ГЕОМЕТРИЈА 2
задаци по којима се држе вежбе

ПОДУДАРНОСТ

1. (**Средња линија троугла**) Ако су B_1 и C_1 средишта дужи CA и BA троугла ABC, онда су праве BC и B_1C_1 паралелне и важи $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.

2. Ако су A, B, C, D четири различите тачке и M, N, K, L, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, DB редом, доказати:

- **а)** MN и KL, MP и QK, NP и QL су међусобно подударне дужи;
- **б)** дужи LN, MK, PQ имају заједничко средиште;
- **в)** сваки од углова $\measuredangle PMQ$, $\measuredangle PNQ$, $\measuredangle LMN$ подударан је једном од углова којег одређују праве BC и AD, AB и CD, AC и BD.

3. Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на: **а)** странице троугла; **б)** средишта страница троугла; припадају кругу описаном око тог троугла.

4. (**Ојлерова права**) Средиште описаног круга O, ортоцентар H и тежиште T произвољног троугла су колинеарне тачке и важи $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$. Доказати.

5. (**Ојлеров круг**) Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.

6. (**Симсонова права**) Подножја нормала из произвољне тачке круга описаног око неког троугла, на правама које садрже странице тог троугла, припадају једној правој.

7. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки S.

- **а)** Права која садржи тачку S и нормална је на правој AB садржи средиште дужи CD. Доказати.
- **б)** Ако су A', B', C', D' пројекције тачке S на правама AB, BC, CD, DA, редом, тада је четвороугао $A'B'C'D'$ тетиван и тангентан. Доказати.

8. (**Микелова теорема**) Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.

9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.

10. Нека су P и Q средишта лукова AB и AC круга описаног око троугла ABC и s_α бисектриса угла $\measuredangle BAC$. Доказати да је $PQ \perp s_\alpha$.

11. Нека су A', N и O редом подножје висине из A, пресек бисектрисе угла $\measuredangle BAC$ са описаним кругом троугла ABC $(AB < AC)$ и центар описаног круга, доказати $\measuredangle A'AN = \measuredangle ANO = \measuredangle NAO = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC - \measuredangle ACB)$.

12. (**Велики задатак**) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC $(b > c)$, са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB, са P_i, Q_i, R_i $(i = a, b, c)$ тачке у којима спољa уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB, са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l, при чему је M на луку BAC, са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB, са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c, доказати да је:

- **1)** $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, $\quad \mathcal{B}(A, P, P'_a)$, $\quad \mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$, $\quad \mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;
- **2)** $AQ_a = AR_a = p$, $\quad QQ_a = RR_a = a$, $\quad Q_bQ_c = R_bR_c = a$;
- **3)** $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$;
- **4)** $PP_a = b - c$, $\quad P_bP_c = b + c$;
- **5)** $PA_1 = P_aA_1$, $\quad P_cA_1 = P_bA_1$;
- **6)** $NS = NS_a = NB = NC$, $\quad MS_b = MS_c = MB = MC$;
- **7)** $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$, $\quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$;
- **8)** $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$, $\quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$;
- **9)** $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$;
- **10)** $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$, $\quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$;
- **11)** $M'N' = b$.

СЛИЧНОСТ

1. (**Теорема о симетрали угла**) Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла $\angle BAC$ троугла ABC $(AB < AC)$ секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.

2. Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:

а) $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;

б) $AE : SE = (AB + BC + CA) : BC$, $\quad AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$;

в) $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

3. Доказати (важе ознаке из Великог задатка):

а) $SA \cdot SN = 2r\rho$;

б) $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$;

в) $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$;

г) $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, M и N редом средишта страница AB и CD, O пресек дијагонала AC и BD, а P и Q нормалне пројекције тачке O редом на AD и BC. Доказати да је $MN \perp PQ$.

5. (**Птоломејева теорема**) Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да важи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

(**Чевина теорема**) Ако су P, Q, R редом тачке правих BC, CA, AB где су A, B, C три неколинеарне тачке, тада праве AP, BQ, CR припадају једном прамену ако и само ако важи $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

(**Менелајева теорема**) Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла ABC су колинеарне ако и само ако важи $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

6. Ако су P, Q, R тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB, доказати да су праве AP, BQ, CR конкурентне.

7. Доказати да, уколико постоје тачке у којима бисектрисе спољашњих углова код темена A, B и C секу праве одређене наспрамним страницама троугла ABC, оне су колинеарне.

8. Доказати да тачке P, Q, R у којима тангенте описаног круга троугла ABC у његовим теменима секу праве одређене наспрамним страницама, уколико постоје, припадају једној правој.

Деф. Нека су P, Q, R, S четири разне колинеарне тачке. Пар тачака (P, Q) је хармонијски спрегнут са паром (R, S) ако важи $\dfrac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\dfrac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Тада пишемо $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Деф. Праве a, b, c, d једног прамена су хармонијски спрегнуте ако постоји права p која их сече у хармонијски спрегнутим тачкама. Тада пишемо $\mathcal{H}(a, b; c, d)$. Ова особина не зависи од избора праве p.

<u>*Особине:*</u>

- Ако важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, тада важи и $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$.
- Ако су P, Q, R три колинеарне тачке и R није средиште дужи PQ, тада постоји јединствена тачка S таква да је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.
- $\mathcal{H}(P, Q; R, S) \Rightarrow \mathcal{B}(P, R, Q) \veebar \mathcal{B}(P, S, Q)$.
- Ако су a, b, c, d конкурентне праве и $c \perp d$, важи: $\mathcal{H}(a, b; c, d) \Leftrightarrow c$ и d су симетрале углова одређених правама a и b.

9. Нека су $\overline{S}, \overline{S_a}, \overline{S_b}, \overline{S_c}$ пројекције тачака S, S_a, S_b, S_c на праву одређену висином AA' троугла ABC, а $\overline{E}$ пројекција тачке E на праву AC. Доказати:

а) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, $\quad \mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$, $\quad \mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$, $\quad \mathcal{H}(A', E; P, P_a)$;

б) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$, $\quad \mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$, $\quad \mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$.

10. Важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ ако и само ако постоје четири тачке A, B, C, D такве да важи $AB \cap CD = \{P\}$, $BC \cap AD = \{Q\}$, $PQ \cap AC = \{R\}$, $PQ \cap BD = \{S\}$.

11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB, тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.

12. Ако су A, B, C, D разне тачке праве p, O тачка ван те праве, E и F тачке у којима права која садржи тачку B и паралелна је OA сече OC и OD, доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B$ је средиште EF.

13. (**Аполонијев круг**) Одредити скуп свих тачака у равни којима су растојања од двеју датих тачака сразмерна датим неподударним дужима.

Деф. Ако нека права која садржи тачку P сече круг $k(O, r)$ у тачкама A и B, тада је *потенција* тачке P у односу на круг k дата са $p(P, k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$ и не зависи од избора праве. Потенција тачке P је већа, мања или једнака нули у зависности од тога да ли се тачка налази у спољашњости, унутрашњости круга или на кругу.

Деф. Геометријско место тачака равни које имају једнаке потенције у односу на два дата круга $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ је права која се зове *радикална* или *потенцијална оса.*

Радикална оса је управна на правој O_1O_2. Радикалне осе трију кругова неке равни припадају једном прамену. Уколико је у питању прамен конкурентних правих, пресечна тачка назива се *радикални центар* тих кругова.

14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D. Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow k \perp l$.

15. Ако је $l(O, r)$ описан круг, $k(S, \rho)$ уписани круг и $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг који додирује страницу BC датог троугла ABC, доказати да је $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ и $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$.

16. Права одређена висином AD троугла ABC представља радикалну осу кругова којима су пречници тежишне линије BB_1 и CC_1 тог троугла.

КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи:

1) t_a, t_b, t_c;	**7)** $\beta - \gamma, l_a, \rho$;
2) β, γ, p;	**8)** $\alpha, b - c, \rho_a$;
3) $\alpha, a, b + c$;	**9)** a, ρ_b, ρ_c;
4) $\beta, h_c, b \pm c$;	**10)** α, ρ, ρ_a;
5) $t_a, h_b, b \pm c$;	**11)** $b - c, h_a, \rho$.
6) $\beta - \gamma, b, c$;	

2. Конструисати троугао ABC ако су дати теме A, ортоцентар H и центар описаног круга O тог троугла.

3. Дате су тачке A_1, S, F. Конструисати троугао ABC ако је A_1 средиште BC, S центар уписаног круга, а F пресек симетрале спољашњег угла у темену A и праве BC.

ИНВЕРЗИЈА

Деф. Нека је $k(O, r)$ произвољни круг равни $\mathbb{E}^2$. *Инверзија у односу на круг k* је пресликавање $\psi_k : \mathbb{E}^2 \backslash \{O\} \to \mathbb{E}^2 \backslash \{O\}$ којим се тачка P слика у тачку P' такву да P и P' припадају истој полуправој са теменом у O и важи $OP \cdot OP' = r^2$.

<u>*Особине*</u>

- $\psi_k^2 = \mathcal{E}$.
- $\psi_k(P) = P \Leftrightarrow P \in k$.
- ψ_k слика унутрашњост круга у спољашњост и обрнуто.
- Ако ψ_k слика A у A' и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.
- Ако права p садржи тачку O, тада се $p \backslash \{O\}$ слика у $p \backslash \{O\}$.
- Ако права p не садржи тачку O, онда се слика у $l \backslash \{O\}$ где је l круг који садржи O.
- Ако круг l садржи тачку O, онда се $l \backslash \{O\}$ слика у праву која не садржи O.
- Ако круг l не садржи тачку O слика се у круг l_1 који такође не садржи O. При том се центар круга l НЕ ПРЕСЛИКАВА у центар круга l_1.
- $\psi_k(A)\psi_k(B) = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.
- ψ_k чува углове између кривих.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.

2. Нека се инверзијом ψ_k тачка A која не припада кругу k слика у A' и нека је l произвољан круг који садржи A и A'. Доказати да је $l \perp k$.

3. Нека је O центар описаног круга l троугла ABC. Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ доказати да је $OA \perp B'C'$.

4. Нека је $ABPQ$ нететивни четвороугао. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABP и ABQ једнак углу између кругова описаних око троуглова PQA и PQB.

5. Нека се кругови k_1, k_2, k_3 међусобно додирују у тачкама P, Q, R. Доказати да је круг описан око троугла PQR ортогоналан на сва три круга.

6. Кругови k_1, k_2, k_3 су међусобно ортогонални, при чему се k_1 и k_2 секу у тачкама A и B, k_2 и k_3 у тачкама C и D, k_3 и k_1 у тачкама E и F. Доказати да се кругови описани око троуглова ACE и ADF додирују у тачки A.

7. У равни су дата четири круга од којих сваки додирује тачно два круга од преосталих. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.

8. Конструисати круг k који садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p.

9. Конструисати круг k који садржи дату тачку A и додирује дате кругове k_1 и k_2.

10. Конструисати круг који споља додирује три дата круга k_1, k_2, k_3.

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ РАВНИ

1. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.

2. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ ако и само ако су p, q, r праве једног прамена.

3. Доказати: $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \Leftrightarrow AB \perp p$.

4. Ако нека фигура равни има тачно две осе симетрије, доказати да је она и централно-симетрична.

5. Нека је $ABCDE$ петоугао уписан у круг такав да је $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да D припада медијатриси странице AB.

6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\measuredangle BAD = 60^\circ$ и нека права p сече редом странице AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.

7. Одредити тип и компоненте изометрије $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$.

8. Над ивицама троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB, BEC, CFA.

   а) (**Торичелијева тачка**) Доказати да су дужи AE, BF, CD међусобно подударне и да се секу у једној тачки.

   б) (**Наполеонов троугао**) Доказати да центри конструисаних троуглова чине темена правилног троугла.

9. Нека је у равни $\mathbb{E}^2$ дат троугао ABC и нека су B', C' тачке правих AB и AC такве да важи $\mathcal{B}(A, B, B')$ и $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ако је P_a тачка у којој споља уписани круг који одговара темену A додирује страницу BC тог троугла, доказати да је $\mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$.

10. Нека је t тангента описаног круга троугла ABC у темену A. Доказати да важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$.

11. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

12. Дата су два круга који имају пресечну тачку A. Конструисати праву која садржи A и на којој дати кругови одсецају подударне дужи.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

- Постоји једиствена права нормална на двема мимоилазним правама.

- Права је нормална на раван ако и само ако је нормална на двема правама те равни које се секу.

- **(Теорема о три нормале)** Ако је права p нормала из тачке O на раван π и продире је у тачки P, а Q подножје нормале из P на праву $q \subset \pi$, тада је $OQ \perp q$.

1. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Одредити угао између правих AB_1 и BC_1.

б) Одредити угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D.

в) Доказати да је раван B_1CD_1 нормална на дуж AC_1 и дели је у размери $2:1$.

2. Збир два угла при врху триедра већи је од трећег. Доказати.

3. Равни од којих је свака одређена ивицом и симетралом наспрамне стране триедра имају заједничку праву. Доказати.

4. Нека су углови при врху триедра једнаки редом $60°, 45°, 45°$. Доказати да је диедар наспрам највеће странице прав.

5. Доказати да се око сваког тетраедра може описати сфера, као и да се у сваки тетраедар може уписати сфера.

6. **а)** (**Тежиште тетраедра**) Дужи одређене средиштима наспрамних ивица тростране пирамиде (тетраедра) секу се у једној тачки која их полови. Доказати.

б) Доказати да тежиште тетраедра дели дужи одређене теменима и тежиштима наспрамних страна у односу $3:1$.

7. **а)** Две наспрамне ивице неког тетраедра су међусобно подударне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно нормалне.

б) Две наспрамне ивице тетраедра су нормалне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно подударне.

8. Доказати да је права одређена средиштима страница AC и BD тетраедра $ABCD$ уједно и њихова заједничка нормала ако и само ако је $AB = CD$ и $AD = BC$.

Деф. Тетраедар $ABCD$ је *ортогоналан* ако важи $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

9. Висине AA' и BB' тетраедра $ABCD$ се секу ако и само ако је $AB \perp CD$. Доказати.

10. Доказати да подножја висина из темена тетраедра представљају ортоцентре наспрамних пљосни ако и само ако је тетраедар ортогоналан.

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОСТОРА

1. Ако су A, B, C три тачке равни π, доказати да важи $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$.

2. Доказати $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$.

3. Доказати да је композиција непарног броја централних симетрија простора поново централна симетрија.

4. Одредити тип изометрије $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$.

5. Доказати да је композиција три раванске рефлексије којима су основе одређене бочним пљоснима тростране призме $ABCA'B'C'$ клизајућа рефлексија тог простора.

6. Одредити тип и компоненте изометрије која представља композицију двеју осних рефлексија $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ еуклидског простора, у зависности од узајамног положаја правих p и q.

7. Нека су OP, OQ, OR три међусобно нормалне дужи простора. Доказати да је композиција $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$ транслација.

8. Доказати да је у еуклидском простору композиција састављена од три раванске рефлексије којима су основе одређене пљоснима триедра осноротациона рефлексија.

ХИПЕРБОЛИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

1. Праве одређене основицом и противосновицом Сакеријевог четвороугла су хиперпаралелне. Доказати.

2. Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су подударни и оштри. Доказати.

3. Доказати да су два Ламбертова четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са оштрим угловима D и D' подударна ако је:

а) $AB = A'B',\ BC = B'C'$;	**г)** $AD = A'D',\ CD = C'D'$;
б) $AB = A'B',\ AD = A'D'$;	**д)** $AD = A'D',\ \measuredangle D = \measuredangle D'$;
в) $AD = A'D',\ BC = B'C'$;	**ђ)** $AB = A'B',\ \measuredangle D = \measuredangle D'$.

4. Доказати да су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са основама AB и $A'B'$ подударна ако је:

а) $AB = A'B',\ BC = B'C'$;
б) $AB = A'B',\ CD = C'D'$;
в) $BC = B'C',\ CD = C'D'$;
г) $AB = A'B',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$;
д) $BC = B'C',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$;
ђ) $CD = C'D',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$.

5. Ако су тачке P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC, доказати да су праве BC и PQ међу собом хиперпаралелне.

6. Ако су A, B, C три разне тачке неке праве l и O тачка изван те праве, доказати да средишта A', B', C' дужи OA, OB, OC не припадају једној правој.

7. Доказати да је у Сакеријевом четвороуглу противосновица већа од основице.

8. Ако су P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC, доказати да је $PQ < \frac{1}{2}BC$.

9. Нека је A_1 средиште хипотенузе BC правоуглог троугла ABC. Доказати да је дуж AA_1 мања од половине хипотенузе.

10. Ако је висина еквидистанте већа од нуле тада та еквидистанта није права. Доказати.

11. Праве p и q секу се у тачки S. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

12. Праве p и q су паралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

13. Праве p и q су хиперпаралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

14. Нека су a, b и c међусобно паралелне праве, али не све у истом смеру. Нека су b' и c' управне из тачке A праве a на правама b и c. Одредити угао између правих b' и c'.

15. Два разна параболичка прамена имају заједничку праву. Доказати.

16. Нека су A, B, C, D тачке такве да су редом полуправе AB и DC, односно BC и AD паралелне. Доказати да су симетрале унутрашњих углова код темена A и C и спољашњих углова код темена B и D праве истог прамена.

17. Доказати да за три неколинеарне тачке A, B, C важи $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC)$.

18. Ако је у равни Лобачевског дат троугао ABC код кога је $\measuredangle C$ прав, тј. $\measuredangle C = R$, затим $\measuredangle A = \Pi(a')$, $\measuredangle B = \Pi(b')$, $BC = a$ и $AB = c$, доказати да је:

а) $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$;

б) $\measuredangle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b), & \text{за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c), & \text{за } b' > c \end{cases}$;

в) $\measuredangle A = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')\right], & \text{за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\left[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)\right], & \text{за } b' > c \end{cases}$;

г) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')\right], & \text{за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\left[\Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)\right], & \text{за } b' > c \end{cases}$;

д) $\Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R, \quad \Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R$.

ПОЕНКАРЕОВ ДИСК МОДЕЛ

1. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h-права a и h-тачка A. Одредити h-праву n која садржи тачку A и управна је на праву a.

2. У Поенкареовом диск моделу дате су h-тачке A и B. Одредити h-симетралу дужи AB.

3. У Поенкареовом диск моделу дате су тачке X и Y. Конструисати h-круг l са центром у тачки X који садржи тачку Y.

4. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h-тачке A и B. Конструисати h-тачку C такву да је h-троугао ABC правилан.

5. У Поенкареовом диск моделу дате су две праве које се секу. Одредити h-бисектрису угла којег одређују.

6. У Поенкареовом диск моделу конструисати h-дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.