheta}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ \operatorname{ch}\frac{u-\vartheta}{2}\cdot\frac{1}{2} & \operatorname{ch}\frac{u-\vartheta}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\operatorname{ch}\frac{u+\vartheta}{2}\operatorname{ch}\frac{u-\vartheta}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{ch}\frac{u+\vartheta}{2}\operatorname{ch}\frac{u-\vartheta}{2}=-\frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{u+\vartheta}{2}\operatorname{ch}\frac{u-\vartheta}{2}\neq 0$$

$\Rightarrow (\Phi^{-1})^{-1}=\Phi$ је диференцијабилно

Дакле, тражена репараметризација седла је $\tilde{r}(u,\vartheta)=r(\Phi^{-1}(u,\vartheta))=r\left(\operatorname{sh}\frac{u+\vartheta}{2}, \operatorname{sh}\frac{u-\vartheta}{2}\right)$, т.ј.

$$\tilde{r}(u,\vartheta)=\left(\operatorname{sh}\frac{u+\vartheta}{2}, \operatorname{sh}\frac{u-\vartheta}{2}, \operatorname{sh}\frac{u+\vartheta}{2}\operatorname{sh}\frac{u-\vartheta}{2}\right).$$

18. Одредити геодезијске линије кружног цилиндра.

На регуларној елементарној површи $r: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, природно параметризована крива $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ јесте геодезијска линија ако и само ако важи

$$u''(s) + \Gamma_{11}^1(u(s),v(s)) \cdot u'(s)^2 + 2\Gamma_{12}^1(u(s),v(s)) \cdot u'(s)v'(s) + \Gamma_{22}^1(u(s),v(s)) \cdot v'(s)^2 = 0$$

$$v''(s) + \Gamma_{11}^2(u(s),v(s)) \cdot u'(s)^2 + 2\Gamma_{12}^2(u(s),v(s)) \cdot u'(s)v'(s) + \Gamma_{22}^2(u(s),v(s)) \cdot v'(s)^2 = 0,$$

Крива мора бити природно параметризована, тј. мора важити $I(\alpha'(s),\alpha'(s)) = 1$ за свако s, тј.

$$\begin{pmatrix} u'(s) & v'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u(s),v(s)) & F(u(s),v(s)) \\ F(u(s),v(s)) & G(u(s),v(s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{pmatrix} = 1.$$

Ако за произвољно параметризовану криву $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ желимо да проверимо да ли је геодезијска линија на површи r, проверавамо да ли је $k_g(t) = 0$, тј. $[n(u(t),v(t)), \alpha'(t), \alpha''(t)] = 0$.

Обрасци за рачунање Кристофелових симбола Γ_{ij}^k $(1 \le i \le j \le 2,\ k \in \{1,2\})$:

$$\Gamma_{11}^1(u,v) = \frac{E_u(u,v)G(u,v) - 2F_u(u,v)F(u,v) + E_v(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2(u,v) = \frac{2F_u(u,v)E(u,v) - E_v(u,v)E(u,v) - E_u(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2)}$$

$$\Gamma_{12}^1(u,v) = \frac{E_v(u,v)G(u,v) - G_u(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2)}$$

$$\Gamma_{12}^2(u,v) = \frac{G_u(u,v)E(u,v) - E_v(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1(u,v) = \frac{2F_v(u,v)G(u,v) - G_u(u,v)G(u,v) - G_v(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2)}$$

$$\Gamma_{22}^2(u,v) = \frac{G_v(u,v)E(u,v) - 2F_v(u,v)F(u,v) + G_u(u,v)F(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2)}$$ (не морају се учити напамет).

$$E_u(u,v) = \frac{\partial E}{\partial u}(u,v)$$
$$E_v(u,v) = \frac{\partial E}{\partial v}(u,v)$$
$$F_u(u,v) = \frac{\partial F}{\partial u}(u,v)$$
$$F_v(u,v) = \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$$
$$G_u(u,v) = \frac{\partial G}{\partial u}(u,v)$$
$$G_v(u,v) = \frac{\partial G}{\partial v}(u,v)$$

Кружни цилинар $x^2+y^2=a^2$ може бити параметризован са $r: (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$r(u,v) = (a\cos v, a\sin v, u)$. Добијамо

$r_u(u,v) = (0,0,1)$

$r_v(u,v) = (-a\sin v, a\cos v, 0)$

$E(u,v) = \langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle = 0^2+0^2+1^2 = 1$

$F(u,v) = \langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle = 0+0+0 = 0$

$G(u,v) = \langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle = a^2\sin^2 v + a^2\cos^2 v + 0^2 = a^2$

Дакле, сви парцијални изводи функција E, F, G су нула (јер су E, F, G константне), па су и Кристофелови симболи Γ_{ij}^k сви једнаки нули. Дакле, природно параметризована крива $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ јесте геодезијска ако и само ако је $u''(s)=0$, $v''(s)=0$ и $I(\alpha'(s),\alpha'(s)) = 1$.

$u''(s) = 0 \Rightarrow u'(s) = c_1 \Rightarrow u(s) = c_1 s + d_1$

$v''(s) = 0 \Rightarrow v'(s) = c_2 \Rightarrow v(s) = c_2 s + d_2$

$\alpha'(s) = r_u(u(s),v(s)) \cdot u'(s) + r_v(u(s),v(s)) \cdot v'(s) = c_1 \cdot r_u(u(s),v(s)) + c_2 \cdot r_v(u(s),v(s))$

$$I(\alpha'(s),\alpha'(s)) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & a^2 c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1^2 + a^2 c_2^2 \Rightarrow c_1^2 + a^2 c_2^2 = 1$$

Ако је $c_1 = 0$, онда је $a^2 c_2^2 = 1$, тј. $c_2 = \pm\frac{1}{a}$, па се добијају криве $\alpha_1(s) = r(d_1, \frac{s}{a} + d_2)$ и $\alpha_2(s) = r(d_1, -\frac{s}{a} + d_2)$, чији су трагови паралеле на ротационој површи, што су кружнице.

Ако је $c_2=0$, онда је $c_1^2=1$, па је $c_1=\pm 1$, па добијамо криве $\alpha_3(s)=r(s+d_1, d_2)$ и $\alpha_4(s)=r(-s+d_1, d_2)$, чији су трагови меридијани на ротационој површи, што су изводнице овог цилиндра, тј. праве. Ако је $c_1\neq 0$ и $c_2\neq 0$, криву можемо репараметризовати уводећи нови параметар t помоћу $t=c_2s+d_2$. Тада је $s=\frac{t-d_2}{c_2}$ и $c_1s+d_1=c_1\frac{t-d_2}{c_2}+d_1=\frac{c_1}{c_2}t-\frac{c_1d_2}{c_2}+d_1=kt+n$ ($k=\frac{c_1}{c_2}$, $n=-\frac{c_1d_2}{c_2}+d_1$), па је $\tilde{\alpha}(t)=r(kt+n, t)=(a\cos t, a\sin t, kt+n)$ репараметризација геодезијске криве $\alpha(s)=r(c_1s+d_1, c_2s+d_2)$. Траг ове криве је кружни хеликс.

19. Нека је $\alpha(s)=r(u(s),v(s))$ природно параметризована геодезијска линија на површи $r=r(u,v)$ за коју важи $E=E(u)$, $F=0$, $G=G(u)$. Доказати да важи $\sqrt{G}\cos\theta=C=const$, при чему је $\theta(s)$ угао између геодезијске линије и v-параметарске криве $u=const$.

Како E и G не зависе од параметра v, важи $E_v=G_v=0$, а очигледно је и $F_u=F_v=0$. Према томе, Кристофелови симболи су једнаки $\Gamma_{11}^1(u,v)=\frac{E_u(u)\cancel{G(u)}}{2E(u)\cancel{G(u)}}=\frac{E_u(u)}{2E(u)}$, $\Gamma_{11}^2(u,v)=0$, $\Gamma_{12}^1(u,v)=0$, $\Gamma_{12}^2(u,v)=\frac{G_u(u)\cancel{E(u)}}{2\cancel{E(u)}G(u)}=\frac{G_u(u)}{2G(u)}$, $\Gamma_{22}^1(u,v)=\frac{-G_u(u)\cancel{G(u)}}{2E(u)\cancel{G(u)}}=-\frac{G_u(u)}{2E(u)}$ и $\Gamma_{22}^2(u,v)=0$. Према томе, природно параметризована геодезијска линија $\alpha(s)=r(u(s),v(s))$ задовољава једначине

$u''(s)+\Gamma_{11}^1(u(s),v(s))\cdot u'(s)^2+2\Gamma_{12}^1(u(s),v(s))u'(s)v'(s)+\Gamma_{22}^1(u(s),v(s))\cdot v'(s)^2=0$ и

$v''(s)+\Gamma_{11}^2(u(s),v(s))\cdot u'(s)^2+2\Gamma_{12}^2(u(s),v(s))\cdot u'(s)v'(s)+\Gamma_{22}^2(u(s),v(s))\cdot v'(s)^2=0$, односно

$u''(s)+\frac{E_u(u(s))}{2E(u(s))}\cdot u'(s)^2-\frac{G_u(u(s))}{2E(u(s))}v'(s)^2=0$ и $v''(s)+\cancel{2}\frac{G_u(u(s))}{\cancel{2}G(u(s))}\cdot u'(s)\cdot v'(s)=0$. Множењем друге једначине с $G(u(s))$ добијамо $v''(s)\cdot G(u(s))+v'(s)\cdot G_u(u(s))\cdot u'(s)=0$, тј. $(v'(s)G(u(s)))'=0$. Према томе, $v'(s)G(u(s))=C=const$. Ако је $\theta(s_0)$ угао који крива α у тачки $\alpha(s_0)=r(u(s_0),v(s_0))$ заклапа с v-параметарском кривом $r(u(s_0),t)$, онда је $\cos\theta(s_0)=\frac{\langle\alpha'(s_0), r_v(u(s_0),v(s_0))\rangle}{\|\alpha'(s_0)\|\|r_v(u(s_0),v(s_0))\|}$. Како је $\alpha'(s_0)=r_u(u(s_0),v(s_0))\cdot u'(s_0)+r_v(u(s_0),v(s_0))\cdot v'(s_0)$, следи

$\langle\alpha'(s_0), r_v(u(s_0),v(s_0))\rangle=\begin{pmatrix}u'(s_0) & v'(s_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(u(s_0)) & 0\\ 0 & G(u(s_0))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u'(s_0)\cdot E(u(s_0)) & v'(s_0)\cdot G(u(s_0))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=v'(s_0)G(u(s_0))$,

$\|\alpha'(s_0)\|=1$, јер је α природно параметризована

$\|r_v(u(s_0),v(s_0))\|^2=G(u(s_0))$. Према томе, $\cos\theta(s_0)=\frac{v'(s_0)G(u(s_0))}{1\cdot\sqrt{G(u(s_0))}}=\frac{C}{\sqrt{G(u(s_0))}}$, тј. $\sqrt{G(u(s_0))}\cdot\cos\theta(s_0)=C$.

Тачка s_0 је била произвољна, те је $\sqrt{G(u(s))}\cdot\cos\theta(s)=C=const$.

20. Нека је $r=r(u,v)$ регуларна површ на којој су u- и v-параметарске криве ортогоналне и коефицијенти прве основне форме зависе само од параметра u. Тада се геодезијске линије увек могу одредити интеграцијом и важи:

(а) u-параметарске криве ($v=const$) су геодезијске линије;

(б) v-параметарске криве ($u=const=u_0$) су геодезијске линије акко је $G_u(u_0)=0$;

(в) крива облика $\gamma(u)=r(u,v(u))$ је геодезијска линија акко је $v=\int\frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}du$, $C=const$.

Пошто су u- и v-параметарске криве ортогоналне, следи да је $F(u,v)=0$, а пошто коефицијенти прве основне форме зависе само од параметра u, следи да је $E=E(u)$ и $G=G(u)$. Слично као у претходном задатку добијамо да је $\Gamma_{11}^2(u,v)=\Gamma_{12}^1(u,v)=\Gamma_{22}^2(u,v)=0$, $\Gamma_{11}^1(u,v)=\frac{E_u(u)}{2E(u)}$, $\Gamma_{12}^2(u,v)=\frac{G_u(u)}{2G(u)}$ и $\Gamma_{22}^1(u,v)=-\frac{G_u(u)}{2E(u)}$.

(а) Нека је $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)$ једна u-параметарска крива. Да бисмо помоћу система диференцијалних једначина с Кристофеловим симболима доказали да је α_{v_0} геодезијска линија, неопходно је репараметризовати криву α_{v_0} тако да се добије природна параметризација. Нека је $s=s(u)$ функција дужине лука криве α_{v_0} и $u_{\alpha_{v_0}}$ њен инверз. Тада је крива $\tilde{\alpha}_{v_0}(s)=\alpha_{v_0}(u_{\alpha_{v_0}}(s))=r(u_{\alpha_{v_0}}(s),v_0)$ природна репараметризација u-параметарске криве α_{v_0}. Код ње је $v_{\alpha_{v_0}}(s)=v_0$ константна функција, па је $v'_{\alpha_{v_0}}(s)=0$ и $v''_{\alpha_{v_0}}(s)=0$. Следи да је $\tilde{\alpha}_{v_0}$ геодезијска ако и само ако је задовољен систем

$$u''_{\alpha_{v_0}}(s)+\frac{E_u(u_{\alpha_{v_0}}(s))}{2E(u_{\alpha_{v_0}}(s))}\cdot u'_{\alpha_{v_0}}(s)^2=0 \quad (v'_{\alpha_{v_0}}(s)=0)$$

$$0+0 \qquad\qquad =0 \quad (v''_{\alpha_{v_0}}(s)=0,\ u'_{\alpha_{v_0}}(s)=0 \text{ и } \Gamma^2_{11}(u_{\alpha_{v_0}}(s),v_0)=0).$$

Такође, крива је природно параметризована, па је $\begin{pmatrix}u'_{\alpha_{v_0}}(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(u_{\alpha_{v_0}}(s)) & 0\\ 0 & G(u_{\alpha_{v_0}}(s))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'_{\alpha_{v_0}}(s)\\ 0\end{pmatrix}=1$, односно $\begin{pmatrix}E(u_{\alpha_{v_0}}(s))\cdot u'_{\alpha_{v_0}}(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'_{\alpha_{v_0}}(s)\\ 0\end{pmatrix}=1$, тј. $E(u_{\alpha_{v_0}}(s))\cdot u'_{\alpha_{v_0}}(s)^2=1$. Диференцирањем по s добијамо $E_u(u_{\alpha_{v_0}}(s))\cdot u'_{\alpha_{v_0}}(s)\cdot u'_{\alpha_{v_0}}(s)^2+E(u_{\alpha_{v_0}}(s))\cdot 2u'_{\alpha_{v_0}}(s)\cdot u''_{\alpha_{v_0}}(s)=0$, а пошто је $u'_{\alpha_{v_0}}(s)\neq 0$ због $E(u_{\alpha_{v_0}}(s))\cdot u'_{\alpha_{v_0}}(s)^2=1$, скраћивањем са $u'_{\alpha_{v_0}}(s)$ добијамо $E_u(u_{\alpha_{v_0}}(s))\cdot u'_{\alpha_{v_0}}(s)^2+2E(u_{\alpha_{v_0}}(s))\cdot u''_{\alpha_{v_0}}(s)=0$, а потом дељењем са $2E(u_{\alpha_{v_0}}(s))$ (које је различито од нуле јер је $E(u)\neq 0$) добијамо $\frac{E_u(u_{\alpha_{v_0}}(s))}{2E(u_{\alpha_{v_0}}(s))}\cdot u'_{\alpha_{v_0}}(s)^2+u''_{\alpha_{v_0}}(s)=0$, те је задовољен систем. Дакле, $\tilde{\alpha}_{v_0}$ је геодезијска линија.

(б) Нека је $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)$ једна v-параметарска крива, $s=s(v)$ функција дужине лука и $v_{\beta_{u_0}}$ њен инверз. Тада је $\tilde{\beta}_{u_0}(s)=\beta_{u_0}(v_{\beta_{u_0}}(s))=r(u_0,v_{\beta_{u_0}}(s))$ природна репараметризација v-параметарске криве β_{u_0}. Код ње је $u_{\beta_{u_0}}(s)=u_0$ константна функција, па је $u'_{\beta_{u_0}}(s)=0$ и $u''_{\beta_{u_0}}(s)=0$. Према томе, $\tilde{\beta}_{u_0}$ је геодезијска ако и само ако је

$$0-\frac{G_u(u_0)}{2E(u_0)}\cdot v'_{\beta_{u_0}}(s)^2=0 \quad (u''_{\beta_{u_0}}(s)=0,\ u'_{\beta_{u_0}}(s)=0) \text{ и}$$

$$v''_{\beta_{u_0}}(s)+0=0 \quad (u'_{\beta_{u_0}}(s)=0,\ \Gamma^2_{22}(u,v)=0).$$

Крива $\tilde{\beta}_{u_0}$ је природно параметризована, па је $\begin{pmatrix}0 & v'_{\beta_{u_0}}(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(u_0) & 0\\ 0 & G(u_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v'_{\beta_{u_0}}(s)\end{pmatrix}=1$, односно $\begin{pmatrix}0 & G(u_0)\cdot v'_{\beta_{u_0}}(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v'_{\beta_{u_0}}(s)\end{pmatrix}=1$, тј. $G(u_0)v'_{\beta_{u_0}}(s)^2=1$. Одавде је $G(u_0)\cdot 2v'_{\beta_{u_0}}(s)\cdot v''_{\beta_{u_0}}(s)=0$, па је $v''_{\beta_{u_0}}(s)=0$, јер је $G(u_0)\neq 0$ и $v'_{\beta_{u_0}}(s)\neq 0$, што значи да је друга једначина задовољена. Прва једначина је задовољена ако и само ако је $G_u(u_0)=0$ (јер је $v'_{\beta_{u_0}}(s)\neq 0$), па је v-параметарска крива $\tilde{\beta}_{u_0}$ геодезијска ако и само ако је $G_u(u_0)=0$.

(в) Нека је $\gamma(u)=r(u,v(u))$ крива на површи r, $s=s(u)$ њена функција дужине лука и u_γ њен инверз. Тада је $\tilde{\gamma}(s)=\gamma(u_\gamma(s))=r(u_\gamma(s),v(u_\gamma(s)))$, па је $v_\gamma(s)=v(u_\gamma(s))$. Ако је $u=u_\gamma(s)$, онда је $s=s(u)$ (јер су функције u_γ и s инверзне једна другој) и $v(u)=v_\gamma(s(u))$.

$\Rightarrow$: Нека је γ геодезијска на површи r. Онда је и $\tilde{\gamma}$ геодезијска, па важи

$$u''_\gamma(s)+\frac{E_u(u_\gamma(s))}{2E(u_\gamma(s))}\cdot u'_\gamma(s)^2-\frac{G_u(u_\gamma(s))}{2E(u_\gamma(s))}\cdot v'_\gamma(s)^2=0 \quad \text{и} \quad v''_\gamma(s)+2\cdot\frac{G_u(u_\gamma(s))}{2G(u_\gamma(s))}u'_\gamma(s)v'_\gamma(s)=0.$$

Множењем друге једнакости са $G(u_\gamma(s))$ добијамо $v''_\gamma(s)G(u_\gamma(s))+v'_\gamma(s)\cdot G_u(u_\gamma(s))\cdot u'_\gamma(s)=0$, тј. $(v'_\gamma(s)G(u_\gamma(s)))'=0$, што значи да је $v_\gamma'(s)\,G(u_\gamma(s))=C=const$ (не зависи од s). Дакле, $v_\gamma'(s)=\frac{C}{G(u_\gamma(s))}$. Крива $\tilde\gamma$ је природно параметризована, па је $(u_\gamma'(s)\ \ v_\gamma'(s))\begin{pmatrix}E(u_\gamma(s)) & 0\\ 0 & G(u_\gamma(s))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_\gamma'(s)\\ v_\gamma'(s)\end{pmatrix}=1$, односно $(E(u_\gamma(s))\,u_\gamma'(s),\ G(u_\gamma(s))\cdot v_\gamma'(s))\begin{pmatrix}u_\gamma'(s)\\ v_\gamma'(s)\end{pmatrix}=1$, тј. $E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2+G(u_\gamma(s))\cdot v_\gamma'(s)^2=1$. Према томе, $E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2+\cancel{G(u_\gamma(s))}\cdot\frac{C^2}{G(u_\gamma(s))^{\cancel{2}}}=1$, тј. $E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2=1-\frac{C^2}{G(u_\gamma(s))}=\frac{G(u_\gamma(s))-C^2}{G(u_\gamma(s))}$.

Дакле, $u_\gamma'(s)^2=\frac{G(u_\gamma(s))-C^2}{E(u_\gamma(s))G(u_\gamma(s))}$. Како је u_γ инверз функције $s=s(u)$, тј. важи $s=s(u_\gamma(s))$, следи да је $1=s'(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)$, па је $u_\gamma'(s)\neq0$, те је $u_\gamma'(s)=\frac{\sqrt{G(u_\gamma(s))-C^2}}{\sqrt{E(u_\gamma(s))G(u_\gamma(s))}}$ или $u_\gamma'(s)=-\frac{\sqrt{G(u_\gamma(s))-C^2}}{\sqrt{E(u_\gamma(s))G(u_\gamma(s))}}$.

Пошто је $\gamma(u)=r(u,v(u))$ репараметризована у $\tilde\gamma(s)=\gamma(u_\gamma(s))=r(u_\gamma(s),v(u_\gamma(s)))$, рекли смо да је $v(u_\gamma(s))=v_\gamma(s)$, па због тога што су u_γ и s инверзне једна другој, онда стављањем $u=u_\gamma(s)$ добијамо $s=s(u)$ и $v(u)=v_\gamma(s(u))$. Диференцирањем по u добијамо $v'(u)=v_\gamma'(s(u))\cdot s'(u)$, а из $u=u_\gamma(s(u))$ (јер су u_γ и s инверзне једна другој) диференцирањем по u добијамо $1=u_\gamma'(s(u))\cdot s'(u)$, па је $s'(u)=\frac{1}{u_\gamma'(s(u))}$ и $v'(u)=\frac{v_\gamma'(s(u))}{u_\gamma'(s(u))}$. Како је $v_\gamma'(s(u))=\frac{C}{G(\underbrace{u_\gamma(s(u))}_{=u})}=\frac{C}{G(u)}$ и $u_\gamma'(s(u))=\pm\frac{\sqrt{G(u_\gamma(s(u)))-C^2}}{\sqrt{E(u_\gamma(s(u)))G(u_\gamma(s(u)))}}=\pm\frac{\sqrt{G(u)-C^2}}{\sqrt{E(u)G(u)}}$, добијамо да је

$$v'(u)=\frac{\frac{C}{G(u)}}{\pm\frac{\sqrt{G(u)-C^2}}{\sqrt{E(u)G(u)}}}=\pm\frac{C\sqrt{E(u)G(u)}}{G(u)\sqrt{G(u)-C^2}}=\pm\frac{C\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-C^2}},$$ тј. $v(u)=\pm\int\frac{C\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-C^2}}\,du$. Како се константа C бира произвољно из интервала $(-G_{min},G_{min})$, где је $G_{min}=\min_u G(u)$ најмања вредност функције G (ако се достиже), тј. из интервала $[-G_{inf},G_{inf}]$, где је $G_{inf}=\inf_u G(u)$ инфимум функције G (како је $G(u)>0$, следи да је $G_{inf}\geq0$), ако се он не достиже, нема потребе писати $\pm$ (он суштински настаје због тога што функција дужине лука $s=s(u)$ може бити бирана као растућа или опадајућа, што утиче на знак њеног извода, па и извода њеног инверза u_γ) и добијамо да важи $v(u)=\int\frac{C\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-C^2}}\,du$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Нека је $\gamma(u)=r(u,v(u))$ крива на површи r таква да је $v(u)=\int\frac{C\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-C^2}}\,du$ и $\tilde\gamma(s)=\gamma(u_\gamma(s))=r(u_\gamma(s),v(u_\gamma(s)))$ њена природна репараметризација. Тада је $v_\gamma(s)=v(u_\gamma(s))$, и треба доказати да важи $u_\gamma''(s)+\frac{E_u(u_\gamma(s))}{2E(u_\gamma(s))}\cdot u_\gamma'(s)^2-\frac{G_u(u_\gamma(s))}{2E(u_\gamma(s))}v_\gamma'(s)^2=0$ и $v_\gamma''(s)+\cancel{2}\cdot\frac{G_u(u_\gamma(s))}{\cancel{2}G(u_\gamma(s))}u_\gamma'(s)v_\gamma'(s)=0$. Добијамо да је $v_\gamma'(s)=v'(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)=\frac{C\sqrt{E(u_\gamma(s))}}{\sqrt{G(u_\gamma(s))}\sqrt{G(u_\gamma(s))-C^2}}\cdot u_\gamma'(s)$. Крива $\tilde\gamma$ је природно параметризована, па је $(u_\gamma'(s)\ \ v_\gamma'(s))\begin{pmatrix}E(u_\gamma(s)) & 0\\ 0 & G(u_\gamma(s))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_\gamma'(s)\\ v_\gamma'(s)\end{pmatrix}=1$, тј. $(E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)\ \ G(u_\gamma(s))\cdot v_\gamma'(s))\begin{pmatrix}u_\gamma'(s)\\ v_\gamma'(s)\end{pmatrix}=1$, односно $E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2+G(u_\gamma(s))\cdot v_\gamma'(s)^2=1$. Добијамо:

$$1=E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2+\cancel{G(u_\gamma(s))}\cdot\frac{C^2\cdot E(u_\gamma(s))}{\cancel{G(u_\gamma(s))}\cdot(G(u_\gamma(s))-C^2)}u_\gamma'(s)^2=E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2\left(1+\frac{C^2}{G(u_\gamma(s))-C^2}\right)=$$
$$=E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2\cdot\frac{G(u_\gamma(s))\cancel{-C^2}\cancel{+C^2}}{G(u_\gamma(s))-C^2},$$ тј. $E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2=\frac{G(u_\gamma(s))-C^2}{G(u_\gamma(s))}=1-\frac{C^2}{G(u_\gamma(s))}$. Како је и $E(u_\gamma(s))\cdot u_\gamma'(s)^2=1-G(u_\gamma(s))\cdot v_\gamma'(s)^2$, следи да је $1-\frac{C^2}{G(u_\gamma(s))}=1-G(u_\gamma(s))\cdot v_\gamma'(s)^2$, тј. да је $\frac{C^2}{G(u_\gamma(s))}=G(u_\gamma(s))\cdot v_\gamma'(s)^2$. Према томе, $G(u_\gamma(s))^2\cdot v_\gamma'(s)^2=C^2$. Диференцирањем по s

добијамо $2G(u_g(s))\cdot G_u(u_g(s))\cdot u_g'(s)\cdot v_g'(s)^2+G(u_g(s))^2\cdot 2v_g'(s)\cdot v_g''(s)=0$, тј.

$2G(u_g(s))v_g'(s)\left(G_u(u_g(s))u_g'(s)v_g'(s)+G(u_g(s))\cdot v_g''(s)\right)=0$. Ако је $v_g'(s_0)=0$ за неко s_0,

онда је $C^2=G(u_g(s_0))^2\cdot v_g'(s_0)^2=0$, а онда је и $G(u_g(s))^2\cdot v_g'(s)^2=C^2=0$ за свако s.

Како је $G(u)\neq 0$, следило би да је $v_g'(s)^2=0$, а онда и $v_g'(s)=0$ за свако s.

Онда би било и $v_g''(s)=0$ (извод константне функције) и важило би

$v_g''(s)+\frac{G_u(u_g(s))}{G(u_g(s))}u_g'(s)v_g'(s)=0$ (јер су $v_g''(s)=0$ и $v_g'(s)=0$). Ако је $v_g'(s)\neq 0$ за све

s, онда скраћивањем са $2G(u_g(s))v_g'(s)$ добијамо $G_u(u_g(s))u_g'(s)v_g'(s)+G(u_g(s))\cdot v_g''(s)=0$,

тј. $v_g''(s)+\frac{G_u(u_g(s))}{G(u_g(s))}u_g'(s)v_g'(s)=0$. У сваком случају је задовољена друга диферен-

цијална једначина за геодезијске линије. Вратимо се на $E(u_g(s))\cdot u_g'(s)^2=1-\frac{C^2}{G(u_g(s))}$ и

диференцирајмо по s. Добијамо:

$E_u(u_g(s))\cdot u_g'(s)\cdot u_g'(s)^2+E(u_g(s))\cdot 2u_g'(s)\cdot u_g''(s)=-C^2\cdot\left(-\frac{1}{G(u_g(s))^2}\right)\cdot G_u(u_g(s))\cdot u_g'(s)$, тј.

$u_g'(s)\left(2E(u_g(s))u_g''(s)+E_u(u_g(s))\cdot u_g'(s)^2\right)=\frac{C^2}{G(u_g(s))^2}G_u(u_g(s))u_g'(s)$. Из $C^2=G(u_g(s))^2v_g'(s)^2$

следи да је $\frac{C^2}{G(u_g(s))^2}=v_g'(s)^2$, па добијамо

$u_g'(s)\left(2E(u_g(s))u_g''(s)+E_u(u_g(s))\cdot u_g'(s)^2\right)=u_g'(s)\cdot G_u(u_g(s))\cdot v_g'(s)^2$, односно

$u_g'(s)\left(2E(u_g(s))u_g''(s)+E_u(u_g(s))\cdot u_g'(s)^2-G_u(u_g(s))\cdot v_g'(s)^2\right)$. Како је u_g инверз функције

$u_g'(s)\left(2E(u_g(s))u_g''(s)+E_u(u_g(s))\cdot u_g'(s)^2-G_u(u_g(s))\cdot v_g'(s)^2\right.$ $s=s(u_g(s))$, па диферен-

дужине лука $s=s(u)$ криве $\gamma(u)=r(u,v(u))$, следи да је $u_g'(s)\neq 0$. Добијамо

цирањем по s добијамо $1=s'(u_g(s))\cdot u_g'(s)$, што значи да је

$=0$, па дељењем са $2E(u_g(s))$ доби-

$2E(u_g(s))\cdot u_g''(s)+E_u(u_g(s))\cdot u_g'(s)^2-G_u(u_g(s))\cdot v_g'(s)^2=0$, тј. задовољена је и прва дифе-

јамо $u_g''(s)+\frac{E_u(u_g(s))}{2E(u_g(s))}\cdot u_g'(s)^2-\frac{G_u(u_g(s))}{2E(u_g(s))}\cdot v_g'(s)^2=0$, тј. Према томе, природно параметризована

ренцијална једначина за геодезијске линије. и $\gamma(u)=r(u,v(u))$ такође

крива $\tilde{\gamma}(s)=r(u_g(s),v_g(s))$ јесте геодезијска, а онда је

геодезијска.

21. Доказати да је паралела ротационе површи геодезијска линија акко су тангенте ме-

ридијана паралелне оси ротације у свим тачкама паралеле.

Нека је $r(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ ротациона површ настала ротацијом профилне криве

$\gamma(u)=(f(u),0,g(u))$, $f(u)>0$, у Oxz равни око z-осе. Тада је $r_u(u,v)=(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u))$ и

$r_v(u,v)=(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0)$, па је $E(u,v)=\langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle=f'(u)^2\cos^2 v+f'(u)^2\sin^2 v+g'(u)^2=f'(u)^2+g'(u)^2$,

$F(u,v)=\langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle=-f(u)f'(u)\cos v\sin v+f(u)f'(u)\sin v\cos v+0=0$ и $G(u,v)=\langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle=f(u)^2\sin^2 v+$

$+f(u)^2\cos^2 v+0^2=f(u)^2$, што значи да ротациона површ r задовољава услове из претходног задатка.

Самим тим, v-параметарска координатна линија $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)$, која представља паралелу ротаци-

оне површи r, јесте геодезијска ако и само ако је $G_u(u_0)=0$, тј. ако и само ако је $2f(u_0)f'(u_0)=0$.

Пошто је $f(u)>0$ за свако u, па и за $u=u_0$, следи да је паралела $u=u_0$ геодезијска ако и само ако је $f'(u_0)=0$.

Нека је $\beta_{u_0}(v_0)=r(u_0,v_0)$ тачка паралеле β_{u_0} (тј. $u=u_0$) и $\alpha_{v_0}(u)=r(u,v_0)$ меридијан који садржи тачку $r(u_0,v_0)$. Вектор брзине тог меридијана у тачки $\beta_{u_0}(v_0)=r(u_0,v_0)=\alpha_{v_0}(u_0)$ јесте вектор $\alpha'_{v_0}(u_0)=r_u(u_0,v_0)=(f'(u_0)\cos v_0, f'(u_0)\sin v_0, g'(u_0))$, па је тангента меридијана $\alpha_{v_0}(u)$ у тој тачки одређена вектором $(f'(u_0)\cos v_0, f'(u_0)\sin v_0, g'(u_0))$.

$\boxed{\Rightarrow}$: Нека је паралела $u=u_0$, тј. $\beta_{u_0}(v)=r(u_0,v)$, геодезијска линија. Тада је $f'(u_0)=0$, па је у произвољној тачки $\beta_{u_0}(v_0)=r(u_0,v_0)$ паралеле β_{u_0} тангента меридијана $\alpha_{v_0}(u)$, који садржи ту тачку, одређена вектором $\alpha'_{v_0}(u_0)=(0,0,g'(u_0))$, што значи да је та тангента паралелна z-оси, што је оса ротације ротационе површи r.

$\boxed{\Leftarrow}$: Нека је у свакој тачки $\beta_{u_0}(v_0)=r(u_0,v_0)$ паралеле β_{u_0} тангента меридијана $\alpha_{v_0}(u)$, који садржи ту тачку, паралелна z-оси. Онда је вектор $\alpha'_{v_0}(u_0)=(f'(u_0)\cos v_0, f'(u_0)\sin v_0, g'(u_0))$, који одређује тангенту, колинеаран вектору $\vec{e_3}=(0,0,1)$, па је $f'(u_0)\cos v_0=0$ и $f'(u_0)\sin v_0=0$, па онда и $f'(u_0)^2\cos^2 v_0+f'(u_0)^2\sin^2 v_0=0^2+0^2=0$, тј. $f'(u_0)^2=0$. Према томе, $f'(u_0)=0$, што значи да је паралела β_{u_0} геодезијска.

22. (а) Доказати да је крива $\gamma(t)=\left(t\cos\left(\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}+a}\right), t\sin\left(\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}+a}\right), a\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}+a}\right)$, $t>0$, геодезијска линија на хеликоиду $r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, av)$, $u>0$, $v\in\mathbb{R}$, $a>0$.

(б) Доказати да је крива $\gamma(t)=(a\,\mathrm{ch}\,t\cos(\ln(\mathrm{th}\frac{t}{2})), a\,\mathrm{ch}\,t\sin(\ln(\mathrm{th}\frac{t}{2})), at)$, $t>0$, геодезијска линија на катеноиду $r(u,v)=(a\,\mathrm{ch}\,u\cos v, a\,\mathrm{ch}\,u\sin v, au)$, $u\in\mathbb{R}$, $v\in(0,2\pi)$, $a>0$.

(а) Хеликоид $r:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,av)$ има коефицијенте прве основне форме:

$$r_u(u,v)=(\cos v,\sin v,0)$$
$$r_v(u,v)=(-u\sin v,u\cos v,a)$$
$$E(u,v)=\langle r_u(u,v),r_u(u,v)\rangle=\cos^2 v+\sin^2 v+0^2=1$$
$$F(u,v)=\langle r_u(u,v),r_v(u,v)\rangle=-u\cos v\sin v+u\sin v\cos v+0=0$$
$$G(u,v)=\langle r_v(u,v),r_v(u,v)\rangle=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+a^2=u^2+a^2,$$

што значи да је $E=E(u)$, $G=G(u)$ и $F=0$. Крива $\gamma(t)$ види се као $\gamma(t)=r\left(t,\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}+a}\right)$, тј. као $\gamma(u)=r(u,v(u))$ за функцију $v(u)=\ln\frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}+a}$, $u>0$. На основу тврђења 20. задатка под (в) довољно је доказати да је $v'(u)=\frac{C\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-C^2}}$ за неку константу C. Како је

$$v'(u)=\frac{1}{\frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}+a}}\cdot\frac{1\cdot(\sqrt{u^2+a^2}+a)-u\cdot\frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}}{(\sqrt{u^2+a^2}+a)^2}=\frac{1}{u}\cdot\frac{\sqrt{u^2+a^2}(\sqrt{u^2+a^2}+a)-u^2}{\sqrt{u^2+a^2}(\sqrt{u^2+a^2}+a)}=\frac{1}{u}\cdot\frac{\cancel{u^2}+a^2+a\sqrt{u^2+a^2}-\cancel{u^2}}{\sqrt{u^2+a^2}(\sqrt{u^2+a^2}+a)}=$$
$$=\frac{1}{u}\cdot\frac{a\cancel{(a+\sqrt{u^2+a^2})}}{\sqrt{u^2+a^2}\cancel{(\sqrt{u^2+a^2}+a)}}=\frac{a}{u\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}\cdot\sqrt{u^2}}=\frac{a\cdot\sqrt{1}}{\sqrt{u^2+a^2}\sqrt{u^2+a^2-a^2}}=\frac{a\cdot\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-a^2}},$$

следи да је γ геодезијска на хеликоиду.

(б) Катеноид $r:\mathbb{R}\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=(a\,\mathrm{ch}\,u\cos v, a\,\mathrm{ch}\,u\sin v, au)$ јесте ротациона површ настала ротацијом ланчанице $x=a\,\mathrm{ch}\frac{z}{a}$, $y=0$ у Oxz равни око z-осе. Самим тим, његови коефицијенти прве основне форме су облика $E=E(u)$, $F=0$, $G=G(u)$. Крива $\gamma(t)$ види се као $\gamma(t)=r(t,\ln(\mathrm{th}\frac{t}{2}))$, $t>0$, тј. као $\gamma(u)=r(u,v(u))$ за функцију $v(u)=\ln(\mathrm{th}\frac{u}{2})$, $u>0$.

На основу 20. задатка под (в) довољно је доказати да је $\vartheta'(u)=\frac{C\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-C^2}}$ за неку константу C. Коефицијенти прве основне форме су:

$r_u(u,\vartheta)=(a\,\mathrm{sh}u\cos\vartheta,\ a\,\mathrm{sh}u\sin\vartheta,\ a)$

$r_\vartheta(u,\vartheta)=(-a\,\mathrm{ch}u\sin\vartheta,\ a\,\mathrm{ch}u\cos\vartheta,\ 0)$

$E(u,\vartheta)=\langle r_u(u,\vartheta),r_u(u,\vartheta)\rangle=a^2\mathrm{sh}^2u\cos^2\vartheta+a^2\mathrm{sh}^2u\sin^2\vartheta+a^2=a^2\mathrm{sh}^2u+a^2=a^2(\mathrm{sh}^2u+1)=a^2\mathrm{ch}^2u$

$F(u,\vartheta)=\langle r_u(u,\vartheta),r_\vartheta(u,\vartheta)\rangle=-a^2\mathrm{sh}u\,\mathrm{ch}u\cos\vartheta\sin\vartheta+a^2\mathrm{sh}u\,\mathrm{ch}u\sin\vartheta\cos\vartheta+0=0$

$G(u,\vartheta)=\langle r_\vartheta(u,\vartheta),r_\vartheta(u,\vartheta)\rangle=a^2\mathrm{ch}^2u\sin^2\vartheta+a^2\mathrm{ch}^2u\cos^2\vartheta+0^2=a^2\mathrm{ch}^2u$ (параметризација је конформна)

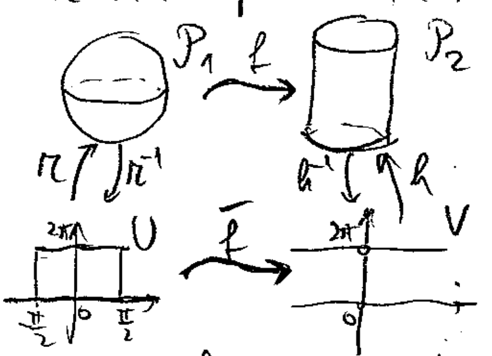
а како је $\vartheta'(u)=\frac{1}{\mathrm{th}\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{ch}\frac{u}{2}}{\mathrm{sh}\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\mathrm{sh}u}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2u}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2u-1}}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2\mathrm{ch}^2u-a^2}}=$

$=\frac{a}{\sqrt{a^2\mathrm{ch}^2u-a^2}}=\frac{a\sqrt{G(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-a^2}}=\frac{a\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u)-a^2}}$ (коришћено је $u>0$, па је $\mathrm{sh}u>0$ и $\mathrm{sh}u=\sqrt{\mathrm{sh}^2u}$, као и $a>0$, па је $a=\sqrt{a^2}$ и $E(u)=a^2\mathrm{ch}^2u=G(u)$), следи да је γ геодезијска.

23.(а) Одредити формуле нормалне пројекције (нормално на z-осу) и централне пројекције (из координатног почетка) сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ на цилиндар $x^2+y^2=R^2$, $R>0$.

(б) Доказати да ове пројекције нису изометрије, али да нормална пројекција чува површине.

(а) Пресликавање $f:P_1\to P_2$ између површи P_1 и P_2, које су параметризоване пресликавањима $r:U\to P_1$ и $h:V\to P_2$, $U,V\subseteq\mathbb{R}^2$ отворени и повезани скупови, најчешће се представља пресликавањем $\bar{f}:U\to V$, $\bar{f}=h^{-1}\circ f\circ r$ између координата (θ,φ) површи $r=r(\theta,\varphi)$ и координата (u,ϑ) површи $h=h(u,\vartheta)$. То се представља дијаграмом:



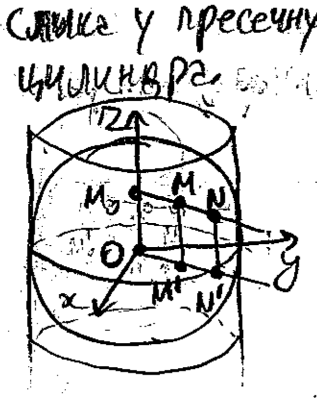
$r:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)\to P_1$ (сфера)

$r(\theta,\varphi)=(R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta)$

$h:\mathbb{R}\times(0,2\pi)\to P_2$ (цилиндар)

$h(u,\vartheta)=(R\cos\vartheta,\ R\sin\vartheta,\ u)$

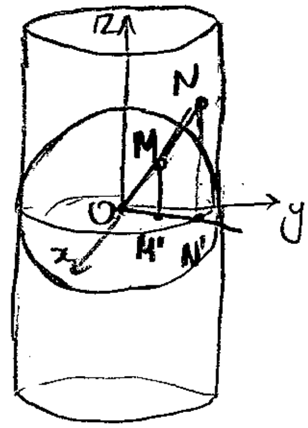
Нека је f нормална пројекција сфере P_1 на цилиндар P_2. Тада се тачка M са сфере слика у пресечну тачку N полуправе M_0M (M_0 је подножје нормале из M на z-оси) и цилиндра.



$M(R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta)$ $\quad N(R\cos\vartheta,\ R\sin\vartheta,\ u)$

$M_0(0,0,R\sin\theta)$

Полуправа M_0M је нормална на z-оси и паралелна је правој OM', где је $O(0,0,0)$ координатни почетак, а $M'(R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ 0)$ нормална пројекција тачке M на равни Oxy. Тачка N се пројектује у тачку N' која припада полуправој OM' (јер N припада M_0M). Угао θ представља угао између x-осе и полуправе OM', а ϑ угао између x-осе и полуправе ON'. Како се те две полуправе поклапају, следи да је $\theta=\vartheta$, тј. $\vartheta=\theta$. Тачке M и N имају исту z-координату (да би MN била нормална на z-оси), па је $R\sin\theta=u$, тј. $u=R\sin\theta$. Дакле, $\bar{f}(\theta,\varphi)=(R\sin\theta,\varphi)$.



Нека је g централна пројекција сфере $\mathcal{P}_1$ на цилиндар $\mathcal{P}_2$. Тада се тачка M са сфере слика у пресечну тачку N цилиндра и полуправе OM. Нека су M' и N' подножја нормала из M, N редом на равни Oxy.

$M(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$ $N(R\cos v, R\sin v, u)$

Углови θ и v редом представљају углове које полуправе OM', ON' граде с x-осом, па како су OM' и ON' исте, следи да је $\theta = v$. Такође, $R\sin\theta > 0$ ако и само ако је $u > 0$, тј. тачке M и N имају z-координате истог знака. Како је θ угао између OM' и OM, следи да је $|\operatorname{tg}\theta| = \frac{NN'}{ON'} = \frac{|u|}{R}$, тј. $|u| = R|\operatorname{tg}\theta|$. Због малопређашње констатације да је $R\sin\theta > 0$, тј. $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ако и само ако је $u > 0$ следи да је $u = R\sin\theta$, па добијамо да је $\overline{g}(\theta, \varphi) = (R\operatorname{tg}\theta, \varphi)$.

(б) На површи $\mathcal{P}$ могуће је дефинисати функцију растојања $d: \mathcal{P}\times\mathcal{P} \to \mathbb{R}$ помоћу $d(P,Q) = \inf l(\gamma)$, где се инфимум узима по свим кривима $\gamma: (0,1) \to \mathcal{P}$, $\lim_{t\to 0+}\gamma(t) = P$, $\lim_{t\to 1-}\gamma(t) = Q$, тј. по свим кривима које спајају P и Q, а њихов траг припада површи $\mathcal{P}$, тј. $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$, где је $r: U \to \mathcal{P}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, нека параметризација површи $\mathcal{P}$. Може се доказати да уколико постоји крива γ за коју се достиже инфимум, онда је γ геодезијска линија на површи $\mathcal{P}$. Како је $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$, онда је $\gamma'(t) = r_u(u(t), v(t))\cdot u'(t) + r_v(u(t), v(t))v'(t)$. За рачунање дужине криве γ потребно је

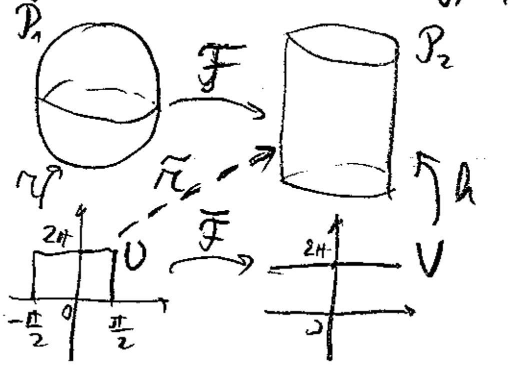
$$\|\gamma'(t)\|^2 = I(\gamma'(t), \gamma'(t)) = (u'(t)\ \ v'(t))\begin{pmatrix} E(u(t),v(t)) & F(u(t),v(t)) \\ F(u(t),v(t)) & G(u(t),v(t)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = E(u(t),v(t))u'(t)^2 + 2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))\cdot v'(t)^2,$$

јер је функција дужине лука $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\|d\tau$, па се често пише да је $ds = \|\gamma'(t)\|dt$, односно $ds = \sqrt{E\cdot u'^2 + 2F\cdot u'v' + G\cdot v'^2}\,dt$. Квадрирањем се добија $ds^2 = \left(E\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right)dt^2$, тј. $ds^2 = E\cdot du^2 + 2F\cdot du\,dv + G\cdot dv^2$, што је најчешћи запис за прву основну форму. Како је рачунање дужина кривих уско везано за прву основну форму, прва основна форма се још назива и метриком на површи.

Пресликавање $\mathcal{F}: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ између површи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ се назива изометријом ако је $\mathcal{F}$ дифеоморфизам и важи $d_2(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(Q)) = d_1(P,Q)$ за сваке две тачке $P, Q \in \mathcal{P}_1$ (функције $d_1: \mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$ и $d_2: \mathcal{P}_2\times\mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ су растојања на површима $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$). Један од еквивалентних услова је да диференцијал $d\mathcal{F}_p: T_p\mathcal{P}_1 \to T_{\mathcal{F}(p)}\mathcal{P}_2$ пресликавања $\mathcal{F}$ у тачки $p \in \mathcal{P}_1$, који слика тангентни простор $T_p\mathcal{P}_1$ површи $\mathcal{P}_1$ у тачки p у тангентни простор $T_{\mathcal{F}(p)}\mathcal{P}_2$ површи $\mathcal{P}_2$ у тачки $\mathcal{F}(p)$, буде изометрија векторских простора $T_p\mathcal{P}_1$ и $T_{\mathcal{F}(p)}\mathcal{P}_2$. Другим речима, треба да диференцијал $d\mathcal{F}_p$ чува скаларни производ, тј. да је $I_{T_{\mathcal{F}(p)}\mathcal{P}_2}(d\mathcal{F}_p(V), d\mathcal{F}_p(W)) = I_{T_p\mathcal{P}_1}(V,W)$. Како се прва основна форма назива и метриком, каже се да диференцијал $d\mathcal{F}_p$ чува метрику. При томе је неопходно да $\mathcal{F}$ буде дифеоморфизам, тј. да буде диференцијабилно, инвертибилно и да инверз буде диференцијабилан. Уколико је $\mathcal{F}$ само диференцијабилно и $d\mathcal{F}_p$ је изометрија тангентних простора $T_p\mathcal{P}_1$ и $T_{\mathcal{F}(p)}\mathcal{P}_2$, онда је $\mathcal{F}$ локална изометрија.

Површи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ су изометричне ако постоји изометрија $\mathcal{F}:\mathcal{P}_1\to\mathcal{P}_2$. Ако постоји локална изометрија $\mathcal{F}:\mathcal{P}_1\to\mathcal{P}_2$, онда су ове површи локално изометричне.

С обзиром на то да изометрије (и локалне изометрије) чувају прву основну форму, чувају и све појмове који зависе само од прве основне форме. То значи да чувају Гаусову кривину (иако је $K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}$, Гаусова бриљантна теорема говори да се Гаусова кривина може изразити само помоћу коефицијената прве основне форме) и сликају геодезијске линије у геодезијске линије. Не морају чувати средњу кривину, нити сликати асимптотске линије у асимптотске линије, или главне линије у главне линије, а не морају чувати ни главне кривине. Појмови који се чувају изометријама површи називају се унутрашњим појмовима, односно осликавају унутрашњу геометрију површи.



Нека је $\tilde{r}:U\to\mathcal{P}_2$, $\tilde{r}=h\circ\bar{\mathcal{F}}(=\mathcal{F}\circ r)$ репараметризација површи $\mathcal{P}_2$ индукована дифеоморфизмом $\mathcal{F}$. Може се показати да је $\mathcal{F}$ изометрија ако и само ако су коефицијенти прве основне форме површи $\mathcal{P}_1$ у параметризацији r једнаки коефицијентима прве основне форме површи $\mathcal{P}_2$ у параметризацији $\tilde{r}$.

За нормалну пројекцију f сфере $\mathcal{P}_1$ на цилиндар $\mathcal{P}_2$ ($\bar{f}(\theta,\varphi)=(R\sin\theta,\varphi)$) добијамо репараметризацију цилиндра $\tilde{r}:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)\to\mathcal{P}_2$, $\tilde{r}(\theta,\varphi)=(R\cos\varphi, R\sin\varphi, R\sin\theta)$ (тачније, ово је репараметризација дела цилиндра $x^2+y^2=R^2$, $-1<z<1$), а коефицијенти прве основне форме су редом:

$$r(\theta,\varphi)=(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$$
$$r_\theta(\theta,\varphi)=(-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$$
$$r_\varphi(\theta,\varphi)=(-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi, 0)$$
$$E(\theta,\varphi)=\langle r_\theta(\theta,\varphi), r_\theta(\theta,\varphi)\rangle=R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+R^2\cos^2\theta=R^2\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta=R^2$$
$$F(\theta,\varphi)=\langle r_\theta(\theta,\varphi), r_\varphi(\theta,\varphi)\rangle=R^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi-R^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi+0=0$$
$$G(\theta,\varphi)=\langle r_\varphi(\theta,\varphi), r_\varphi(\theta,\varphi)\rangle=R^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+R^2\cos^2\theta\cos^2\varphi=R^2\cos^2\theta$$
$$\tilde{r}(\theta,\varphi)=(R\cos\varphi, R\sin\varphi, R\sin\theta)$$
$$\tilde{r}_\theta(\theta,\varphi)=(0,0,-R\cos\theta)$$
$$\tilde{r}_\varphi(\theta,\varphi)=(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$$
$$\tilde{E}(\theta,\varphi)=\langle\tilde{r}_\theta(\theta,\varphi),\tilde{r}_\theta(\theta,\varphi)\rangle=R^2\cos^2\theta$$
$$\tilde{F}(\theta,\varphi)=\langle\tilde{r}_\theta(\theta,\varphi),\tilde{r}_\varphi(\theta,\varphi)\rangle=0$$
$$\tilde{G}(\theta,\varphi)=\langle\tilde{r}_\varphi(\theta,\varphi),\tilde{r}_\varphi(\theta,\varphi)\rangle=R^2\sin^2\varphi+R^2\cos^2\varphi=R^2$$

Дакле, коефицијенти прве основне форме нису једнаки, па f није изометрија. Међутим, како је површина скупа $S\subseteq\mathcal{P}_1$ једнака $\iint_{r^{-1}(S)}\sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\varphi$, а скупа $f(S)\subseteq\mathcal{P}_2$ једнака $\iint_{\tilde{r}^{-1}(f(S))}\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\,d\theta d\varphi$ и $\tilde{r}^{-1}(f(S))=(f\circ r)^{-1}(f(S))=r^{-1}(f^{-1}(f(S)))=r^{-1}(S)$ и $\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2=R^4\cos^2\theta=EG-F^2$, следи да је површина скупа $f(S)\subseteq P_2$ једнака $\iint\limits_{\overline{r}^{-1}(f(S))}\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\,d\theta\,d\varphi=\iint\limits_{r^{-1}(S)}\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi$, тј. једнака површини скупа $S\subseteq P_1$. Дакле, f чува површине.

За централну пројекцију g сфере P_1 на цилиндар P_2 ($\overline{g}(\theta,\varphi)=(R\operatorname{tg}\theta,\varphi)$) добијамо репараметризацију цилиндра $\overline{r}:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)\to P_2$, $\overline{r}(\theta,\varphi)=(R\cos\varphi, R\sin\varphi, R\operatorname{tg}\theta)$ и коефицијенте прве основне форме:

$\overline{r}_\theta(\theta,\varphi)=(0,0,\frac{R}{\cos^2\theta})$

$\overline{r}_\varphi(\theta,\varphi)=(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$

$\overline{E}(\theta,\varphi)=\langle\overline{r}_\theta(\theta,\varphi),\overline{r}_\theta(\theta,\varphi)\rangle=\frac{R^2}{\cos^4\theta}$

$\overline{F}(\theta,\varphi)=\langle\overline{r}_\theta(\theta,\varphi),\overline{r}_\varphi(\theta,\varphi)\rangle=0$

$\overline{G}(\theta,\varphi)=\langle\overline{r}_\varphi(\theta,\varphi),\overline{r}_\varphi(\theta,\varphi)\rangle=R^2$,

па ни g није изометрија. Такође, $\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2=\frac{R^4}{\cos^4\theta}\neq R^4\cos^2\theta=EG-F^2$, па g не чува ни површине. Штавише, није тешко израчунати да је Гаусова кривина сфере једнака $\frac{1}{R^2}$ у свакој тачки, а да је Гаусова кривина цилиндра једнака 0 у свакој тачки, па не може постојати изометрија сфере на цилиндар.

24. Дате су параметризоване површи $r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, a\ln u)$, $u>0$, $v\in(0,2\pi)$, $a>0$, и $\sigma(s,t)=(s\cos t, s\sin t, at)$, $s>0$, $t\in(0,2\pi)$, $a>0$. Доказати да постоји дифеоморфизам између датих површи који чува Гаусову кривину површи, али да не постоји изометрија између датих површи.

Израчунајмо Гаусове кривине ових површи.

$r_u(u,v)=(\cos v, \sin v, \frac{a}{u})$

$r_v(u,v)=(-u\sin v, u\cos v, 0)$

$E^r(u,v)=\langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle=\cos^2 v+\sin^2 v+\frac{a^2}{u^2}=1+\frac{a^2}{u^2}=\frac{u^2+a^2}{u^2}$

$F^r(u,v)=\langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle=-u\cos v\sin v+u\sin v\cos v+0=0$

$G^r(u,v)=\langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+0^2=u^2$

$r_u(u,v)\times r_v(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & \frac{a}{u}\\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}=(-a\cos v, -a\sin v, u\cos^2 v+u\sin^2 v)=(-a\cos v, -a\sin v, u)$

$\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|^2=a^2\cos^2 v+a^2\sin^2 v+u^2=a^2+u^2\Rightarrow\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|=\sqrt{a^2+u^2}$

$n^r(u,v)=\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{\|r_u(u,v)\times r_v(u,v)\|}=\left(\frac{-a\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}}, \frac{-a\sin v}{\sqrt{a^2+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}\right)$

$r_{uu}(u,v)=(0,0,-\frac{a}{u^2})$

$r_{uv}(u,v)=(-\sin v, \cos v, 0)$

$r_{vv}(u,v)=(-u\cos v, -u\sin v, 0)$

$e^r(u,v)=\langle r_{uu}(u,v), n^r(u,v)\rangle=0+0-\frac{a}{u\sqrt{a^2+u^2}}=-\frac{a}{u\sqrt{a^2+u^2}}$

$f^r(u,v)=\langle r_{uv}(u,v), n^r(u,v)\rangle=\frac{a\cos v\sin v}{\sqrt{a^2+u^2}}-\frac{a\sin v\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}}+0=0$

$g^r(u,v)=\langle r_{vv}(u,v), n^r(u,v)\rangle=\frac{au\cos^2 v}{\sqrt{a^2+u^2}}+\frac{au\sin^2 v}{\sqrt{a^2+u^2}}+0=\frac{au}{\sqrt{a^2+u^2}}$

$$K(u,v)=\frac{e^r(u,v)g^r(u,v)-f^r(u,v)^2}{E^r(u,v)G^r(u,v)-F^r(u,v)^2}=\frac{-\frac{a}{u\sqrt{a^2+u^2}}\cdot\frac{au}{\sqrt{a^2+u^2}}-0^2}{\frac{u^2+a^2}{u^2}\cdot u^2-0^2}=\frac{-\frac{a^2}{a^2+u^2}}{u^2+a^2}=-\frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}$$

$\sigma(s,t)=(s\cos t, s\sin t, at)$

$\sigma_s(s,t)=(\cos t, \sin t, 0)$

$\sigma_t(s,t)=(-s\sin t, s\cos t, a)$

$E^\sigma(s,t)=\langle \sigma_s(s,t), \sigma_s(s,t)\rangle=\cos^2 t+\sin^2 t+0^2=1$

$F^\sigma(s,t)=\langle \sigma_s(s,t), \sigma_t(s,t)\rangle=-s\cos t\sin t+s\sin t\cos t+0=0$

$G^\sigma(s,t)=\langle \sigma_t(s,t), \sigma_t(s,t)\rangle=s^2\sin^2 t+s^2\cos^2 t+a^2=s^2+a^2$

$$\sigma_s(s,t)\times\sigma_t(s,t)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & 0 \\ -s\sin t & s\cos t & a\end{vmatrix}=(a\sin t, -a\cos t, s\cos^2 t+s\sin^2 t)=(a\sin t, -a\cos t, s)$$

$\|\sigma_s(s,t)\times\sigma_t(s,t)\|^2=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+s^2=a^2+s^2 \Rightarrow \|\sigma_s(s,t)\times\sigma_t(s,t)\|=\sqrt{a^2+s^2}$

$\sigma_{ss}(s,t)=(0,0,0)$

$$n^\sigma(s,t)=\frac{\sigma_s(s,t)\times\sigma_t(s,t)}{\|\sigma_s(s,t)\times\sigma_t(s,t)\|}=\left(\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+s^2}}, \frac{-a\cos t}{\sqrt{a^2+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\right)$$

$\sigma_{st}(s,t)=(-\sin t, \cos t, 0)$

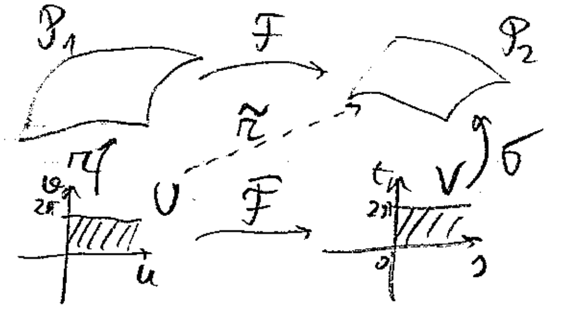
$\sigma_{tt}(s,t)=(-s\cos t, -s\sin t, 0)$

$e^\sigma(s,t)=\langle \sigma_{ss}(s,t), n^\sigma(s,t)\rangle=0$

$$f^\sigma(s,t)=\langle \sigma_{st}(s,t), n^\sigma(s,t)\rangle=\frac{-a\sin^2 t}{\sqrt{a^2+s^2}}+\frac{-a\cos^2 t}{\sqrt{a^2+s^2}}+0=\frac{-a}{\sqrt{a^2+s^2}}$$

$g^\sigma(s,t)$ – не мора да се рачуна

$$K^\sigma(s,t)=\frac{e^\sigma(s,t)g^\sigma(s,t)-f^\sigma(s,t)^2}{E^\sigma(s,t)G^\sigma(s,t)-F^\sigma(s,t)^2}=\frac{0-\frac{a^2}{a^2+s^2}}{1\cdot(s^2+a^2)-0^2}=\frac{-\frac{a^2}{a^2+s^2}}{s^2+a^2}=-\frac{a^2}{(a^2+s^2)^2}$$



Нека је $\mathcal{F}$ неки дифеоморфизам површи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, где је $\mathcal{P}_1$ параметризована са $\pi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathcal{P}_1$, а $\mathcal{P}_2$ са $\sigma:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathcal{P}_2$. Довољно је наћи дифеоморфизам $\overline{\mathcal{F}}:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ такав да је $\mathcal{F}=\sigma\circ\overline{\mathcal{F}}\circ\pi^{-1}$, тј. $\overline{\mathcal{F}}=\sigma^{-1}\circ\mathcal{F}\circ\pi$. Пошто желимо да $\mathcal{F}$ чува Гаусову кривину, тј. ако је $P\in\mathcal{P}_1$ тачка на $\mathcal{P}_1$ и $Q=\mathcal{F}(P)\in\mathcal{P}_2$ њена слика, онда је $K^{\mathcal{P}_1}(P)=K^{\mathcal{P}_2}(Q)$. Другим речима, ако је $P=\pi(u_0,v_0)$ и $Q=\sigma(s_0,t_0)$, онда је $K^\pi(u_0,v_0)=K^\sigma(s_0,t_0)$. Како је $K^\pi(u_0,v_0)=-\frac{a^2}{(a^2+u_0^2)^2}$, а $K^\sigma(s_0,t_0)=-\frac{a^2}{(a^2+s_0^2)^2}$, једнакост важи ако и само ако је $u_0=s_0$. То значи да дифеоморизам $\overline{\mathcal{F}}$ који чува Гаусову кривину мора бити облика $(s,t)=\overline{\mathcal{F}}(u,v)=(\beta u, f(u,v))$, за неко $\beta\in\{-1,1\}$ и пресликавање f. На пример, један такав дифеоморфизам је $\overline{\mathcal{F}}(u,v)=(u,v)$, тј. идентичко пресликавање (тада је $\beta=1$ и $f(u,v)=v$).

Претпоставимо да постоји дифеоморфизам $\mathcal{F}$ који је изометрија површи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Тада $\mathcal{F}$ чува Гаусову кривину, па је $\overline{\mathcal{F}}(u,v)=(\beta u, f(u,v))$, за неко $\beta\in\{-1,1\}$ и пресликавање f, а репараметризација површи $\mathcal{P}_2$ је $\tilde{\pi}:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathcal{P}_2$, $\tilde{\pi}=\sigma\circ\overline{\mathcal{F}}$, односно $\tilde{\pi}(u,v)=\sigma(\beta u, f(u,v))=$ $=(\beta u\cos f(u,v), \beta u\sin f(u,v), a f(u,v))$. Одредимо коефицијенте прве основне форме:

$\tilde{\pi}_u(u,v)=(\beta\cos f(u,v)-\beta u\sin f(u,v)\cdot f_u(u,v), \beta\sin f(u,v)+\beta u\cos f(u,v)\cdot f_u(u,v), a f_u(u,v))$

$\tilde{\pi}_v(u,v)=(-\beta u\sin f(u,v)\cdot f_v(u,v), \beta u\cos f(u,v)\cdot f_v(u,v), a\, f_v(u,v))$

$E^{\tilde{\pi}}(u,v)=\langle \tilde{\pi}_u(u,v),\tilde{\pi}_u(u,v)\rangle = \beta^2\cos^2 f(u,v) - \cancel{2\beta^2 u\cos f(u,v)\sin f(u,v) f_u(u,v)} + \beta^2 u^2\sin^2 f(u,v)\cdot f_u(u,v)^2 +$
$+\beta^2\sin^2 f(u,v) + \cancel{2\beta^2 u\sin f(u,v)\cos f(u,v)\cdot f_u(u,v)} + \beta^2 u^2\cos^2 f(u,v)\cdot f_u(u,v)^2 + a^2 f_u(u,v)^2 =$
$=\beta^2+\beta^2 u^2 f_u(u,v)^2 + a^2 f_u(u,v)^2 = 1+(u^2+a^2) f_u(u,v)^2 \quad (\beta^2=1$ јер је $\beta\in\{-1,1\})$

$F^{\tilde{\pi}}(u,v)=\langle \tilde{\pi}_u(u,v),\tilde{\pi}_v(u,v)\rangle = \cancel{-\beta^2 u\cos f(u,v)\sin f(u,v)\cdot f_v(u,v)} + \beta^2 u^2\sin^2 f(u,v) f_u(u,v) f_v(u,v) + \quad (\beta^2=1)$
$+\cancel{\beta^2 u\sin f(u,v)\cos f(u,v) f_v(u,v)} + \beta^2 u^2\cos^2 f(u,v) f_u(u,v) f_v(u,v) + a^2 f_u(u,v) f_v(u,v) = (u^2+a^2) f_u(u,v) f_v(u,v)$

$G^{\tilde{\pi}}(u,v)=\langle \tilde{\pi}_v(u,v),\tilde{\pi}_v(u,v)\rangle = \beta^2 u^2\sin^2 f(u,v) f_v(u,v)^2 + \beta^2 u^2\cos^2 f(u,v) f_v(u,v)^2 + a^2 f_v(u,v)^2 = (u^2+a^2) f_v(u,v)^2$

$\mathcal{F}$ је изометрија, па следи да репаметризација $\tilde{\pi}=\sigma\circ\mathcal{F}$ површи $\mathcal{P}_2$ има исте коефицијенте прве основне форме као површ $\mathcal{P}_1$, тј. $E^{\pi}(u,v)=E^{\tilde{\pi}}(u,v)$, $F(u,v)=F^{\tilde{\pi}}(u,v)$ и $G^{\pi}(u,v)=G^{\tilde{\pi}}(u,v)$. Добијамо

$$1+\frac{a^2}{u^2}=1+(u^2+a^2) f_u(u,v)^2$$
$$0=(u^2+a^2) f_u(u,v) f_v(u,v)$$
$$u^2=(u^2+a^2) f_v(u,v)^2$$

Како је $u>0$ и $a>0$, следи да је $u^2+a^2>0$, па је $f_u(u,v)=0$ или $f_v(u,v)=0$. Не може бити $f_v(u,v)=0$, јер би онда било $u^2=(u^2+a^2)\cdot f_v(u,v)^2=0$, што је немогуће. Дакле, $f_u(u,v)=0$, међутим, онда је $\frac{a^2}{u^2}=(u^2+a^2)\cdot f_u(u,v)^2=0$, што је контрадикција. Према томе, претпоставка да постоји изометрија $\mathcal{F}$ доводи до контрадикције, што значи да не постоји изометрија између површи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, иако постоји бесконачно много дифеоморфизама који чувају Гаусову кривину.

25. Дати су катеноид и хеликоид као параметризоване површи $f:\mathbb{R}\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ и $g:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ са $f(u,v)=(\mathrm{ch}u\cos v, \mathrm{ch}u\sin v, u)$ и $g(u,v)=(\mathrm{sh}u\sin v, -\mathrm{sh}u\cos v, v)$. Дефинишимо фамилију параметризованих површи h_t, за $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, са $h_t(u,v)=g(u,v)\cos t+f(u,v)\sin t$, $(u,v)\in(0,+\infty)\times(0,2\pi)$.

(а) Доказати да су све површи h_t међусобно изометричне.

(б) Доказати да се главне (асимптотске) линије на хеликоиду изометријом из дела (а) сликају на асимптотске (главне) линије на катеноиду.

(а) $f_u(u,v)=(\mathrm{sh}u\cos v, \mathrm{sh}u\sin v, 1)$

$f_v(u,v)=(-\mathrm{ch}u\sin v, \mathrm{ch}u\cos v, 0)$

$E^f(u,v)=\langle f_u(u,v), f_u(u,v)\rangle = \mathrm{sh}^2u\cos^2v+\mathrm{sh}^2u\sin^2v+1=\mathrm{sh}^2u+1=\mathrm{ch}^2u$

$F^f(u,v)=\langle f_u(u,v), f_v(u,v)\rangle = -\mathrm{sh}u\,\mathrm{ch}u\cos v\sin v+\mathrm{sh}u\,\mathrm{ch}u\sin v\cos v+0=0$

$G^f(u,v)=\langle f_v(u,v), f_v(u,v)\rangle = \mathrm{ch}^2u\sin^2v+\mathrm{ch}^2u\cos^2v+0^2=\mathrm{ch}^2u$

$g_u(u,v)=(\mathrm{ch}u\sin v, -\mathrm{ch}u\cos v, 0)$

$g_v(u,v)=(\mathrm{sh}u\cos v, \mathrm{sh}u\sin v, 1)$

$E^g(u,v)=\langle g_u(u,v), g_u(u,v)\rangle = \mathrm{ch}^2u\sin^2v+\mathrm{ch}^2u\cos^2v+0^2=\mathrm{ch}^2u$

$F^g(u,v)=\langle g_u(u,v), g_v(u,v)\rangle = \mathrm{ch}u\,\mathrm{sh}u\sin v\cos v-\mathrm{ch}u\,\mathrm{sh}u\cos v\sin v+0=0$

$G^g(u,v)=\langle g_v(u,v), g_v(u,v)\rangle = \mathrm{sh}^2u\cos^2v+\mathrm{sh}^2u\sin^2v+1=\mathrm{sh}^2u+1=\mathrm{ch}^2u$

$(h_t)_u(u,v)=\cos t\cdot g_u(u,v)+\sin t\cdot f_u(u,v)$

$(h_t)_v(u,v)=\cos t\cdot g_v(u,v)+\sin t\cdot f_v(u,v)$

$E^{h_t}(u,v)=\langle (h_t)_u(u,v),(h_t)_u(u,v)\rangle=\cos^2t\langle g_u(u,v),g_u(u,v)\rangle+2\cos t\sin t\langle g_u(u,v),f_u(u,v)\rangle+\sin^2t\langle f_u(u,v),f_u(u,v)\rangle=$
$=\cos^2t\cdot E^g(u,v)+2\cos t\sin t\cdot\langle g_u(u,v),f_u(u,v)\rangle+\sin^2t\cdot E^f(u,v)$

$\langle g_u(u,v),f_u(u,v)\rangle=\langle(\mathrm{ch}u\sin v,-\mathrm{ch}u\cos v,0),(\mathrm{sh}u\cos v,\mathrm{sh}u\sin v,1)\rangle=\mathrm{ch}u\,\mathrm{sh}u\sin v\cos v-\mathrm{ch}u\,\mathrm{sh}u\cos v\sin v+0=0$

$\langle g_u(u,v),f_v(u,v)\rangle=\langle(\mathrm{ch}u\sin v,-\mathrm{ch}u\cos v,0),(-\mathrm{ch}u\sin v,\mathrm{ch}u\cos v,0)\rangle=-\mathrm{ch}^2u\sin^2v-\mathrm{ch}^2u\cos^2v+0=-\mathrm{ch}^2u$

$\langle g_v(u,v),f_u(u,v)\rangle=\langle(\mathrm{sh}u\cos v,\mathrm{sh}u\sin v,1),(\mathrm{sh}u\cos v,\mathrm{sh}u\sin v,1)\rangle=\mathrm{sh}^2u\cos^2v+\mathrm{sh}^2u\sin^2v+1=\mathrm{sh}^2u+1=\mathrm{ch}^2u$

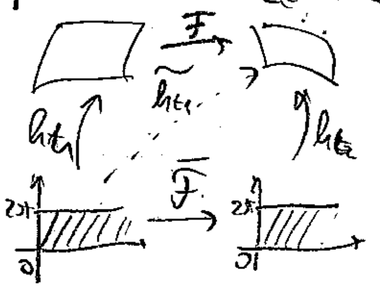
$\langle g_v(u,v),f_v(u,v)\rangle=\langle(\mathrm{sh}u\cos v,\mathrm{sh}u\sin v,1),(-\mathrm{ch}u\sin v,\mathrm{ch}u\cos v,0)\rangle=-\mathrm{sh}u\,\mathrm{ch}u\cos v\sin v+\mathrm{sh}u\,\mathrm{ch}u\sin v\cos v+0=0$

$E^{h_t}(u,v)=\cos^2t\cdot\mathrm{ch}^2u+2\cos t\sin t\cdot0+\sin^2t\cdot\mathrm{ch}^2u=\mathrm{ch}^2u$

$F^{h_t}(u,v)=\langle (h_t)_u(u,v),(h_t)_v(u,v)\rangle=\cos^2t\langle g_u(u,v),g_v(u,v)\rangle+\cos t\sin t\left(\langle g_u(u,v),f_v(u,v)\rangle+\langle g_v(u,v),f_u(u,v)\rangle\right)+$
$+\sin^2t\cdot\langle f_u(u,v),f_v(u,v)\rangle=\cos^2t\cdot F^g(u,v)+\cos t\sin t(-\mathrm{ch}^2u+\mathrm{ch}^2u)+\sin^2t\cdot F^f(u,v)=0+0+0=0$

$G^{h_t}(u,v)=\langle (h_t)_v(u,v),(h_t)_v(u,v)\rangle=\cos^2t\cdot\langle g_v(u,v),g_v(u,v)\rangle+2\cos t\sin t\langle g_v(u,v),f_v(u,v)\rangle+\sin^2t\cdot\langle f_v(u,v),f_v(u,v)\rangle=$
$=\cos^2t\cdot G^g(u,v)+2\cos t\sin t\cdot0+\sin^2t\cdot G^f(u,v)=\cos^2t\cdot\mathrm{ch}^2u+\sin^2t\cdot\mathrm{ch}^2u=\mathrm{ch}^2u$

Дакле, све површи h_t, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, имају исте коефицијенте прве основне форме, што значи да је идентичко пресликавање $\bar{\mathcal{F}}:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ изометрија било које две површи h_{t_1} и h_{t_2} (зато што $\tilde{h}_{t_2}=h_{t_2}\circ\bar{\mathcal{F}}=h_{t_2}$, пошто је $\bar{\mathcal{F}}=Id$, има исте коефицијенте прве форме као и h_{t_1}).



Специјално, $h_0(u,v)=g(u,v)$ и $h_{\frac{\pi}{2}}(u,v)=f(u,v)$, тј. део катеноида и хеликоид, јесу изометричне површи.

(б) Параметризација $g(u,v)=(\mathrm{sh}u\sin v,-\mathrm{sh}u\cos v,v)$ није стандардна параметризација хеликоида (то би била $\tilde{g}(s,t)=(s\cos t,s\sin t,t)$), али видимо да дифеоморфизмом Φ таквим да је $(u,v)=\Phi(s,t)=(\mathrm{arsh}\,s,t+\frac{\pi}{2})$ добијамо $\tilde{g}(s,t)=g(\Phi(s,t))=g(\mathrm{arsh}\,s,t+\frac{\pi}{2})=$
$=(\mathrm{sh}(\mathrm{arsh}\,s)\sin(t+\frac{\pi}{2}),-\mathrm{sh}(\mathrm{arsh}\,s)\cos(t+\frac{\pi}{2}),t+\frac{\pi}{2})=(s\cos t,s\sin t,t)+(0,0,\frac{\pi}{2})$ (стандардно параметризован хеликс транслиран за вектор $(0,0,\frac{\pi}{2})$, тј. за $\frac{\pi}{2}$ у смеру раста z-осе). Тада је $(s,t)\in(0,+\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ (јер је $t+\frac{\pi}{2}=v\in(0,2\pi)$).

У 17. задатку смо показали да су главне линије хеликоида $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,av)$ одређене са $\mathrm{arsh}\frac{u}{a}+v=d=const$ и $\mathrm{arsh}\frac{u}{a}-v=c=const$, па како је хеликоид $\tilde{g}(s,t)$ такав да је $a=1$, следи да су једначине главних линија $\mathrm{arsh}\,s+t=d=const$ и

$\operatorname{arsh} s - t = c = const$. Репараметризација $(u,v) = \Phi(s,t) = (\operatorname{arsh} s, t+\frac{\pi}{2})$ даје једначине главних линија у параметризацији $g(u,v)$ и оне су $u+v-\frac{\pi}{2}=d=const$, тј. $u+v=d_1=const$ и $u-v+\frac{\pi}{2}=c=const$, тј. $u-v=c_1=const$. Како је изометрија $\mathcal{F}$ између дела катеноида $f(u,v)$ и хеликоида $g(u,v)$ дата са $\overline{\mathcal{F}}=Id$ (тј. $\mathcal{F}=g\circ\overline{\mathcal{F}}\circ f^{-1}=g\circ f^{-1}$), довољно је доказати да су асимптотске линије на катеноиду $f(u,v)$ дате истим једначинама као и главне линије на хелоиду да бисмо добили да се асимптотске линије на катеноиду сликају на главне линије на хеликоиду.

$$f_u(u,v)\times f_v(u,v)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \operatorname{sh}u\cos v & \operatorname{sh}u\sin v & 1 \\ -\operatorname{ch}u\sin v & \operatorname{ch}u\cos v & 0\end{vmatrix}=(-\operatorname{ch}u\cos v, -\operatorname{ch}u\sin v, \operatorname{sh}u\operatorname{ch}u\cos^2 v+\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u\sin^2 v)=$$
$$=(-\operatorname{ch}u\cos v, -\operatorname{ch}u\sin v, \operatorname{sh}u\operatorname{ch}u)$$

$$\|f_u(u,v)\times f_v(u,v)\|^2=\operatorname{ch}^2u\cos^2v+\operatorname{ch}^2u\sin^2v+\operatorname{sh}^2u\operatorname{ch}^2u=\operatorname{ch}^2u+\operatorname{sh}^2u\operatorname{ch}^2u=\operatorname{ch}^2u(1+\operatorname{sh}^2u)=\operatorname{ch}^4u$$

$$n^f(u,v)=\frac{f_u(u,v)\times f_v(u,v)}{\|f_u(u,v)\times f_v(u,v)\|}=\left(\frac{-\cos v}{\operatorname{ch}u}, \frac{-\sin v}{\operatorname{ch}u}, \frac{\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u}\right)$$

$$f_{uu}(u,v)=(\operatorname{ch}u\cos v, \operatorname{ch}u\sin v, 0)$$
$$f_{uv}(u,v)=(-\operatorname{sh}u\sin v, \operatorname{sh}u\cos v, 0)$$
$$f_{vv}(u,v)=(-\operatorname{ch}u\cos v, -\operatorname{ch}u\sin v, 0)$$
$$e^f(u,v)=\langle f_{uu}(u,v), n^f(u,v)\rangle=-\cos^2v-\sin^2v+0=-1$$
$$f^f(u,v)=\langle f_{uv}(u,v), n^f(u,v)\rangle=\frac{\operatorname{sh}u\sin v\cos v}{\operatorname{ch}u}-\frac{\operatorname{sh}u\cos v\sin v}{\operatorname{ch}u}+0=0$$
$$g^f(u,v)=\langle f_{vv}(u,v), n^f(u,v)\rangle=\cos^2v+\sin^2v+0=1$$

Крива $\alpha(t)=f(u(t),v(t))$ на катеноиду f јесте асимптотска линија ако и само ако је $\mathrm{II}(\alpha'(t),\alpha'(t))=0$. Како је $\alpha'(t)=f_u(u(t),v(t))\cdot u'(t)+f_v(u(t),v(t))\cdot v'(t)$, услов је
$$(u'(t)\ \ v'(t))\begin{pmatrix} e^f(u(t),v(t)) & f^f(u(t),v(t)) \\ f^f(u(t),v(t)) & g^f(u(t),v(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t)\end{pmatrix}=0,$$ односно $(u'(t)\ \ v'(t))\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t)\end{pmatrix}=0.$

Дакле, $(-u'(t)\ \ v'(t))\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t)\end{pmatrix}=0$, тј. $-u'(t)^2+v'(t)^2=0$, односно $u'(t)^2=v'(t)^2$. Добијамо $u'(t)=v'(t)$ и $u'(t)=-v'(t)$, што након интеграције даје $u(t)=v(t)+c_1$ и $u(t)=-v(t)+d_1$, односно $u+v=d_1=const$ и $u-v=c_1=const$, односно асимптотске линије на катеноиду $f(u,v)$ дате су истим једначинама као главне линије на хеликоиду $g(u,v)$, па се изометријом $\mathcal{F}=g\circ f^{-1}=g\circ Id\circ f^{-1}$ ($\overline{\mathcal{F}}=Id$) асимптотске линије на катеноиду сликају на главне линије на хеликоиду. Преостаје још да се докаже да се изометријом $\mathcal{F}$ главне линије на катеноиду сликају на асимптотске линије на хеликоиду.

Како је у параметризацији $f(u,v)$ катеноида испуњено $F^f(u,v)=f^f(u,v)=0$, следи да су координатне линије $u=u_0=const$ и $v=v_0=const$ главне. Дакле, треба доказати да су на хеликоиду $g(u,v)$ координатне линије асимптотске. Из 17. задатка имамо да су у параметризацији $r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, av)$ коефицијенти друге форме $e^r(u,v)=0$, $f^r(u,v)=-\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}$, $g^r(u,v)=0$, па како је код $\overline{g}(s,t)$ испуњено $a=1$, добијамо $e^{\tilde g}(s,t)=g^{\tilde g}(s,t)=0$ и $f^{\tilde g}(s,t)=-\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$. Крива $\beta(\tau)=\tilde g(s(\tau),t(\tau))$ је асимптотска на хеликоиду $\tilde g(s,t)$ ако и само ако је $\mathrm{II}(\beta'(\tau),\beta'(\tau))=0$, те пошто важи $\beta'(\tau)=\tilde g_s(s(\tau),t(\tau))\cdot s'(\tau)+\tilde g_t(s(\tau),t(\tau))\cdot t'(\tau)$, услов је $(s'(\tau)\ t'(\tau))\begin{pmatrix} e^{\tilde g}(s(\tau),t(\tau)) & f^{\tilde g}(s(\tau),t(\tau))\\ f^{\tilde g}(s(\tau),t(\tau)) & g^{\tilde g}(s(\tau),t(\tau))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s'(\tau)\\t'(\tau)\end{pmatrix}=0$, тј. $(s'(\tau)\ t'(\tau))\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{1+s(\tau)^2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{1+s(\tau)^2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s'(\tau)\\t'(\tau)\end{pmatrix}=0$. Добијамо $\left(-\frac{t'(\tau)}{\sqrt{1+s(\tau)^2}}\ \ -\frac{s'(\tau)}{\sqrt{1+s(\tau)^2}}\right)\begin{pmatrix}s'(\tau)\\t'(\tau)\end{pmatrix}=0$, односно $-\frac{2}{\sqrt{1+s(\tau)^2}}s'(\tau)t'(\tau)=0$. Како је $-\frac{2}{\sqrt{1+s(\tau)^2}}\neq 0$, следи да је $s'(\tau)=0$ или $t'(\tau)=0$, па су асимптотске линије одређене једначинама $s=s_0=const$ и $t=t_0=const$. Репараметризација $(u,v)=\Phi(s,t)=(\operatorname{arsh} s, t+\frac{\pi}{2})$ даје једначине асимптотских линија у параметризацији $g(u,v)$ и оне су $u=\operatorname{arsh} s=\operatorname{arsh} s_0=const$ и $v=t+\frac{\pi}{2}=t_0+\frac{\pi}{2}=const$, тј. $u=const$ и $v=const$. Дакле, изометрија $\mathcal{F}=g\circ f^{-1}=g\circ\bar{\mathcal{F}}\circ f^{-1}$ дата са $\bar{\mathcal{F}}=Id$ слика главне линије $u=const, v=const$ на катеноиду $f(u,v)$ у асимптотске линије $u=const, v=const$ на хеликоиду $g(u,v)$.

26. Нека је $\alpha: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ природно параметризована крива. Тангентна површ криве α је линијска површ дата параметризацијом $r(s,v)=\alpha(s)+v\,T(s)$, $s\in I$, $v>0$.

(а) Доказати да је површ r изометрична (делу) равни експлицитно одређујући формуле те изометрије.

(б) Одредити експлицитне формуле ове изометрије уколико је крива кружни хеликс $\alpha(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, $t\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b\neq 0$.

(а) Нека је $\kappa_\alpha(s): I\to\mathbb{R}$ функција кривине криве α. Постоји јединствена природно параметризована крива $\beta: I\to\mathbb{R}^2$ (до на директну изометрију равни) таква да је $\kappa_\beta(s)=\kappa_\alpha(s)$. Параметризујмо део равни $\mathbb{R}^2$ као тангентну површ равнске криве β, тј. нека је $\sigma: I\times(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\sigma(s,t)=\beta(s)+v\,T_\beta(s)$. Израчунајмо коефицијенте прве форме површи r и σ.

$r_s(s,v)=\alpha'(s)+v\,T'(s)=T(s)+v\cdot\kappa(s)N(s)$

$r_v(s,v)=T(s)$

$E^r(s,v)=\langle r_s(s,v), r_s(s,v)\rangle=1+v^2\kappa(s)^2$

$F^r(s,v)=\langle r_s(s,v), r_v(s,v)\rangle=1+0=1$

$G^r(s,v)=\langle r_v(s,v), r_v(s,v)\rangle=1$

$\sigma_s(s,v)=\beta'(s)+v\,T_\beta'(s)=T_\beta(s)+v\cdot\kappa(s)\cdot N_\beta(s)$

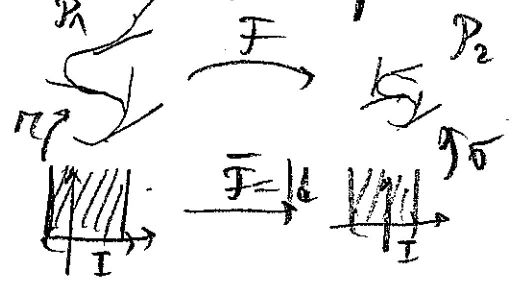
$\sigma_v(s,v)=T_\beta(s)$

$E^\sigma(s,v)=\langle\sigma_s(s,v),\sigma_s(s,v)\rangle=1+v^2\kappa(s)^2$

$F^\sigma(s,v)=\langle\sigma_s(s,v),\sigma_v(s,v)\rangle=1+0=1$

$G^\sigma(s,v)=\langle\sigma_v(s,v),\sigma_v(s,v)\rangle=1$

Како су кривине $\kappa_\alpha(s)$ и $\kappa_\beta(s)$ једнаке (и означене са $\kappa(s)$), следи да су коефицијенти прве форме једнаки, што значи да $\bar{\mathcal{F}}=Id$ одређује изометрију $\mathcal{F}=\sigma\circ\bar{\mathcal{F}}\circ r^{-1}=\sigma\circ r^{-1}$ ових површи.



(б) Кружни хеликс је крива $\alpha(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, $t\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b\neq 0$. Како је $\alpha'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$, следи да је $\|\alpha'(t)\|^2=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2=a^2+b^2$, те ово не мора бити његова природна параметризација. Пронађимо функцију дужине лука и њен инверз и нађимо природну параметризацију хеликса.

$$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,du=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^t du=\sqrt{a^2+b^2}\cdot u\Big|_0^t=\sqrt{a^2+b^2}\cdot t\Rightarrow t=t(s)=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tilde{\alpha}(s)=\alpha(t(s))=\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\tilde{\alpha}'(s)=\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$T(s)=\tilde{\alpha}'(s)$$

$$T'(s)=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)=\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$$

$$\|T'(s)\|^2=\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+0^2=\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\Rightarrow \kappa(s)=\|T'(s)\|=\frac{a}{a^2+b^2}$$

У равни постоји јединствена крива β чија је кривина у свакој тачки једнака $\frac{a}{a^2+b^2}$ и то је круг полупречника $\frac{a^2+b^2}{a}$. Дакле, може се узети $\beta(t)=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\cos t, \frac{a^2+b^2}{a}\sin t\right)$. Како је $\beta'(t)=\left(-\frac{a^2+b^2}{a}\sin t, \frac{a^2+b^2}{a}\cos t\right)$ и $\|\beta'(t)\|^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}\sin^2 t+\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}\cos^2 t=\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}$, ова параметризација не мора бити природна. Функција дужине лука је

$$s_\beta(t)=\int_0^t\|\beta'(u)\|du=\int_0^t\frac{a^2+b^2}{a}du=\frac{a^2+b^2}{a}\int_0^t du=\frac{a^2+b^2}{a}u\Big|_0^t=\frac{a^2+b^2}{a}t\Rightarrow t=t_\beta(s)=\frac{as}{a^2+b^2}$$

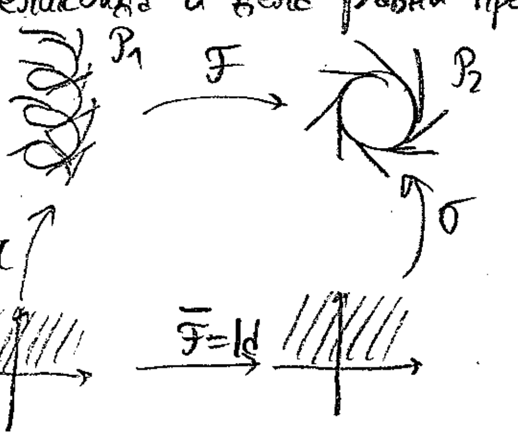
$$\Rightarrow\tilde{\beta}(s)=\beta(t_\beta(s))=\beta\left(\frac{as}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\cos\frac{as}{a^2+b^2}, \frac{a^2+b^2}{a}\sin\frac{as}{a^2+b^2}\right)$$

$$\tilde{\beta}'(s)=\left(-\cancel{\frac{a^2+b^2}{a}}\cdot\sin\frac{as}{a^2+b^2}\cdot\cancel{\frac{a}{a^2+b^2}}; \cancel{\frac{a^2+b^2}{a}}\cos\frac{as}{a^2+b^2}\cdot\cancel{\frac{a}{a^2+b^2}}\right)=\left(-\sin\frac{as}{a^2+b^2}, \cos\frac{as}{a^2+b^2}\right)$$

$$T_\beta(s)=\tilde{\beta}'(s)$$

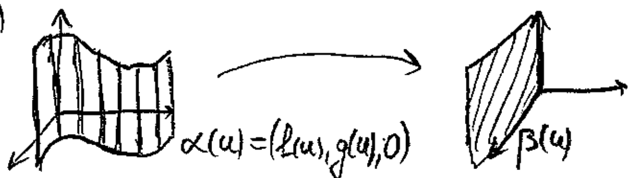
Тангентна површ хеликса је $r:\mathbb{R}\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}^3$, $r(s,v)=\tilde{\alpha}(s)+v\cdot T(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+$ $+v\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{av}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{av}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b(s+v)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,

а тангентна површ круга је $\sigma:\mathbb{R}\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$, $\sigma(s,v)=\tilde{\beta}(s)+v\cdot T_\beta(s)=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\cos\frac{as}{a^2+b^2}, \frac{a^2+b^2}{a}\sin\frac{as}{a^2+b^2}\right)+$ $+v\cdot\left(-\sin\frac{as}{a^2+b^2}, \cos\frac{as}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\cos\frac{as}{a^2+b^2}-v\sin\frac{as}{a^2+b^2}, \frac{a^2+b^2}{a}\sin\frac{as}{a^2+b^2}+v\cos\frac{as}{a^2+b^2}\right)$. Међутим, пресликавање σ није 1-1, па пресликавање $F=\sigma\circ r^{-1}$ није изометрија (јер није инвертибилно), него локална изометрија. Ако се уместо r и σ узму рестрикције на скупове $(0,2\pi)\times(0,+\infty)$, онда су и r и σ 1-1, па је $F=\sigma\circ r^{-1}$ изометрија дела тангентне површи хеликоида и дела равни представљеног као тангентне површ круга.



27. (а) Доказати да је цилиндрична површ $r(u,v)=(f(u), g(u), v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ изометрична (делу) равни експлицитно одређујући формуле те изометрије.
(б) Одредити експлицитне формуле изометрије између цилиндричне површи $r(u,v)=(u-\sin u, 1-\cos u, v)$, $u\in(0,2\pi)$, $v\in\mathbb{R}$, и дела равни.

(а)



Свака крива је изометрична делу праве (то можемо замислити тако што замислимо да је крива направљена од канапа и онда само исправимо канап). Самим тим и криву $\alpha(u)=(f(u),g(u),0)$ можемо исправити у отворену дуж, отворену полуправу или праву.

$\alpha'(u)=(f'(u),g'(u),0)$

$\|\alpha'(u)\|^2 = f'(u)^2+g'(u)^2 \Rightarrow \|\alpha'(u)\|=\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}$, $u\in\mathbb{R}$

$s(u)=\int_0^u\|\alpha'(t)\|dt=\int_0^u\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt$ – функција дужине лука

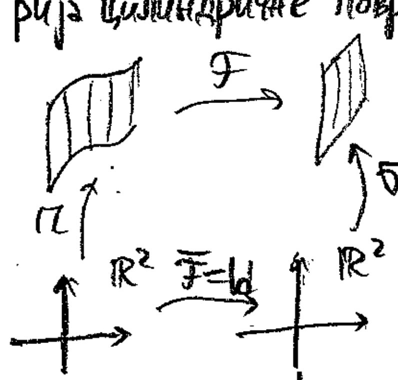
$\beta(u)=(s(u),0,0)$ – параметризација дела x-осе таква да $\alpha\circ\beta^{-1}$ представља изометрију тог дела x-осе (отворене дужи, отворене полуправе или целе праве) и криве α.

$\sigma(u,v)=(s(u),0,v)$ – параметризација дела Oxz-равни

$r_u(u,v)=(f'(u),g'(u),0)$
$r_v(u,v)=(0,0,1)$
$E^r(u,v)=\langle r_u(u,v),r_u(u,v)\rangle=f'(u)^2+g'(u)^2$
$F^r(u,v)=\langle r_u(u,v),r_v(u,v)\rangle=0$
$G^r(u,v)=\langle r_v(u,v),r_v(u,v)\rangle=1$

$\sigma_u(u,v)=(s'(u),0,0)=(\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2},0,0)$
$\sigma_v(u,v)=(0,0,1)$
$E^\sigma(u,v)=\langle\sigma_u(u,v),\sigma_u(u,v)\rangle=f'(u)^2+g'(u)^2$
$F^\sigma(u,v)=\langle\sigma_u(u,v),\sigma_v(u,v)\rangle=0$
$G^\sigma(u,v)=\langle\sigma_v(u,v),\sigma_v(u,v)\rangle=1$

Површи r и σ имају исте коефицијенте прве форме, што значи да је $\sigma\circ r^{-1}$ изометрија цилиндричне површи r и дела равни Oxz.



(б) Потражимо функцију дужине лука циклоиде $\alpha(u)=(u-\sin u, 1-\cos u, 0)$, $u\in(0,2\pi)$.

$\alpha'(u)=(1-\cos u, \sin u, 0)$

$\|\alpha'(u)\|^2=1-2\cos u+\underbrace{\cos^2u+\sin^2u}_{1}=2-2\cos u=2(1-\cos u)=2\cdot2\sin^2\frac{u}{2}=4\sin^2\frac{u}{2}=$

$\|\alpha'(u)\|=2\sin\frac{u}{2}$ (јер $u\in(0,2\pi)$, па $\frac{u}{2}\in(0,\pi)$ и $\sin\frac{u}{2}>0$)

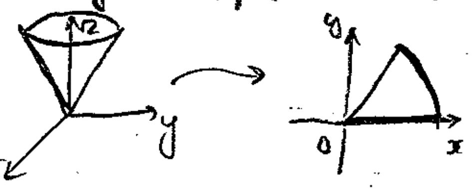
$s(u)=\int_0^u\|\alpha'(t)\|dt=\int_0^u 2\sin\frac{t}{2}dt=4\int_0^u\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{dt}{2}=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^u=-4\cos\frac{u}{2}+4=4(1-\cos\frac{u}{2})$

Тражена изометрија је $\mathcal{F}=\sigma\circ r^{-1}$, где је $\sigma(u,v)=(4(1-\cos\frac{u}{2}),0,v)$.

28. Дат је конус $z=a\sqrt{x^2+y^2}$, $a>0$, $(x,y)\neq(0,0)$.

а) Доказати да је дати конус локално изометричан равни експлицитно одређујући формуле те изометрије.

б) Израчунати најкраће растојање између тачака $A(0,1,\sqrt{3})$ и $B(0,-1,\sqrt{3})$ на конусу $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ и одредити све геодезијске линије које садрже ове две тачке.

(а) 

Замислимо да „исечемо" конус по изводници у равни Oxz и да га, као омотач купе направљен од папира, ~~развучемо у раван. Добићемо део равни одређен~~ двема полуправима са заједничким теменом, тј. угао у Oxy равни.

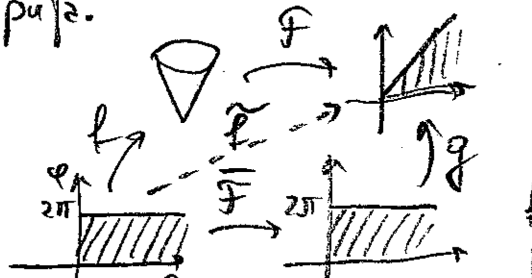
$z=a\sqrt{x^2+y^2}$

$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\rho>0$, $\varphi\in(0,2\pi)$

$z=a\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=a\sqrt{\rho^2}=a\rho$

Да бисмо лакше видели шта се дешава, ограничимо z на интервал $(0,a]$, тј. нека је $0<z\le a$. Тада добијамо омотач купе која за основу има круг у равни $z=a$ дат једначином $a=a\sqrt{x^2+y^2}$, тј. $x^2+y^2=1$, $z=a$. Обим тог круга је 2π, а растојање била које тачке (x_0,y_0,a) тог круга од врха конуса $(0,0,0)$ је једнако $\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-0)^2+(a-0)^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+a^2}=\sqrt{1+a^2}$. Кад се тај део конуса $0<z\le a$ развуче у раван, добија се кружни исечак полупречника $\sqrt{1+a^2}$. Централни угао тог кружног исечка добијамо из услова да је дужина лука тог исечка једнака 2π, односно обиму круга $x^2+y^2=1$, $z=a$ од којег настаје. Дакле, $\theta_{max}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}$. Следи да се део конуса $0<z\le a$ може изометрично пресликати у кружни исечак одређен поларним координатама у равни $0<r\le\sqrt{1+a^2}$, $0<\theta<\theta_{max}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}$.

Нека је конус параметризован помоћу $f(\rho,\varphi)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,a\rho)$, $\rho>0$, $\varphi\in(0,2\pi)$, а део равни помоћу $g(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$, $r>0$, $\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}\right)$. Како је део конуса $0<z\le a$ одређен са $0<a\rho\le a$, тј. $0<\rho\le 1$ и слика се у кружни исечак одређен са $0<r\le\sqrt{1+a^2}$, очекујемо да ће изометрија $\mathcal{F}$ бити одређена пресликавањем $(r,\theta)=\overline{\mathcal{F}}(\rho,\varphi)=\left(\rho\sqrt{1+a^2},\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\right)$. Докажимо да је $\mathcal{F}=g\circ\overline{\mathcal{F}}\circ f^{-1}$ тражена изометрија.



Нека је $\tilde{f}=g\circ\overline{\mathcal{F}}$ репараметризација дела равни. Тада је

$\tilde{f}(\rho,\varphi)=g(\overline{\mathcal{F}}(\rho,\varphi))=g\left(\rho\sqrt{1+a^2},\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\right)=\left(\rho\sqrt{1+a^2}\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}},\rho\sqrt{1+a^2}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\right)$.

$f_\rho(\rho,\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi,a)$

$f_\varphi(\rho,\varphi)=(-\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi,0)$

$E^f(\rho,\varphi)=\langle f_\rho(\rho,\varphi),f_\rho(\rho,\varphi)\rangle=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+a^2=1+a^2$

$F^f(\rho,\varphi)=\langle f_\rho(\rho,\varphi),f_\varphi(\rho,\varphi)\rangle=-\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho\sin\varphi\cos\varphi+0=0$

$G^f(\rho,\varphi)=\langle f_\varphi(\rho,\varphi),f_\varphi(\rho,\varphi)\rangle=\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2$

$\tilde{f}_\rho(\rho,\varphi)=\left(\sqrt{1+a^2}\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}, \sqrt{1+a^2}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

$\tilde{f}_\varphi(\rho,\varphi)=\left(-\rho\cancel{\sqrt{1+a^2}}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+a^2}}}, \rho\cancel{\sqrt{1+a^2}}\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+a^2}}}\right)=\left(-\rho\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}, \rho\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

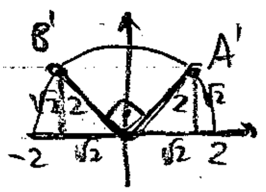
$E^{\tilde{f}}(\rho,\varphi)=\langle \tilde{f}_\rho(\rho,\varphi), \tilde{f}_\rho(\rho,\varphi)\rangle=(1+a^2)\cos^2\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}+(1+a^2)\sin^2\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}=1+a^2$

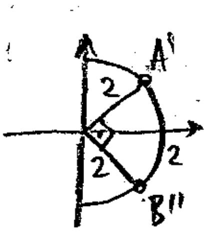
$F^{\tilde{f}}(\rho,\varphi)=\langle \tilde{f}_\rho(\rho,\varphi), \tilde{f}_\varphi(\rho,\varphi)\rangle=-\rho\sqrt{1+a^2}\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}+\rho\sqrt{1+a^2}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}=0$

$G^{\tilde{f}}(\rho,\varphi)=\langle \tilde{f}_\varphi(\rho,\varphi), \tilde{f}_\varphi(\rho,\varphi)\rangle=\rho^2\sin^2\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}+\rho^2\cos^2\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}=\rho^2$

Како f и $\tilde{f}$ имају исте коефицијенте прве форме, следи да су конус и део равни изометрични, а изометрија је $\mathcal{F}=g\circ\tilde{\mathcal{F}}\circ f^{-1}$, $\tilde{\mathcal{F}}(\rho,\varphi)=\left(\rho\sqrt{1+a^2}, \frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}\right)$.

(б) Код конуса $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ је $a=\sqrt{3}$, а параметризација је $f(\rho,\varphi)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,\sqrt{3}\rho)$. Тачка $A(0,1,\sqrt{3})$ има координате $\rho_0=1$, $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$, а тачка $B(0,-1,\sqrt{3})$ има координате $\rho_1=1$, $\varphi_1=\frac{3\pi}{2}$. Изометрија је одређена са $\tilde{\mathcal{F}}(\rho,\varphi)=(2\rho,\frac{\varphi}{2})$ (јер је $\sqrt{1+a^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$), па се тачка A слика у тачку $r_0=2$, $\theta_0=\frac{\pi}{4}$, а тачка B у тачку $r_1=2$, $\theta_1=\frac{3\pi}{4}$.





Посматраћемо изометрију дела конуса $f(\rho,\varphi)$ где је $\varphi\in(0,2\pi)$ у део равни $g(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$, $\theta\in(0,\pi)$ $(\theta=\frac{\varphi}{2}, r=2\rho)$ и дела конуса где је $\varphi\in(-\pi,\pi)$ у део равни где је $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $(\theta=\frac{\varphi}{2})$. Тачка A у оба случаја има исте координате, док у другом случају тачка B има координате $\rho_1'=1$, $\varphi_1'=-\frac{\pi}{2}$, па њена слика при изометрији има координате $r_1'=2$, $\varphi_1'=-\frac{\pi}{4}$. Геодезијске линије на конусу које спајају A и B (постоје тачно две) сликају се у дужи $A'B'$ и $A'B''$ (оне су геодезијске у равни). Како је $A'B'=A'B''=2\sqrt{2}$, следи да је најкраће растојање између A и B једнако $2\sqrt{2}$ и остварује се дуж обеју уочених геодезијских линија. Одредимо њихове једначине.

$A'B'$: $y=2\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$

$r\sin\theta=\sqrt{2}$, $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

$2\rho\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{2}$, $\frac{\varphi}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

$\rho\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

$A'B''$: $x=2\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$

$r\cos\theta=\sqrt{2}$, $\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

$2\rho\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{2}$, $\frac{\varphi}{2}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

$\rho\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\alpha(\varphi)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},\varphi\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\varphi,\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\varphi,\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right)$, $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

$\beta(\varphi)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}},\varphi\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\cos\varphi,\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\sin\varphi,\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)$, $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

29. Доказати да не постоји елементарна површ $r(u,v)$ за коју важи $E=1$, $F=0$, $G=\cos^2 u$, $e=\cos^2 u$, $f=0$, $g=1$.

Претпоставимо да је $r:U\to\mathbb{R}^3$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп, елементарна површ таква да је $E(u,v)=1$, $F(u,v)=0$, $G(u,v)=\cos^2 u$, $e(u,v)=\cos^2 u$, $f(u,v)=0$, $g(u,v)=1$. Тада, коефицијенти E и G не зависе од променљиве v и $F(u,v)=0$, па је елементарна површ r као у 19. задатку. Следи да је $\Gamma_{11}^1(u,v)=\frac{E_u(u,v)}{2E(u,v)}=0$, $\Gamma_{11}^2(u,v)=0$, $\Gamma_{12}^1(u,v)=0$, $\Gamma_{12}^2(u,v)=\frac{G_u(u,v)}{2G(u,v)}=\frac{2\cos u(-\sin u)}{2\cos^2 u}=-\operatorname{tg}u$,

$\Gamma_{22}^1(u,v)=-\frac{G_u(u,v)}{2E(u,v)}=-\frac{2\cos u(-\sin u)}{2}=\sin u\cos u$ и $\Gamma_{22}^2(u,v)=0$. Сетимо се Гаусових и Вајнгартенових једначина, које гласе:

$r_{uu}(u,v)=\Gamma_{11}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{11}^2(u,v)r_v(u,v)+e(u,v)n(u,v)=\cos^2u\cdot n(u,v)$

$r_{uv}(u,v)=\Gamma_{12}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{12}^2(u,v)r_v(u,v)+f(u,v)n(u,v)=-\operatorname{tg}u\cdot r_v(u,v)$

$r_{vv}(u,v)=\Gamma_{22}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{22}^2(u,v)r_v(u,v)+g(u,v)n(u,v)=\sin u\cos u\, r_u(u,v)+n(u,v)$

$n_u(u,v)=\beta_1^1(u,v)r_u(u,v)+\beta_1^2(u,v)r_v(u,v)=-\cos^2u\cdot r_u(u,v)$

$n_v(u,v)=\beta_2^1(u,v)r_u(u,v)+\beta_2^2(u,v)r_v(u,v)=-\frac{1}{\cos^2u}\cdot r_v(u,v)$

$\beta_1^1(u,v)=\frac{-e(u,v)G(u,v)+f(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}=\frac{-\cos^2u\cdot\cos^2u+0\cdot0}{1\cdot\cos^2u-0^2}=\frac{-\cos^{\cancel{4}2}u}{\cancel{\cos^2u}}=-\cos^2u$

$\beta_1^2(u,v)=\frac{-f(u,v)E(u,v)+e(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}=\frac{-0+0}{1\cdot\cos^2u-0^2}=0$

$\beta_2^1(u,v)=\frac{-f(u,v)G(u,v)+g(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}=\frac{-0+0}{1\cdot\cos^2u-0^2}=0$

$\beta_2^2(u,v)=\frac{-g(u,v)E(u,v)+f(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}=\frac{-1\cdot1+0\cdot0}{1\cdot\cos^2u-0^2}=\frac{-1}{\cos^2u}=-\frac{1}{\cos^2u}$

Из Гаусових и Вајнгартенових једначина се изводе изводе се Гаус-Петерсон-Мајнарди-Кодацијеве једначине које у неразвијеном облику гласе

$\left(\Gamma_{11}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{11}^2(u,v)r_v(u,v)+e(u,v)n(u,v)\right)_v=\left(\Gamma_{12}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{12}^2(u,v)r_v(u,v)+f(u,v)n(u,v)\right)_u$

$\left(\Gamma_{22}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{22}^2(u,v)r_v(u,v)+g(u,v)n(u,v)\right)_u=\left(\Gamma_{12}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{12}^2(u,v)r_v(u,v)+f(u,v)n(u,v)\right)_v$

$\left(\beta_1^1(u,v)r_u(u,v)+\beta_1^2(u,v)r_v(u,v)\right)_v=\left(\beta_2^1(u,v)r_u(u,v)+\beta_2^2(u,v)r_v(u,v)\right)_u$

(своде се на $(r_{uu})_v=(r_{uv})_u$, $(r_{vv})_u=(r_{uv})_v$ и $(n_u)_v=(n_v)_u$). Проверимо да ли су испуњене.

$(r_{uu})_v=\cos^2u\cdot n_v(u,v)=\cancel{\cos^2u}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{\cos^2u}}\cdot r_v(u,v)\right)=-r_v(u,v)$

$(r_{uv})_u=-\frac{1}{\cos^2u}\cdot r_v(u,v)-\operatorname{tg}u\cdot r_{uv}(u,v)=-\frac{1}{\cos^2u}\cdot r_v(u,v)-\operatorname{tg}u\cdot(-\operatorname{tg}u\cdot r_v(u,v))=\left(-\frac{1}{\cos^2u}+\operatorname{tg}^2u\right)\cdot r_v(u,v)=$

$=\frac{-1+\sin^2u}{\cos^2u}\cdot r_v(u,v)=\frac{\cancel{-\cos^2u}}{\cancel{\cos^2u}}\cdot r_v(u,v)=-r_v(u,v)$

$(r_{vv})_u=\cos^2u\, r_u(u,v)+\sin u\cdot(-\sin u)r_u(u,v)+\sin u\cos u\, r_{uu}(u,v)+n_u(u,v)=\cancel{\cos^2u\, r_u(u,v)}-\sin^2u\cdot r_u(u,v)+$
$+\sin u\cdot\cos u\cdot\cos^2u\cdot n(u,v)\cancel{-\cos^2u\, r_u(u,v)}=-\sin^2u\cdot r_u(u,v)+\sin u\cdot\cos^3u\cdot n(u,v)$

$(r_{uv})_v=-\operatorname{tg}u\cdot r_{vv}(u,v)=-\operatorname{tg}u\cdot\left(\sin u\cos u\, r_u(u,v)+n(u,v)\right)=-\frac{\sin u}{\cancel{\cos u}}\cdot\sin u\cdot\cancel{\cos u}\cdot r_u(u,v)-\operatorname{tg}u\cdot n(u,v)=$

$=-\sin^2u\cdot r_u(u,v)-\operatorname{tg}u\cdot n(u,v)$

Дакле, $(r_{vv})_u\neq(r_{uv})_v$, јер је $-\operatorname{tg}u\neq\sin u\cdot\cos^3u$, што је контрадикција. Према томе, елементарна површ $r(u,v)$ с коефицијентима прве и друге форме једнаким $E(u,v)=1$, $F(u,v)=0$, $G(u,v)=\cos^2u$, $e(u,v)=\cos^2u$, $f(u,v)=0$ и $g(u,v)=1$ не постоји.

30. Нека су коефицијенти прве форме конформно параметризоване површи $E=G=\lambda(u,v)$, $F(u,v)=0$. Доказати да је Гаусова кривина површи дата са $K=-\frac{1}{2\lambda}\Delta(\ln\lambda)$, где је Δ Лапласијан функције две променљиве $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}$.

Из Гаус-Петерсон-Мајнарди-Кодацијевих једначина може се извести образац за Гаусову кривину помоћу коефицијената прве форме (што доказује да је Гаусова кривина унутрашње својство површи, које се чува изометријама површи.

$$\left(\Gamma_{11}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{11}^2(u,v)r_v(u,v)+e(u,v)n(u,v)\right)_v=\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial v}(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{11}^1(u,v)r_{uv}(u,v)+\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial v}(u,v)\cdot r_v(u,v)+$$
$$+\Gamma_{11}^2(u,v)r_{vv}(u,v)+e_v(u,v)n(u,v)+e(u,v)n_v(u,v)=\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial v}(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{11}^1(u,v)\left(\Gamma_{12}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{12}^2(u,v)r_v(u,v)+\right.$$
$$\left.+f(u,v)n(u,v)\right)+\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial v}(u,v)r_v(u,v)+\Gamma_{11}^2(u,v)\left(\Gamma_{22}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{22}^2(u,v)r_v(u,v)+g(u,v)n(u,v)\right)+e_v(u,v)n(u,v)+$$
$$+e(u,v)\left(\beta_2^1(u,v)r_u(u,v)+\beta_2^2(u,v)r_v(u,v)\right)$$

$$\left(\Gamma_{12}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{12}^2r_v(u,v)+f(u,v)n(u,v)\right)_u=\frac{\partial\Gamma_{12}^1}{\partial u}(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{12}^1(u,v)r_{uu}(u,v)+\frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial u}(u,v)\cdot r_v(u,v)+$$
$$+\Gamma_{12}^2(u,v)\cdot r_{uv}(u,v)+f_u(u,v)n(u,v)+f(u,v)n_u(u,v)=\frac{\partial\Gamma_{12}^1}{\partial u}(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{12}^1(u,v)\left(\Gamma_{11}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{11}^2(u,v)r_v(u,v)+\right.$$
$$\left.+e(u,v)n(u,v)\right)+\frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial u}(u,v)r_v(u,v)+\Gamma_{12}^2(u,v)\left(\Gamma_{12}^1(u,v)r_u(u,v)+\Gamma_{12}^2(u,v)r_v(u,v)+f(u,v)n(u,v)\right)+f_u(u,v)n(u,v)+$$
$$+f(u,v)\left(\beta_1^1(u,v)r_u(u,v)+\beta_1^2(u,v)r_v(u,v)\right)$$

Израчунајмо коефицијенте уз r_v у овим изразима: У првом изразу $(r_{uu})_v$, он је једнак $\Gamma_{11}^1(u,v)\Gamma_{12}^2(u,v)+\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial v}(u,v)+\Gamma_{11}^2(u,v)\Gamma_{22}^2(u,v)+e(u,v)\beta_2^2(u,v)$, а у другом изразу $(r_{uv})_u$ је једнак $\Gamma_{12}^1(u,v)\Gamma_{11}^2(u,v)+\frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial u}(u,v)+\Gamma_{12}^2(u,v)\Gamma_{12}^2(u,v)+f(u,v)\beta_1^2(u,v)$. Како је $r_u(u,v), r_v(u,v), n(u,v)$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$, а вектори $(r_{uu})_v$ и $(r_{uv})_u$ су једнаки, следи да су једнаки и коефицијенти уз $r_v(u,v)$, па је $\Gamma_{11}^1(u,v)\Gamma_{12}^2(u,v)+\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial v}(u,v)+\Gamma_{11}^2(u,v)\Gamma_{22}^2(u,v)+e(u,v)\beta_2^2(u,v)=\Gamma_{12}^1(u,v)\Gamma_{11}^2(u,v)+\frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial u}(u,v)+\Gamma_{12}^2(u,v)\Gamma_{12}^2(u,v)+f(u,v)\beta_1^2(u,v)$. Приметимо да је

$$f(u,v)\beta_1^2(u,v)-e(u,v)\beta_2^2(u,v)=f(u,v)\cdot\frac{-f(u,v)E(u,v)+e(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}-e(u,v)\cdot\frac{g(u,v)E(u,v)-f(u,v)F(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}=$$
$$=\frac{-f(u,v)^2E(u,v)+\cancel{f(u,v)e(u,v)F(u,v)}+e(u,v)g(u,v)E(u,v)-\cancel{e(u,v)f(u,v)F(u,v)}}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}=$$
$$=\frac{E(u,v)\left(e(u,v)g(u,v)-f(u,v)^2\right)}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}=E(u,v)K(u,v),$$

те је $K(u,v)=\frac{1}{E(u,v)}\left(f(u,v)\beta_1^2(u,v)-e(u,v)\beta_2^2(u,v)\right)=\frac{1}{E(u,v)}\left(\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial u}(u,v)+\Gamma_{11}^1(u,v)\Gamma_{12}^2(u,v)+\Gamma_{11}^2(u,v)\Gamma_{22}^2(u,v)-\right.$ $\left.-\Gamma_{12}^1(u,v)\Gamma_{11}^2(u,v)-\Gamma_{12}^2(u,v)\Gamma_{12}^2(u,v)\right)$. Искористимо овај образац. Како је $F(u,v)=0$, добијамо да је

$$\Gamma_{11}^1(u,v)=\frac{E_u(u,v)\cancel{G(u,v)}}{2E(u,v)\cancel{G(u,v)}}=\frac{E_u(u,v)}{2E(u,v)}=\frac{\lambda_u(u,v)}{2\lambda(u,v)},\ \Gamma_{11}^2(u,v)=\frac{-E_v(u,v)\cancel{E(u,v)}}{\cancel{E(u,v)}G(u,v)}=-\frac{E_v(u,v)}{G(u,v)}=-\frac{\lambda_v(u,v)}{2\lambda(u,v)},$$
$$\Gamma_{12}^1(u,v)=\frac{E_v(u,v)\cancel{G(u,v)}}{2E(u,v)\cancel{G(u,v)}}=\frac{E_v(u,v)}{2E(u,v)}=\frac{\lambda_v(u,v)}{2\lambda(u,v)},\ \Gamma_{12}^2(u,v)=\frac{G_u(u,v)\cancel{E(u,v)}}{2\cancel{E(u,v)}G(u,v)}=\frac{G_u(u,v)}{2G(u,v)}=\frac{\lambda_u(u,v)}{2\lambda(u,v)},\ \Gamma_{22}^1(u,v)=\frac{-G_u(u,v)\cancel{G(u,v)}}{2E(u,v)\cancel{G(u,v)}}=$$
$$=-\frac{G_u(u,v)}{2E(u,v)}=-\frac{\lambda_u(u,v)}{2\lambda(u,v)},\ \Gamma_{22}^2(u,v)=\frac{G_v(u,v)\cancel{E(u,v)}}{2\cancel{E(u,v)}G(u,v)}=\frac{G_v(u,v)}{2G(u,v)}=\frac{\lambda_v(u,v)}{2\lambda(u,v)},$$ па је

$$K(u,v)=\frac{1}{E(u,v)}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\lambda_v(u,v)}{2\lambda(u,v)}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_u(u,v)}{2\lambda(u,v)}\right)+\cancel{\frac{\lambda_u(u,v)}{2\lambda(u,v)}\cdot\frac{\lambda_v(u,v)}{2\lambda(u,v)}}+\left(-\cancel{\frac{\lambda_v(u,v)}{2\lambda(u,v)}}\right)\cdot\frac{\lambda_v(u,v)}{2\lambda(u,v)}-\frac{\lambda_v(u,v)}{\cancel{2\lambda(u,v)}}\cdot\left(-\frac{\lambda_v(u,v)}{2\lambda(u,v)}\right)-\cancel{\left(\frac{\lambda_u(u,v)}{2\lambda(u,v)}\right)^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{\lambda(u,v)}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\lambda(u,v)\right)\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\ln\lambda(u,v)\right)\right)\right)=-\frac{1}{2\lambda(u,v)}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\ln\lambda(u,v)\right)+\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\ln\lambda(u,v)\right)\right),$$ тј.

$K(u,v)=-\frac{1}{2\lambda(u,v)}\Delta\left(\ln\lambda(u,v)\right)$, што је и требало доказати.