Геометрија 1

Задаци за вежбе и практикуме

2018.

1 Линеарне операције са векторима

1.1. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Да ли су вектори а) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}$; б) $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{A_1D}$; в) $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$, компланарни.

1.2. Доказати да се дијагонале четвороугла полове ако и само ако је тај четвороугао паралелограм.

1.3. На страницама AB, BC, CD и AD паралелограма $ABCD$ дате су редом тачке A_1, B_1, C_1, D_1 тако да је $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм. Доказати да се праве AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 секу у једној тачки.

1.4. У односу на тачку O дати су вектори положаја $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ тачака A и B $(A \neq B)$. Изразити вектор положаја $\overrightarrow{OC}$ тачке C за коју је $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$.

1.5. Дате су неколинеарне тачке A, B и O. Тачка C одређена са $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ припада правој AB ако и само ако важи $\alpha + \beta = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, тада тачка C припада дужи AB. Доказати.

1.6. Нека су O, A, B и C четири некомпланарне тачке. Да би тачка D одређена са $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ припадала равни троугла ABC, потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, тада тачка D припада троуглу ABC. Доказати.

1.7. У простору је дато n тачака $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ и тачка O. Тежиште тог скупа тачака је тачка T дефинисана са

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}.$$

а) Доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O.

Са $T_i, i = 1, \ldots, n$ означимо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа избацивањем тачке A_i.

б) Доказати да се све дужи $A_iT_i (1 \leq i \leq n)$ секу у тачки T и да је $\overrightarrow{A_iT} : \overrightarrow{TT_i} = (n-1) : 1$.

1.8. Скицирати и доказати Задатак 1.7 за $n = 2, 3$ у равни и $n = 4$ у простору.

1.9. Доказати да се тежиште тетраедра $ABCD$ поклапа са тежиштем тетраедра $A'B'C'D'$ коме су темена A', B', C', D' редом тежишта троуглова BCD, ACD, ABD и ABC.

1.10. Дат је паралелограм $ABCD$. Ако је тачка F средиште странице BC, тачка G средиште странице CD, а тачка E пресек дужи AF и BG, одредити односе $\frac{AE}{EF}$ и $\frac{BE}{EG}$.

1.11. (Менелајева теорема, 1. век н. е.) Потребан и довољан услов да би тачке P, Q и R које леже редом на правама BC, CA и AB троугла ABC биле колинеарне, јесте да важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

1.12. (Чеваова теорема) Нека су P, Q и R тачке редом на правама BC, AC и AB, троугла ABC. Доказати да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки или су паралелне.

1.13. Нека је ABC троугао и тачке P и Q такве да је $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ} = 4\overrightarrow{QC}$, а тачка R је пресек правих AC и PQ. Израчунати однос $\overrightarrow{CR} : \overrightarrow{RA}$.

1.14. У равни је дат троугао ABC. Нека тачка D припада страници AB, а тачка E страници BC, тако да је $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Ако се дужи AE и CD секу у тачки F одредити у ком односу тачка F дели дужи AE и CD.

1.15. Нека је ABC троугао, P и Q тачке такве да је $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$ и $2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC}$. Ако је R тачка праве AC таква да се праве AQ, CP и BR секу у једној тачки, одредити однос $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AR}$.

1.16. На страницама AB и AC троугла ABC дате су редом тачке K и L, такве да важи $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$. Доказати да тежиште троугла ABC припада дужи KL.

1.17. Дат је паралелограм $ABCD$ и у његовој унутрашњости тачка O. Две праве које садрже тачку O и паралелне страницама паралелограма, секу странице паралелограма у тачкама $P \in AB, Q \in CD, U \in AD$ и $V \in BC$. Доказати да се праве PV, QU и AC секу у једној тачки или су паралелне.

1.18. Над страницама троугла ABC конструисани су паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Доказати да је $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$.

1.19. Дат је паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказати да је продор T дијагонале AC_1 кроз раван одређену тачкама B, D и A_1 тежиште троугла BDA_1.

2 Скаларни, векторски и мешовити производ

2.1. Доказати да је за троугао ABC испуњен услов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (косинусна теорема).

2.2. Доказати да се висине троугла секу у једној тачки (ортоцентар).

2.3. а) Доказати да симетрала унутрашњег угла у троуглу дели наспрамну страну у односу суседних страна. б) Доказати да се симетрале унутрашњих углова у троуглу секу у једној тачки (центар уписаног круга). Упутство: користити Чеваову теорему.

2.4. а) Доказати да се нормална пројекција вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{x}$ може записати у облику $\vec{v_1} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\vec{x}$. б) Ако су $\vec{v} = (1,1,1)$, $\vec{x} = (1,2,2)$ дати координатама у ортонормираној бази одредити једнозначно разлагање $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ вектора $\vec{v}$ на пројекцију и ортогоналну допуну ($\vec{v_2} \perp \vec{x}$).

2.5. Наћи вектор $\vec{x}$ ако је $\vec{x}\cdot\vec{a} = \alpha, \vec{x}\cdot\vec{b} = \beta, \vec{x}\cdot\vec{c} = \gamma$, при чему су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарни вектори, а $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ задати ненула скалари.

2.6. Одредити вектор $\vec{x}$ ако важи $\vec{u}\cdot\vec{x} = \alpha$, $\vec{u}\times\vec{x} = \vec{v}$.

2.7. Ако су $A(0,1,1)$, $B(2,3,5)$, $C(3,1,4)$ темена троугла, израчунати његову површину.

2.8. Ако су $A(0,1,1)$, $B(1,2,6)$, $C(0,1,2)$ и $D(2,0,2)$ темена тетраедра, израчунати његову запремину.

2.9. Дат је троугао ABC површине P. Нека су тачке A_1, B_1, C_1 такве да важи $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA}$. Колика је површина троугла $A_1B_1C_1$?

2.10. Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a. Нека су V_1 и V_2 врхови датих пирамида и угао између правих AV_1 и BV_2 једнак $\frac{\pi}{4}$. Ако је висина једне пирамиде једнака a одредити висину друге пирамиде.

2.11. Нека је ABC произвољан троугао у равни. Доказати да је збир три вектора који су спољашње нормале на ивице троугла, а чији је интензитет једнак дужини одговарајуће ивице, једнак нули.

2.12. Нека је $ABCD$ тетраедар. Доказати да је збир четири вектора који су спољашње нормале на пљосни тетраедра, а интензитет им је једнак површини одговарајуће пљосни, једнак нули.

2.13. Ако је у правоуглом паралелепипеду $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дијагонала AC_1 нормална на раван која садржи тачке A_1, B, D доказати да је тај паралелепипед коцка.

2.14. Ако су A, B, C фиксиране неколинеарне тачке и P произвољна тачка, доказати да је $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{CA}$ ако и само је P тежиште троугла ABC.

3 Трансформације координата

3.1. Тежиште троугла OAB је тачка O'. У равни троугла изабрана су два афина репера: репер Oxy са почетком у тачки O и координатним векторима $\vec{e_1} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{e_2} = \overrightarrow{OB}$ и репер $O'x'y'$ са почетком у тачки O' и координатним векторима $\vec{f_1} = \overrightarrow{O'A}$ и $\vec{f_2} = \overrightarrow{O'B}$. Одредити везу координата (x,y) и (x',y') као и координате средишта страница троугла OAB у односу на репер $O'x'y'$.

3.2. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао. Репер Axy има кооординатне векторе $\vec{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{AF}$, а репер $Cx'y'$ координатне векторе $\vec{f_1} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{f_2} = \overrightarrow{CD}$. Одредити формуле које представљају везу координата (x,y) и (x',y'), њима инверзне формуле, као и координате темена шестоугла у оба репера.

3.3. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије ивице имају дужине $AB = 4, BC = 3$, а тачка S је центар тог правоугаоника. Дата су два ортонормирана репера, исте оријентације: репер Axy има x осу у правцу вектора $\overrightarrow{AB}$ и y осу у правцу вектора $\overrightarrow{AD}$, а репер $Sx'y'$ има x' осу у правцу вектора $\overrightarrow{SC}$. Одредити везу координата (x,y) и (x',y'), као и координате темена правоугаоника у оба координатна репера.

3.4. Дате су координате тачака $A(2,1), B(3,0)$ и $C(1,4)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1,6), B(1,9)$ и $C(3,1)$. Изразити координате (x,y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x',y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.

3.5. Дат је тетраедар $OABC$. Афини репер $Oxyz$ има почетак у темену O, а координатни вектори су $\vec{e_1} = \overrightarrow{OA}, \vec{e_2} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{e_3} = \overrightarrow{OC}$. Афини репер $Ax'y'z'$ има почетак у темену A тетраедра, а његови координатни вектори су $\vec{f_1} = \overrightarrow{AD}, \vec{f_2} = \overrightarrow{AE}$ и $\vec{f_3} = \overrightarrow{AF}$, где су D, E и F средишта ивица BC, OA и AB. Изразити координате (x,y,z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ помоћу координата (x',y',z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$. Одредити инверзне формуле као и координате темена тетраедра у односу на репер $Ax'y'z'$.

3.6. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице 1, са центром S. Ортонормирани репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{AA_1}$. У ортонормираном реперу $Sx'y'z'$, исте оријентације, дијагонална раван ABC_1D_1 има једначину $z' = 0$, тачка C_1 је на позитивном делу x' осе, а тачка D_1 има позитивну x' и y' координату. Одредити формуле трансформација координата и координате темена коцке у оба репера.

3.7. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице a. Одредити а) угао између мимоилазних правих AC и BD_1; б) растојање између правих AC и BD_1; в) угао између праве AC и равни $\alpha = BCD_1$.

3.8. У погодно одабраном ортонормираном реперу одредити координате темена а) правилног тетраедра ивице a; б) правилног октаедра ивице d.

4 Тачка, права и раван

4.1. Одредити углове које права $p : 3x - 2y + 4 = 0$ гради са координатним осама.

4.2. Одредити једначину праве n која је нормална на праву $p : 2x + 3y - 4 = 0$ и која садржи пресек правих $x + y + 1 = 0$ и $x - y = 0$.

4.3. Праве $p : y = x - 2$ и $q : y = 3$ разлажу раван на четири угла. а) Одредити једначине обе симетрале тих углова. б) Без цртања, у сваком од четири угла одредити по једну тачку A_1, A_2, A_3, A_4. в) Одредити која од тачака A_i је у истом углу као тачка $M(1, 4)$. Проверити цртањем.

4.4. Одредити једначине тангенти из тачке $M(1, 2)$ на круг $k : (x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 9$.

4.5. Дати су кругови: $k_1 : (x-7)^2+(y-3)^2 = r_1^2$ и $k_2 : (x-17)^2+(y-3)^2 = 81$. а) У зависности од полупречника $r_1 > 0$ дискутовати број заједничких тангенти ових кругова. б) За $r_1 = 3$ одредити једначине заједничких тангенти ових кругова.

4.6. Координате три темена четвороугла $ABCD$ су $A(5, 5), B(1, 3), C(3, -1)$. Темена четвороугла $A_1B_1C_1D_1$ су редом средишта страница AB, BC, CD, DA, а пресек дијагонала A_1C_1 и B_1D_1 је тачка $S_1(4, 3)$. Одредити координате темена D и однос површина ова два четвороугла.

4.7. У поларним координатама одредити: а) једначину праве $p : \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. б) Једначину праве q која са $x-$осом гради угао $\phi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а на растојању је $r_0 \geq 0$ од координатног почетка.

4.8. Одредити растојање тачака A и B преко њихових поларних координата $A(r_A, \phi_A)$, $B(r_B, \phi_B)$.

4.9. Скицирати раван а) $z - 5 = 0$; б) $x = -2$; в) $y + z - 3 = 0$; г) $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

4.10. Одредити једначину нормале из тачке $A(2, 3, -1)$ на раван $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$.

4.11. Одредити једначину равни која садржи тачку $M(-1, 0, 3)$ и нормална је на праву $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

4.12. Одредити једначину равни која:
а) је паралелна са равни Oxz и садржи тачку $P(2, 3, 5)$ б) садржи z-осу и тачку $M(-3, 1, 2)$ в) паралелна је x оси и садржи тачке $A(4, 0, -2)$, $B(5, 1, 7)$.

4.13. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(3, -2, -4)$ у односу на раван $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α.

4.14. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(-1, -2, 1)$ у односу на праву $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ као и пројекцију P' тачке P на праву l.

4.15. Одредити једначину равни која садржи праву $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x-4y+z+5 = 0$.

4.16. Одредити λ тако да се праве $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу. Које су координате пресечне тачке?

4.17. Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ и $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

4.18. Одредити једначину праве која садржи тачку $L(2, -1, 7)$ и сече праве $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ и $q : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.

4.19. Кроз тачку $T(-3, 1, 2)$ одредити праву l која је паралелна равни $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$ и која сече праву $p : \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

4.20. Одредити раван α која са равни $\gamma : x - 4y - 8z + 12 = 0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву: а) $x + 5y + z = 0, x - z + 4 = 0$ б) $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$.

4.21. Одредити угао између пљосни правилног тетраедра.

4.22. Одредити угао између (свих могућих) пљосни правилног октаедра.

5 Криве другог реда

5.1. а) Доказати да средишта тетива паралелних дијаметру p елипсе (хиперболе) припадају некој правој q која пролази кроз центар елипсе (хиперболе). б) Доказати да су тангенте у крајевима дијаметра p паралелне правој q. в) Доказати да су (у случају елипсе) тангете у крајевима дијаметра q паралелне дијаметру p.

5.2. Доказати да средишта паралелних тетива параболе припадају правој која је паралелна оси параболе.

5.3. Тангенте у тачкама M_1 и M_2 елипсе секу се у тачки P. Доказати да тачка P припада дијаметру који полови тетиву M_1M_2.

5.4. Доказати да је геометријско место тачака из којих се елипса види под правим углом круг (еквивалентно: кад елипса клизи додирујући координатне осе њени центар се креће по кругу).

5.5. Шта је геометријско место тачака из којих се парабола види под правим углом?

5.6. Произвољна права l сече хиперболу у тачкама P и Q, а асимптоте хиперболе у тачкама M и N. Доказати да је $MP = NQ$.

5.7. Доказати да је површина троугла чије су странице асимптоте хиперболе и тангента на хиперболу, константна.

5.8. Нека су дужи OA и OB два узајамно нормална полудијаметра елипсе. Доказати да је растојање центра O елипсе од тетиве AB константа која не зависи од избора полудијаметара.

5.9. Доказати да површина паралелограма који је разапет коњугованим полудијаметрима елипсе не зависи од избора полудијаметара.

5.10. Доказати да се елипса и хипербола које имају заједничке жиже (конфокалне криве) секу под правим углом.

5.11. Одредити једначину криве другог реда који садржи тачке $A(-2,-1)$ и $B(0,-2)$ и којој су праве $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ осе симетрије.

5.12. Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(2,1)$, ако су дате њена директриса $x-2y-5=0$ и оса симетрије $2x+y-1=0$.

5.13. Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $l: x+y-1=0$, а жиже су јој тачке $F_1(1,1)$ и $F_2(-2,-2)$.

5.14. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3,4)$ и додирује криву $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$.

5.15. Свести криву другог реда $xy+x+y=0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле трансформације. Одредити основне елементе криве (центар, осе симетрије, жиже, ексцентрицитет, асимптоте - ако постоје). Скицирати криву.

5.16. Свести криву другог реда $4x^2-4xy+y^2+x+12y+6=0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трасформације. Која је то крива и колики јој је ексцентрицитет. Скицирати криву.

6 Афина пресликавања

6.1. а) Одредити афино пресликавање које тачке $A_0(0,0)$, $B_0(1,0)$, $C_0(0,1)$ пресликава редом у тачке $A_1(5,3)$, $B_1(6,2)$, $C_1(4,5)$. б) Да ли је пресликавање изометрија, чува ли оријентацију и површину? в) Одредити му инверзно пресликавање.

6.2. а) Одредити афино пресликавање које троугао $A_1B_1C_1$: $A_1(5,3)$, $B_1(6,2)$, $C_1(4,5)$ пресликава троугао $A_2B_2C_2$: $A_2(1,1)$, $B_2(-1,0)$, $C_2(0,-3)$. б) чува ли пресликавање оријентацију. Скицирати. в) Одредити поврсхину троугла $A_2B_2C_2$ ако се зна да је површина троугла $A_1B_1C_1$ једнака $\frac{1}{2}$.

6.3. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2,2)$ за угао од $\phi = \frac{\pi}{4}$. б) Шта је слика праве $y=-x$ при том пресликавању. Нацртати!

6.4. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2,5)$ за угао од $\phi = \frac{\pi}{2}$. б) Шта је слика круга $(x-2)^2+y^2=4$ при том пресликавању. Нацртати!

6.5. Одредити формуле рефлексије у односу на праву $p: x=6$.

6.6. Одредити формуле хомотетије са коефициентом 2 у односу на тачку $S(4,3)$. шта је слика круга $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ при тој хомотетији?

6.7. а) Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha: 2x+2y-z+1=0$. б) Шта је слика сфере $x^2+y^2+z^2=1$ при тој рефлексији? Скицирати!

6.8. Одредити бар једно афино пресликавање равни које које круг $k: x^2+y^2-8x-10y+16=0$ пресликава на елипсу $e: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

6.9. Доказати да су све параболе међусобно сличне.

6.10. Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију у односу на тачку $S(-1,1,3)$. Да ли пресликавање чува оријентацију простора?

6.11. а) Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha : y - z = 3$. б) Шта је слика праве $p : y = 0, z = 0$ при тој рефлексији? Нацртати!

6.12. Одредити формуле хомотетије којом се сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ пресликава на сферу $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3$. Наћи сва решења.

7 Површи

7.1. Круг k који настаје ротацијом тачке $A(1,2,3)$ око праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ написати као: а) пресек равни и сфере којој центар припада равни б) пресек равни и кружног цилиндра в) пресек две сфере полупречника 2.

7.2. Одредити једначине равни које садрже праву $l : \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ и додирују сферу $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Одредити затим једначине симетралних равни диедара између ове две равни назначивши ону која сече дату сферу.

7.3. Одредити једначину сфере полупречика 3 која је уписана у конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Скицирати.

7.4. Шта се добија (објаснити и написати једначину) ротацијом праве p око Oz осе, ако је права p : а) $x = 0, y = z$; б) $y = 0, x = 1$ в) $z = 0, x = y$; г) $z = 0, x = 2$; д) $x = 1, y = z$.

7.5. Шта је геометријско место тачака простора које су једнако удаљене од: а) две паралелне праве; б) две праве које се секу; в) две паралелне равни г) две равни које се секу?

7.6. Шта је геометријско место тачака простора које су једнако удаљене од: а) две тачке; б) тачке и праве; в) тачке и равни; г) две мимоилазне праве?

7.7. Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од мимоилазних правих $p : x = 0, y = 0$, и $q : z = 0, x = a$. Свести površ на канонски облик. О којој се површи ради?

7.8. Одредити једначину цилидра који је описан око сфере $x^2+y^2+z^2 = 1$ чије су изводнице паралелне вектору $(1,1,-2)$.

7.9. (291.) Одредити једначину цилиндра чије су изводнице паралелне правој $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, а који садржи параболу $x^2 = 2y, z = 0$.

7.10. Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(0,1,1)$ и који садржи елипсу $x^2 + 3y^2 = 4, z = 0$.

7.11. Одредити једначину кружног конуса коме је права $o : x-y = 0, 4x-z = 0$ оса и коме је раван $\alpha : x+y+z = 0$ тангентна раван.

7.12. (298.) Одредити једначину конуса чије је теме тачка $M(1,4,5)$ и који додирује сферу $\sigma : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$. Ако је извор светлости у тачки M одредити која је крива контура сенке сфере σ на раван Oxz.

7.13. Дат је параболоид $\mathcal{S} : z + 2 = x^2 + y^2$ и раван $\pi_1 : y - z = 4$. а) Одредити једначину равни π_2 која садржи тачку $M_0(0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ а ортогонална је на раван Oyz и раван π_1. б) Пресечну криву L равни π_2 и површи $\mathcal{S}$ пројектовати редом на све три координатне равни, одредити једначине тих пројекција и прецизно утврдити које су криве те пројекције.

7.14. Свести једначину површи на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације 1) $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8, +8y - z + 10 = 0$; 2) $12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz - 12yz - 4 = 0$.

8 Сферна геометрија

8.1. Одредити полупречник круга k на једничној сфери који садржи тачке $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Упоредити растојање између тачака A и B мерено по кругу k, са растојањем по великом кругу између A и B.

8.2. На јединичној сфери одредити растојање између тачака $A(60^o N, 105^o W)$ и $B(30^o S, 45^o W)$.

8.3. Одредити (приближно) растојање између тачака на планети Земљи између градова $A(45^o N, 20^o E)$ и $B(30^o S, 25^o W)$. Узети да је Земља сфера полупречника $r = 6340km$.

8.4. а) На јединичној сфери одредити неки сферни троугао (тј. координате темена) који има три права угла. Колики му је обим, а колика површина? б) Одредити фамилију троуглова чији збир углова тежи ка 3π.

8.5. На јединичној сфери одредити једнакостранични сферни троугао ABC (тј. координате темена) чији је унутрашњи угао $\alpha > \frac{\pi}{3}$, а теме A је северни пол. Колики му је обим, а колика површина?

8.6. Сферни троугао ABC на јединичној сфери има два угла једнака $\alpha = \frac{\pi}{3} = \beta$ и површину $P = \frac{\pi}{6}$. Израчунати ивице тог троугла.

8.7. Описати прецизно геометријско место тачака које су за $d > 0$ удаљене од северног пола сфере. Које су могуће вредности константе d?